

A.N. MATVEEV

---

# ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO



Electricidad  
y  
magnetismo

А. Н. Матвеев

## Электричество и магнетизм

«Высшая школа»

A. N. Matveev

# Electricidad y magnetismo



Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por  
la licenciada en ciencias físicas C. Fernández

Impreso en la URSS

На испанском языке



**LIBRERÍA CIENTÍFICA**

Jr. Ica 441 Lima 1 ☎ 428-0448

ISBN 5-03-000614-1

© Издательство «Высшая школа», 1983  
© traducción revisada y ampliada al español, editorial Mir, 1988

# Índice

Prefacio	12
Introducción	14
<b>Capítulo 1. Cargas, campos, fuerzas</b>	<b>16</b>
§ 1. Portadores microscópicos de cargas eléctricas	16
Clasificación. Electrón. Protón. Neutrón. ¿Qué significa la distribución continua de una carga elemental eléctrica? Spin y momento magnético	
§ 2. Cuerpos con carga. Electrización	20
Trabajo de salida termoelectrónico. Espectro energético de los electrones. Energía de Fermi. Diferencia de potencial de contacto. Electrización	
§ 3. Carga elemental y su invariación	28
Experimentos de Millikan. Método de medida de la carga por resonancia. Ausencia de carga fraccionaria. Igualdad de las cargas elementales positivas y negativas. Invariación de la carga	
§ 4. Corriente eléctrica	33
Movimiento de las cargas. Distribución continua de las cargas. Densidad volumétrica de las cargas. Concentración de cargas. Densidad superficial de las cargas. Densidad de corriente. Intensidad de corriente a través de una superficie	
§ 5. Principio de conservación de la carga	37
Dos aspectos del concepto de conservación de la carga. Formulación integral del principio de conservación de la carga. Divergencia. Fórmula de Gauss—Ostrogradski. Enunciación diferencial del principio de conservación de la carga	
§ 6. Ley de Coulomb	45
Verificaciones experimentales de la ley de Coulomb. Método de Cavendish. Verificación de la ley para distancias grandes. Verificación de la ley para las distancias pequeñas. Interpretación de campo de la ley de Coulomb. Campo eléctrico. Sobre los límites de aplicación de la concepción clásica de campo	
§ 7. Principio de superposición	53
Principio de superposición para la interacción de las cargas puntuales. Enunciación con relación al campo del principio de superposición. Cargas de prueba. Límites de aplicación del principio de superposición	
§ 8. Campo magnético	56
Necesidad de la aparición de un campo magnético durante el movimiento de las cargas. Interacción entre una carga puntual y un hilo infinito recto con carga. Naturaleza relativista del campo magnético. Fuerzas de interacción de los conductores paralelos con corriente. Unidad de intensidad de corriente. Campo magnético	
§ 9. Fuerza de Lorentz. Fuerza de Ampère	62
Transformación de las fuerzas. Fuerza de Lorentz. Inducción del campo magnético.	

Fuerza de Ampère. Paso de las corrientes volumétricas a las lineales. Campo magnético de una corriente rectilínea	
§ 10. Ley de Biot—Savart	87
Interacción de los elementos de corriente. Sobre la verificación experimental de la ley de interacción. Interpretación de la interacción respecto al campo. Ley de Biot y Savart. Fuerza de interacción de las corrientes rectilíneas	
§ 11. Transformación de los campos	74
Invariación de la expresión para la fuerza en el campo electromagnético. Transformación de los campos. Aplicación de las fórmulas (11.15). Campo de una carga puntual que se mueve uniforme y rectilíneamente	
Problemas	
<b>Capítulo 2. Campo eléctrico constante</b>	81
§ 12. Campo eléctrico constante	81
Carga inmóvil. Esencia del modelo. Límites de aplicación del modelo	
§ 13. Forma diferencial de la ley de Coulomb	82
Teorema de Gauss. Medición de la carga. Base física de la validez del teorema de Gauss. Enunciación diferencial de la ley de Coulomb. Ecuación de Maxwell para la div E. Líneas de fuerza. Fuentes y sumideros del vector E. Invariación de la carga	
§ 14. Carácter potencial de un campo electrostático	88
Trabajo en un campo eléctrico. Carácter potencial del campo coulombiano. Rotor del vector. Fórmula de Stokes. Enunciación diferencial del carácter potencial del campo. Gradiente. Potencial escalar. Multiformalidad del potencial escalar. Normalización. Expresión del trabajo por medio del potencial. Potencial del campo de una carga puntual. Potencial del campo de un sistema de cargas puntuales. Potencial del campo para una distribución continua de las cargas. Potencial del campo de las cargas superficiales. Infinitud del potencial del campo de una carga puntual. Carácter finito del potencial, siendo continua la distribución de la carga con densidad finita. Continuidad del potencial. Teorema de Earnshaw	
§ 15. Campo electrostático en el vacío	99
Planteamiento del problema. Aplicación directa de la ley de Coulomb. Cálculo del potencial. Uso del teorema de Gauss. Ecuaciones de Laplace y Poisson. Cilindro circular infinito, cargado uniformemente	
§ 16. Campo electrostático en presencia de conductores	106
Forma diferencial de la ley de Ohm. Clasificación de los materiales según su conductividad. Ausencia de campo eléctrico dentro del conductor. Ausencia de cargas volumétricas en el conductor. Inducción electrostática. Campo en las proximidades de la superficie del conductor. Mecanismo de formación del campo cerca de la superficie del conductor. Dependencia entre la densidad superficial de las cargas y la curvatura de la superficie. Fuga de la carga de una punta. Electroscopios y electrómetros. Pantalla metálica. Potencial de un conductor. Capacidad de un conductor aislado. Sistema de conductores. Condensadores. Esfera conductora en un campo homogéneo. Campo de un dipolo. Método de representaciones	
§ 17. Campo electrostático en presencia de dieléctricos	137
Momento dipolar de la distribución continua de las cargas. Polarización de los dieléctricos. Cuadro molecular de la polarización. Dependencia entre la polarización dieléctrica y la intensidad del campo eléctrico. Influencia de la polarización sobre el campo eléctrico. Densidades superficial y volumétrica de las cargas ligadas. Desplazamiento eléctrico. Teorema electrostático de Gauss en presencia de dieléctricos. Condiciones de frontera. Condiciones de frontera para la componente normal del vector D. Condiciones de frontera para la componente tangencial del vector E. Refracción de las líneas de fuerza en la superficie de separación de los dieléctricos. Signos de las cargas ligadas en la superficie de separación de los dieléctricos. Método de representaciones. Esfera dieléctrica en un campo homogéneo	

<b>§ 18. Energía del campo electrostático</b>	156
Energía de interacción de las cargas discretas. Energía de interacción durante la distribución continua de las cargas. Energía intrínseca. Densidad de la energía del campo. Energía del campo de las cargas superficiales. Energía de los conductores con carga. Energía del dipolo en un campo exterior. Energía de un cuerpo dieléctrico en un campo exterior	
<b>§ 19. Fuerzas en el campo eléctrico</b>	164
Naturaleza de las fuerzas. Fuerza que actúa sobre una carga puntual. Fuerza que actúa sobre una carga continuamente distribuida. Fuerza que actúa sobre el dipolo. Momento de fuerzas que actúa sobre el dipolo. Fuerzas volumétricas que actúan sobre un dieléctrico. Fuerzas que actúan sobre un conductor. Fuerzas superficiales que actúan sobre un dieléctrico. Fuerzas volumétricas que actúan sobre un dieléctrico comprimido. Cálculo de las fuerzas partiendo de la expresión para la energía	
Problemas	
<b>Capítulo 3. Dieléctricos</b>	181
<b>§ 20. Campo local</b>	181
Diferencia entre el campo local y el exterior. Cálculo de la intensidad del campo local	
<b>§ 21. Dieléctricos neutros</b>	184
Susceptibilidad dieléctrica molecular. Gases enrarecidos. Gases densos.	
<b>§ 22. Dieléctricos polares</b>	187
Dependencia entre la polarización y la temperatura. Campo de saturación. Gases rarificados. Interpretación cuántica de la polarización de los dieléctricos gaseosos polares. Gases densos. Líquidos polares. Cristales iónicos	
<b>§ 23. Sustancias ferroeléctricas</b>	192
Definición. Ciclo de histéresis. Punto (temperatura) de Curie. Mecanismo molecular de la polarización espontánea. Dominios dieléctricos. Sustancias antiferroeléctricas.	
<b>§ 24. Sustancias piezoeléctricas</b>	197
Propiedades de las sustancias piezoeléctricas. Efectos piezoeléctricos transversal y longitudinal. Mecanismo del efecto piezoeléctrico. Efecto piezoeléctrico inverso. Sustancias piroeléctricas	
Problemas	
<b>Capítulo 4. Corriente eléctrica continua</b>	201
<b>§ 25. Campo eléctrico en presencia de corrientes continuas</b>	201
Campo dentro del conductor. Cuestión sobre las fuentes del campo. Campo fuera del conductor. Cargas superficiales. Cargas volumétricas. Mecanismo de realización de la corriente continua. Variación del potencial a lo largo de un conductor con corriente	
<b>§ 26. Fem exteriores</b>	206
Esencia de las fem exteriores. Fem exterior mecánica. Pilas eléctricas (elementos galvánicos). Pila de Volta. Zona de acción de las fem exteriores. Principio de conservación de la energía. Polarización de la pila. Métodos de despolarización. Acumuladores	
<b>§ 27. Forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Trabajo que efectúa la corriente al pasar y potencia desarrollada</b>	212
Trabajo que se efectúa al pasar la corriente. Potencia. Forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Fuente de energía para el trabajo de la corriente eléctrica. Deducción de la ley de Ohm, partiendo del cuadro electrónico de la electroconductibilidad. Deducción de la ley de Joule—Lenz partiendo de la teoría electrónica de la electroconductibilidad. Defectos de la teoría clásica de la electroconductibilidad. Rasgos principales de la representación cuántica de la electroconductibilidad.	
<b>§ 28. Circuitos lineales. Leyes de Kirchhoff</b>	217
Circuito cerrado aislado. Circuitos derivados. Leyes de Kirchhoff.	

§ 29. Corrientes en un medio continuo Planteamiento del problema. Deducción de la fórmula. Condiciones de aplicación de (29.6). Electrodo coaxiales. Medio heterogéneo.	220
§ 30. Puesta a tierra de las líneas de transmisión Planteamiento del problema. Cálculo de la resistencia. Verificación experimental. Tensión de paso Problemas	224
<b>Capítulo 5. Electroconductibilidad</b>	229
§ 31. Electroconductibilidad de los metales Demostración de que en los metales no existe transferencia de la substancia por la corriente eléctrica. Ensayos de Tolman y Stewart. Sobre la teoría de las bandas. Dependencia entre la resistencia y temperatura. Efecto Hall. Magnetorresistencia. Movilidad de los electrones. Superconductividad. Temperatura crítica. Campo crítico. Efecto Meissner. Corriente superficial. Superconductores de primero y segundo género. Explicación de la superconductividad	229
§ 32. Electroconductibilidad de los líquidos Disociación. Cálculo de la electroconductibilidad. Dependencia entre la electroconductibilidad y la concentración. Dependencia entre la electroconductibilidad y la temperatura. Electrólitos	237
§ 33. Electroconductibilidad de los gases Corrientes automantenida y no automantenida. Corriente no automantenida. Densidad de la corriente de saturación. Característica de la corriente. Corriente automantenida. Acción de la carga espacial. Movilidad de las cargas. Comparación de las deducciones de (33.18) con el experimento	240
§ 34. Corriente eléctrica en el vacío Emisión termoiónica. Características de la nube electrónica. Densidad de la corriente de saturación. Ley de Child—Langmuir Problemas	244
<b>Capítulo 6. Campo magnético estacionario</b>	252
§ 35. Ley de la corriente total Planteamiento del problema. Forma integral de la ley de la corriente total. Forma diferencial de la ley de la corriente total. Verificación experimental de la ley de la corriente total. Deducción de la forma diferencial diferenciando directamente la fórmula de Biot—Savart	252
§ 36. Ecuaciones de Maxwell para un campo magnético estacionario Ecuación para $\text{div } \mathbf{B}$ . Ecuaciones de Maxwell. Tipo de problemas a resolver	257
§ 37. Potencial vectorial Posibilidad de introducir el potencial vectorial. Multiformalidad del potencial vectorial. Calibración del potencial. Ecuación para el potencial vectorial. Ley de Biot—Savart. Campo de la corriente elemental	260
§ 38. Campo magnético en presencia de magnéticos Definición. Mecanismos de la imanación. Imanación. Potencial vectorial en presencia de magnéticos. Densidad volumétrica de los flujos moleculares. Flujos moleculares superficiales. Cilindro homogéneamente imantado. Intensidad del campo magnético. Ecuación para la intensidad. Dependencia entre la imanación y la intensidad. Campo en el magnético. Imanes permanentes. Condiciones de frontera para los vectores de campo. Condición de frontera para la componente normal del vector $\mathbf{B}$ . Condición de frontera para la componente tangencial del vector $\mathbf{H}$ . Refracción de las líneas de fuerza magnética. Medición de la inducción del campo magnético. Campos de un solenoide infinito y de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado. Medición de la permeabilidad magnética, inducción e intensidad del	266

campo dentro de un magnético. Esfera de magnético en un campo homogéneo. Blindaje magnético

§ 39. Fuerzas en un campo magnético

Fuerzas que actúan sobre la corriente. Fuerza de Lorentz. Fuerza y momentos de fuerza que actúan sobre el momento magnético. Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos incompresibles

Problemas

Capítulo 7. Magnéticos

§ 40. Sustancias diamagnéticas

Precesión de Larmor. Diamagnetismo. Susceptibilidad diamagnética. Independencia de la susceptibilidad con respecto a la temperatura

§ 41. Sustancias paramagnéticas

Mecanismo de la imanación. Dependencia entre la susceptibilidad paramagnética y la temperatura. Momentos magnéticos de los átomos libres. Momentos magnéticos de las moléculas. Magnetismo determinado por los electrones libres. Resonancia paramagnética

§ 42. Sustancias ferromagnéticas

Definición. Curva de imanación y ciclo de histéresis. Curva de la permeabilidad magnética. Clasificación de los materiales ferromagnéticos. Interacción de los electrones. Teoría elemental del ferromagnetismo. Ley de Curie-Weiss. Anisotropía de la imanación. Dominios. Fronteras. Remagnetización. Antiferromagnetismo. Ferrimagnetismo. Resonancia ferromagnética

§ 43. Efectos giromagnéticos

Relación entre los momentos magnéticos y mecánicos. Experimento de Einstein-Haas. Efecto Barnett

Problemas

Capítulo 8. Inducción electromagnética y corrientes alternas casiestacionarias

§ 44. Inducción de las corrientes en conductores en movimiento

Aparición de fem en un conductor en movimiento. Generalización para un caso aleatorio. Generadores de corriente alterna. Principio de conservación de la energía

§ 45. Ley de la inducción electromagnética de Faraday

Definición. Esencia física del fenómeno. Conductor en movimiento en un campo magnético aleatorio. Aplicación de la inducción electromagnética a los generadores de corriente alterna

§ 46. Forma diferencial de la ley de la inducción electromagnética

Enunciación. Carácter no potencial del campo eléctrico inducido. Potenciales vectorial y escalar en un campo electromagnético alternativo. Multiformalidad de los potenciales, transformación de calibración.

§ 47. Energía del campo magnético

Energía del campo magnético de un circuito aislado con corriente. Energía del campo magnético de varios circuitos con corriente. Energía del campo magnético en presencia de magnéticos. Densidad de la energía del campo magnético. Inductancia. Campo de un solenoide. Energía del magnético en un campo magnético exterior. Cálculo de las fuerzas, partiendo de la expresión para la energía. Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos comprimibles. Energía del momento magnético en un campo exterior

§ 48. Circuitos de la corriente alterna casiestacionaria

Definición. Autoinducción. Conexión y desconexión de la fem continua en un circuito con resistencia e inductancia. Obtención de impulsos rectangulares de corriente. Capacidad en el circuito. Conexión y desconexión de la fem continua en un circuito con capacidad y resistencia. Circuito con capacidad, inductancia, resistencia y fuente

283

290

290

295

300

308

313

318

320

323

338

de fem exteriores. Corriente alterna. Diagramas vectoriales. Reglas de Kirchhoff. Acoplamiento en serie y en paralelo de las impedancias. Métodos de corrientes de contorno	
§ 49. Trabajo y potencia de la corriente alterna	349
Potencia instantánea. Potencia media. Valores efectivos de la intensidad de la corriente y de la tensión. Factor de potencia. Motores eléctricos. Motores sincrónicos. Motores asíncrónicos. Creación de un campo magnético giratorio. Adaptación de la carga al generador. Corrientes de Foucault	
§ 50. Resonancias en el circuito de corriente alterna	359
Resonancia en serie. Resonancia en paralelo. Circuito oscilante.	
§ 51. Circuitos con inducción mutua	364
Papel de la inducción mutua. Ecuaciones para el sistema de conductores, teniendo en cuenta la autoinducción e inducción mutua. Caso de dos circuitos. Transformador. Diagrama vectorial de la marcha en vacío del transformador. Diagrama vectorial del transformador cargado. Autotransformador. Transformador como elemento del circuito. Transformador real.	
§ 52. Corriente trifásica	370
Definición. Obtención de la corriente trifásica. Conexión en estrella de los devanados del generador. Conexión en delta de los devanados del generador. Conexión de las cargas. Obtención de un campo magnético en rotación	
§ 53. Efecto pelicular	374
Esencia del fenómeno. Cuadro físico de la aparición. Teoría elemental. Grosor de la capa pelicular. Dependencia entre la resistencia óhmica del conductor y la frecuencia. Dependencia entre la inductancia del conductor y la frecuencia. Temple de los metales con corrientes de alta frecuencia. Efecto pelicular anómalo	
§ 54. Cuadripolos	379
Definición. Ecuaciones. Teorema de la reciprocidad. Resistencia del cuadripolo. Cuadripolos elementales. Resistencias de entrada y de salida. Relación de transferencia	
§ 55. Filtros	383
Definición. Filtro de paso bajo. Filtro de paso alto. Cadena de filtros. Filtro de banda.	
§ 56. Betatrón	386
Destinación. Principio de funcionamiento. Condición de betatrón. Estabilidad radial. Estabilidad vertical. Oscilaciones de betatrón. Límite de energías que se logran en el betatrón. Problemas	
<b>Capítulo 9. Ondas electromagnéticas</b>	393
§ 57. Corriente de desplazamiento	393
Esencia del proceso. ¿Por qué la velocidad de variación del vector de desplazamiento se denomina densidad de corriente? Ecuación de Maxwell con corriente de desplazamiento. Naturaleza relativista de la corriente de desplazamiento	
§ 58. Sistema de ecuaciones de Maxwell	398
Sistema de ecuaciones de Maxwell. Sentido físico de las ecuaciones. Condiciones de aplicación de las ecuaciones. Completitud y compatibilidad del sistema de ecuaciones	
§ 59. Principio de conservación de la energía del campo electromagnético. Flujo de energía	401
Enunciación. Flujo de energía	
§ 60. Movimiento de la energía electromagnética a lo largo de las líneas de transporte	403
Mecanismo de compensación de las pérdidas de energía en calor de Joule. Movimiento de la energía a lo largo del cable. Línea de transporte de la corriente alterna. Ecuaciones para la intensidad de la corriente y la tensión. Impedancia característica y constante de propagación. Resistencia característica. Velocidad de propagación. Reflexión	

§ 61. Emisión de las ondas electromagnéticas Ecuación para el potencial vectorial. Elección de la función de calibración. Ecuación para el potencial escalar. Solución de la ecuación de onda. Potenciales de avance y retardados. Dipolo hertziano. Potencial escalar. Potencia vectorial. Campos eléctrico y magnético. Campo del oscilador en la zona de onda. Potencia emitida por el dipolo. Emisión de un cuadro con corriente. Emisión de un electrón en movimiento acelerado. Fuerza de deceleración por radiación	410
§ 62. Propagación de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos Ondas planas. Ecuaciones para los vectores del campo de la onda. Vectores de onda. Velocidad de fase (de propagación). Longitud de onda. Propiedades de las ondas. Densidad del flujo de energía	424
§ 63. Propagación de las ondas electromagnéticas en medios conductores Constante dieléctrica compleja. Profundidad de penetración. Causa física de la absorción. Interpretación del efecto pelicular. Velocidad de fase y longitud de onda en un medio conductor. Relación entre las fases de las oscilaciones de los vectores del campo. Relación entre las amplitudes de los vectores del campo	428
§ 64. Invariancia de la onda plana Transformación de los campos. Invariantes de las transformaciones del campo electromagnético. Análisis de los invariantes del campo	432
§ 65. Presión de las ondas electromagnéticas. Impulso del fotón Mecanismo de surgimiento de la presión. Presión. Impulso del tren de ondas electromagnéticas. Densidad volumétrica del impulso de las ondas electromagnéticas. Impulso del fotón	434
§ 66. Guías de ondas y resonadores Sección del circuito. Sección del conductor. Bobina de inductancia. Condensador. Radiación. Guías de ondas. Guía de ondas rectangular. Frecuencia límite. Velocidad de fase. Longitud de onda en el guía de ondas. Aplicación del método de representaciones al análisis. Carácter discreto de las direcciones de propagación de las ondas planas que provienen del sistema de radiadores. Longitud de onda de corte. Longitud de onda y velocidad de fase en el guía de ondas. Velocidad de grupo. Relación entre las velocidades de fase y de grupo. Campo magnético. Clasificación de las ondas en el guía de ondas. Resonadores. Problemas	437
<b>Capítulo 10. Fluctuaciones y ruidos</b>	449
§ 67. Fluctuaciones en un contorno con corriente. Ruido de resistencia Teorema de la equipartición de la energía respecto al grado de libertad. Aplicación del teorema de equipartición de energía respecto a un galvanómetro de espejo. Fluctuaciones en el circuito oscilante. Distribución de las fluctuaciones respecto a las frecuencias. Ruido de resistencia. Generador equivalente de ruido. Potencia del ruido del generador. Sensibilidad máxima. Temperatura equivalente de ruido del receptor. Coeficiente de ruido. Relación señal/ruido	449
§ 68. Ruido de agitación térmica y ruido de corriente Fuente del ruido de agitación térmica. Distribución del ruido según las frecuencias. Ruido de corriente. Métodos de reducción del ruido	457
<b>Apéndices</b>	461
Índice alfabético de materias	463

## Prefacio

El presente curso refleja el nivel actual de la ciencia y la enseñanza, asimismo tiene en cuenta las variaciones en el programa de la física general.

Al exponer la teoría de la electricidad y el magnetismo, es posible basarse desde el comienzo en la naturaleza relativista del campo magnético y representar los campos magnético y eléctrico en su relación mutua y unidad, dado que las ideas principales de la teoría de la relatividad se conocen del curso de la mecánica. Por esta razón, la exposición del material en dicho libro no comienza por la electrostática, sino por el análisis de los conceptos principales, relacionados con las cargas, fuerzas, y con el campo electromagnético. Además, ciertos conocimientos sobre las leyes de los fenómenos electromagnéticos que posee el estudiante del curso de física de la escuela secundaria, se transforman en un conocimiento científico moderno, y la argumentación de la teoría se analiza a la luz del estado actual de los principios experimentales del electromagnetismo, considerando los límites de la posibilidad de aplicación de los conceptos a utilizar. Ello conduce a veces a la necesidad de rebasar los márgenes de la teoría del electromagnetismo en el sentido estricto de la palabra. Por ejemplo, la cuestión sobre la argumentación experimental de la ley de Coulomb para grandes distancias no puede exponerse sin mencionar su enlace con la masa en reposo nula de los fotones. Y a pesar de que este problema se expone total y estrictamente en la electrodinámica cuántica, es racional presentar sus principales rasgos generales en la teoría clásica del electromagnetismo. Ello creará en el estudiante una idea general sobre el problema y la relación del material en cuestión con el de los cursos superiores. La última circunstancia tiene un significado bastante considerable desde el punto de vista metodológico.

La tarea primordial del curso es la exposición de la argumentación experimental de la teoría del electromagnetismo y la enunciación de la teoría en forma local, o sea, en forma de relaciones entre las magnitudes físicas en un mismo punto espacial-temporal. En la mayoría de los casos estas relaciones poseen forma diferencial, pero lo esencial es su carácter local y no su forma diferencial. Por esta razón, la meta final del curso son las ecuaciones de Maxwell como resultado de la generalización y enunciación matemática de las regularidades establecidas de manera experimental. Por consiguiente, el método principal de exposición es inductivo. En cambio, ello no excluye, sino que supone

su combinación con el método deductivo de exposición conforme al principio del conocimiento científico de las regularidades físicas. Por eso las ecuaciones de Maxwell aparecen en el libro no sólo como consecuencia de la enunciación matemática de las uniformidades, establecidas durante el experimento, sino también como instrumento para investigar dichas regularidades.

La elección de hechos experimentales que pueden tomarse como argumentación experimental de la teoría, es multiforme. En el libro se expone la argumentación de la teoría del electromagnetismo sin la teoría de la relatividad y con ésta. La última argumentación es más preferible, ya que en ella la teoría de la relatividad aparece como teoría general de espacio-tiempo, sobre la cual deben basarse cualesquiera teorías físicas. Semejante argumentación se ha hecho posible en los márgenes del nuevo programa de la física general.

Como parte esencial de la teoría se plantea la cuestión de los límites de su aplicación y la esfera de empleo de los conceptos y modelos que se usan en la teoría. Estos problemas expuestos en el libro tienen un valor primordial. En particular, el análisis de la interacción de fuerza de las cargas ya en los márgenes de la teoría clásica, sin utilizar ningunas representaciones clásicas, muestra que la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo no puede aplicarse al análisis de la interacción de partículas con carga aisladas.

*A. Matvéev*

## Introducción

En la actualidad en la física se conocen cuatro tipos de interacción de los objetos materiales: gravitacional, fuerte, débil y electromagnética. Estas interacciones se manifiestan en diversas escalas espaciales y se caracterizan por su intensidad.

La interacción gravitacional se nota sólo entre los cuerpos de escalas astronómicas. Las interacciones fuertes aparecen sólo entre partículas determinadas, al acercarse a distancias bastante pequeñas ( $10^{-16}$  m). La débil se efectúa durante la transformación mutua de ciertas clases de partículas. Alejando las partículas una de la otra, dicha interacción se hace insignificante. Solamente las interacciones electromagnéticas se manifiestan en las escalas espaciales, en las que transcurre nuestra vida cotidiana. Prácticamente todas las «fuerzas» que determinan los fenómenos físicos en nuestro medio ambiente diario, a excepción de la fuerza de gravedad, son a fin de cuenta, fuerzas electromagnéticas. Está claro que todas las relaciones y fenómenos multiformes, determinados por la interacción electromagnética, no pueden describirse mediante las leyes de la electrodinámica, ya que en cada nivel del fenómeno existen sus rasgos específicos y regularidades que no se reducen a las regularidades de otro nivel. Sin embargo, las interacciones electromagnéticas en todos los niveles son, en cierto sentido, una relación elemental, con cuya ayuda se forma toda la cadena de enlaces. Esto define el significado de los fenómenos electromagnéticos.

La teoría de los fenómenos electromagnéticos tiene una importancia extraordinariamente grande. Es la primera teoría invariante desde el punto de vista relativista. Desempeñó un papel decisivo en la aparición y argumentación de la teoría de la relatividad y fue aquel «polígono», en el que se sometieron a prueba muchas de las nuevas ideas. La electrodinámica cuántica es la teoría cuántica, que está elaborada mejor que todas y cuyas predicciones concuerdan muy bien con el experimento, pese a que hasta hoy día aún tiene contradicciones internas y no está acabada. Es muy esencial la importancia del electromagnetismo desde el punto de vista de la filosofía general y de la concepción del mundo. Por ejemplo, en los márgenes de los fenómenos electromagnéticos se manifiestan de manera precisa las peculiaridades de la forma de campo de la existencia de la materia, se observan bien las transformaciones mutuas de sus diversas formas y modificaciones mutuas de distintas formas de energía.

En el libro se exponen dos caminos para motivar la teoría. Al argumentar sin la teoría de la relatividad a título de principios experimentales de la teoría

de la electricidad y el magnetismo, se tomaron la invariación de la carga elemental, la ley de Coulomb, el principio de superposición para el campo eléctrico, la ley de Biot—Savart, el principio de superposición para el campo magnético, la fuerza de Lorentz, la ley de inducción electromagnética de Faraday, las corrientes de desplazamiento de Maxwell, el principio de conservación de la carga y el principio de conservación de la energía. Al argumentar con la teoría de la relatividad, la ley de Biot—Savart, el principio de superposición para el campo magnético y la fuerza de Lorentz ya no desempeñan el papel de hechos experimentales independientes en la enunciación de la teoría. El segundo camino en demostrar la teoría de la electricidad y el magnetismo no se expone en forma de vía principal, sino como complementaria, elegida con el fin de simplificar lo máximo posible la cuestión matemática del asunto. Este camino incluye en sí las siguientes etapas.

La naturaleza relativista del campo magnético se muestra en el § 8, donde se deduce la fórmula de interacción para las corrientes directas que pasan por conductores paralelos infinitamente largos y se obtiene la fuerza de Lorentz, partiendo de la interacción eléctrica de las cargas. La interpretación respecto al campo de estos resultados permite hallar la inducción del campo magnético de la corriente que pasa por un conductor rectilíneo infinitamente largo. Ahora el principio de superposición para el campo magnético es consecuencia del principio de superposición para el campo eléctrico. En el § 35 se efectúa el paso a la inducción del campo magnético de corrientes arbitrarias y la deducción de las ecuaciones correspondientes. En el mismo se utiliza de manera esencial la independencia entre las correlaciones locales y los valores de las magnitudes físicas en otros puntos. Luego en el § 37 se deduce la ley de Biot—Savart y de esta manera se finaliza el análisis del enlace, que existe en los márgenes de las representaciones relativistas sobre el espacio y tiempo, entre la invariación de una carga eléctrica elemental, la ley de Coulomb, el principio de superposición para el campo eléctrico y la ley de Biot—Savart, fuerza de Lorentz y el principio de superposición para el campo magnético.

## Cargas, campos, fuerzas

La carga es la fuente y el objeto de acción del campo electromagnético.

El campo es el portador material de las interacciones electromagnéticas de las cargas, es la forma de la materia.

La fuerza es la medida cuantitativa de la intensidad de interacción de las cargas.

Las cargas, los campos y las fuerzas existen en una relación indisoluble con el espacio, tiempo y el movimiento de la materia.

Su relación mutua no puede ser comprendida sin tener en cuenta el enlace con el espacio, tiempo y movimiento.

### § 1. Portadores microscópicos de cargas eléctricas

*Se describen las propiedades de los portadores microscópicos principales de las cargas eléctricas. Se examina la distribución de la carga eléctrica en el protón y neutrón y se analiza su sentido físico.*

**Clasificación.** Por portadores microscópicos de las cargas se comprenden las partículas y los iones con carga, tanto positiva, como negativa. Según el valor numérico, la carga puede superar sólo un número entero de veces a la elemental:

$$|e| = 1,6021892(46) \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (1.1)$$

Hasta hoy día no se han descubierto portadores microscópicos con carga fraccionaria, a pesar de los considerables esfuerzos experimentales (véase el § 3).

Se conocen unas 200 partículas y una enorme cantidad de iones, átomos y moléculas. La mayor parte de las partículas, después de aparecer, existen un tiempo corto, al terminar el cual se desintegran en otras partículas, o sea, *las partículas poseen un tiempo finito de vida*. En la mayoría de los casos éste es sumamente pequeño: ínfimas partes de segundo. *Existe sólo una pequeña cantidad de partículas cargadas con tiempo infinito de vida. Estas son el electrón, el protón y sus antipartículas.* Los núcleos de los átomos constan de protones, mientras que la capa electrónica de los átomos contiene electrones. Precisamente son éstas las partículas que determinan casi todos los fenómenos que se estudian en el curso de electricidad y magnetismo. Además de los protones, los núcleos constan de neutrones, que son eléctricamente neutros y su tiempo de vida en la composición de los núcleos es ilimitado. En cambio, fuera de los núcleos ellos viven, en término medio, unos 17 minutos, desintegrándose en protones, electrones y antineutrino.

La carga de los iones se determina por el hecho de que en la capa electrónica del correspondiente átomo o molécula falta un electrón o varios (iones positivos) o, por el contrario, sobran (iones negativos). Por eso la cuestión sobre los iones como portadores microscópicos de cargas se reduce a la cuestión sobre las cargas de los electrones y protones.

**Electrón.** El electrón es el portador material de la carga negativa elemental. *Por lo general, se considera que el electrón es una partícula puntiforme sin estructura, o sea, toda la carga eléctrica del electrón está concentrada en un punto. Semejante representación es intrínsecamente contradictoria, ya que la energía del campo eléctrico, creado por la carga puntual, es infinita y, por lo tanto, también debe ser infinita la masa inerte de la carga puntual, lo que contradice al experimento, puesto que la masa del electrón es igual a  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg. Sin embargo hay que conformarse con esta paradoja por no haber otro punto de vista más satisfactorio y menos contradictorio respecto a la estructura (o ausencia de ésta) del electrón.* La dificultad en comprender la masa en reposo infinita se supera con éxito, calculando distintos efectos haciendo uso de la **renormalización de la masa**, cuya esencia consiste en lo siguiente. Sea que se necesite calcular cierto efecto, con la particularidad de que en el cálculo participa la masa en reposo infinita. La magnitud que se obtiene como consecuencia de este cálculo, es infinita y, por consiguiente, carece de sentido físico. Para obtener un resultado físicamente razonable, se lleva a cabo otro cálculo más en el que están todos los factores, a excepción de los del fenómeno en cuestión. En el último cálculo participa también la masa en reposo infinita, por lo que dicho cálculo conduce a un resultado infinito. La sustracción del primer resultado infinito del segundo conduce a la reducción mutua de las magnitudes infinitas, relacionadas con la masa en reposo, mientras que la magnitud remanente resulta ser finita y caracteriza el fenómeno en cuestión. Así se logra librarse de la masa en reposo infinita y obtener resultados físicamente razonables, confirmados por el experimento. Este procedimiento se utiliza, por ejemplo, al calcular la energía del campo eléctrico (véase el § 18).

**Protón.** El portador de la carga elemental positiva es el protón. Este, a diferencia del electrón, no se considera partícula puntiforme: la distribución de la carga eléctrica dentro del protón está bien estudiada experimentalmente. El método de análisis es semejante al que empleó Rutherford a principios de este siglo al investigar la estructura de los átomos, como consecuencia de lo cual fue descubierta la existencia del núcleo. Se analiza la colisión de los electrones con el protón. Si nos imaginamos el protón como una distribución esféricamente simétrica de la carga en un volumen finito, la trayectoria del electrón, que no atraviesa dicho volumen, no depende de la ley de distribución de la carga, es exactamente la misma como si toda la carga del protón estuviese concentrada en su centro. *Las trayectorias de los electrones, que pasan a través del volumen del protón, dependen del tipo concreto de distribución de la carga en él, y pueden ser calculadas.* Por esta razón, al realizar una cantidad suficiente de observaciones respecto a los resultados de las colisiones entre los electrones y protones, puede deducirse la distribución de la carga dentro del protón. Ya que se trata de zonas sumamente pequeñas del espacio, para los experimentos se tuvo que hacer uso

de electrones de energías muy altas. Esta necesidad está dictada por la teoría cuántica. Según las relaciones de De Broglie, las partículas materiales poseen propiedades ondulatorias, con la particularidad de que la longitud de onda de la partícula es inversamente proporcional al impulso. Para «palpar» cierta pieza espacial, es indispensable, por lo visto, utilizar partículas, cuyas longitudes de onda sean inferiores a las correspondientes dimensiones espaciales de la pieza, lo que corresponde a impulsos suficientemente grandes. Por esta razón, la investigación de la estructura electromagnética del protón se hizo posible sólo después de confeccionar aceleradores electrónicos de energías de varios miles de millones de electrón-voltios. La fig. 1, *a* representa el resultado de estos experimentos. Por el eje de ordenadas no se traza la densidad  $\rho$  de la carga a la distancia  $r$  respecto al centro del protón, sino que la magnitud  $4\pi r^2 \rho$  que representa la densidad de la carga, sumaria según todas las direcciones, a la distancia  $r$  del centro, ya que  $4\pi r^2 \rho(r) dr$  es la carga total en la capa esférica de grosor  $dr$ . En la figura se ve que *prácticamente toda la carga del protón está concentrada en una esfera de radio  $\approx 10^{-15}$  m. Después del primer máximo la magnitud  $4\pi r^2 \rho(r)$  no decrece monótonamente, sino que existe un máximo más.*

**Neutrón.** Semejantes experimentos fueron realizados también respecto a la dispersión de los electrones en neutrones, que mostraron que el neutrón posee estructura electromagnética, y no es una partícula puntiforme, eléctricamente neutra. La fig. 2, *a* ilustra la distribución de la carga eléctrica dentro del neutrón.

Es obvio que *cerca del centro del neutrón se sitúa la carga positiva y más lejos de él, la carga negativa.* Las áreas, delimitadas por las curvas y el eje de abscisas, son iguales, por lo tanto, la carga positiva es igual a la negativa, y en total el neutrón resulta ser eléctricamente neutro. *Las dimensiones de las zonas del protón y el neutrón en las que se concentran las cargas eléctricas, son aproximadamente iguales.*

¿Qué significa la distribución continua de la carga elemental eléctrica? El área, limitada por la curva y el eje de abscisas (véase la fig. 1, *a*) es numéricamente igual a la carga del protón y el área sombreada, a la carga dentro del protón en una capa esférica de grosor  $dr$  a la distancia  $r$  respecto al centro del protón. Está claro que esa carga es sólo una parte pequeña de la carga total del protón, o sea, una parte pequeña de la carga elemental. Sin embargo, *en la naturaleza no se logró encontrar objetos físicos, cuya carga fuese igual a cierta parte fraccionaria de la carga elemental.* Se pregunta: ¿qué sentido tiene la afirmación de que en el volumen  $4\pi r^2 dr$  se halla una parte pequeña de la carga elemental?

En la actualidad se supone que el protón consta de dos quarks puntuales con una carga  $+\frac{2}{3} |e|/3$  y uno con carga  $-|e|/3$  (véase la fig. 1, *b*). Los quarks en el protón están en movimiento. Su tiempo relativo de estancia a diversas distancias respecto al centro del protón puede representarse eficazmente en forma de extensión de la carga por el volumen del protón, como muestra la fig. 1, *a*. El neutrón consta de dos quarks con carga  $-|e|/3$  y un quark con carga  $+\frac{2}{3} |e|/3$  (fig. 2, *b*). La distribución de la carga en él (fig. 2, *b*) se explica de la misma manera.

A pesar de todos los grandes esfuerzos experimentales, los quarks en estado libre no han sido detectados. Hoy día se considera que no se les puede descubrir, en principio, en estado libre, ya que para ello es necesario gastar una energía

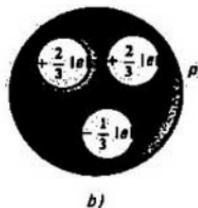
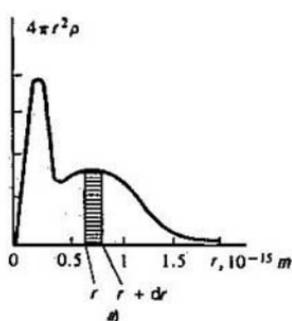


Fig. 1  
Estructura electromagnética del protón. Casi toda la carga del protón está concentrada dentro de una esfera de radio  $r_0$

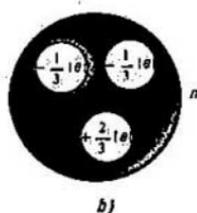
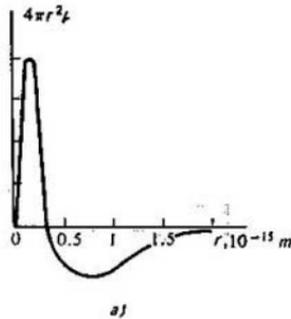


Fig. 2  
Estructura electromagnética del neutrón. En las proximidades del centro del neutrón se ubica la carga positiva, más lejos del centro, la negativa. Las cargas positiva y negativa se compensan mutuamente, por lo que en total el neutrón es eléctricamente neutro

infinita, pero, no obstante, dentro del protón ellos existen. Semejante suposición permite explicar muchos fenómenos y por eso los físicos la toman como una hipótesis probable.

*No existe una demostración experimental directa de la presencia de los quarks dentro del protón.*

**Spin y momento magnético.** Las partículas, además de carga, pueden poseer un momento de impulso o spin. *El spin no se determina por la rotación de la partícula*, ya que para semejante explicación, siendo las proposiciones sobre las dimensiones de las partículas razonables, se tendría que admitir la existencia de velocidades lineales durante la rotación que superan a la velocidad de la luz,

lo que es imposible. Por esta razón, *el spin se considera como una propiedad de la partícula.*

La existencia del momento magnético en una partícula con carga está relacionada con el spin. Dicho momento tampoco puede explicarse por el movimiento de la carga y se considera como una propiedad inicial.

En la electrodinámica clásica el momento magnético puede sólo ser consecuencia del movimiento de las cargas por trayectorias cerradas. Por eso el momento magnético de spin de las partículas no puede describirse en los márgenes de la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo. Sin embargo, el campo magnético, condicionado por los momentos magnéticos de spin, puede, si hay necesidad, explicarse desde el punto de vista fenomenológico. Por regla general, la intensidad de este campo es muy pequeña. Sólo habiendo imanes permanentes, alcanza valores grandes. La teoría clásica no está en condiciones de describir el mecanismo de aparición de este campo, mientras que el propio campo fuera de los imanes permanentes se explica totalmente por la teoría clásica (véase el § 38).

El electrón se considera una partícula puntiforme, a pesar de que eso provoca dificultades. Hasta el momento no se logró determinar experimentalmente la estructura electromagnética interior del electrón.

La distribución continua de la carga eléctrica elemental no está relacionada con su división en partes, sólo significa que se tiene en cuenta la ley de movimiento de esta carga en el espacio.

No existe carga alguna inferior a la elemental. ¿Cuál es el sentido de la idea sobre la distribución de la carga en el protón si su carga total es igual a la elemental?

¿Con qué dificultad principal está relacionada la representación del electrón como una partícula puntiforme? ¿Mediante cuál procedimiento artificial se supera dicha dificultad?

## § 2. Cuerpos con carga. Electrización

*Se aclara la naturaleza física de los procesos que conducen a la electrización de los cuerpos al hacer contacto. Se comunican ciertas nociones sobre el espectro energético de los electrones en los sólidos.*

**Trabajo de salida termoelectrónico.** Las fuerzas que retienen los átomos neutros en la molécula y las moléculas neutras en el sólido, se examinan en el curso de la física molecular. El mismo hecho de existencia de los sólidos testimonia sobre la existencia de fuerzas que retienen los electrones dentro del sólido. Para extraer de éste un electrón es necesario gastar cierto trabajo contra las fuerzas que retienen los electrones en el interior del sólido. Supongamos que un sólido junto con el espacio inmediato a él, está cerrado en una envoltura adiabática y se mantiene a una temperatura constante  $T$ . A causa del movimiento térmico y la distribución de los electrones conforme a las velocidades, en el interior del cuerpo se hallarán electrones, cuya energía cinética es suficiente para superar las fuerzas que los re-

tienen dentro del cuerpo, y para rebasar sus límites. Merced a ello en la superficie del cuerpo se forma un «gas» de electrones. En su movimiento, los electrones de este «gas» se aproximan a la superficie del sólido que los coge hacia dentro. El equilibrio termodinámico se logra cuando el número de electrones que abandonan el volumen del cuerpo es igual, en término medio, a la cantidad de electrones que ingresan en el volumen del cuerpo desde la capa del «gas» electrónico, inmediata a su superficie. En este caso la concentración de electrones en la superficie del cuerpo tiene un valor determinado  $n_0$ . Este gas electrónico no es degenerado y su densidad puede representarse como la distribución de Boltzmann:

$$n_0 = A \exp [-\Phi/(kT)], \quad (2.1)$$

donde  $A$  depende sólo de  $T$  y  $\Phi$  es el trabajo de salida termoiónico.

Según el sentido de la distribución de Boltzmann, el trabajo de salida termoiónico es en sí la diferencia de energías del electrón fuera del sólido y dentro de éste. En cambio, dentro del sólido los electrones poseen distintas energías. Por eso sólo analizando el espectro energético de los electrones, se pone evidente de qué energía se trata al determinar  $\Phi$ .

**Espectro energético de los electrones.** Las leyes de movimiento de las micro-partículas se exponen en la mecánica cuántica, que permite calcular el espectro energético de los electrones si se conoce la ley de variación de su energía potencial. Estos cálculos se complican por la necesidad de tomar en consideración también la interacción de los electrones entre sí. La solución exacta de semejante género de problemas supera las posibilidades incluso de los ordenadores modernos y es poco probable que sean resueltos en el futuro. Pero tampoco hay necesidad de eso, ya que se logró elaborar los métodos de solución aproximada del problema que satisface bastante bien las demandas prácticas. Lo importante es testificar que el espectro existe y es discreto para los electrones, encerrados en una región finita del espacio. El espectro determina diversas propiedades del cuerpo, cuyo estudio experimental permite hacer deducciones sobre sus peculiaridades. Por lo tanto, el espectro energético puede examinarse tanto desde el punto de vista teórico, como experimental.

El espectro energético de los electrones en los sólidos se ha investigado con suficientes detalles y sus singularidades principales se reducen a lo siguiente. En un átomo aislado los niveles energéticos forman un conjunto discreto de energías.

La fig. 3 muestra el esquema ideal de niveles de un átomo hidrogenoide. En forma analítica la energía del electrón en el  $n$ -ésimo nivel se da mediante la fórmula

$$W_n = -A/n^2,$$



Fig. 3. Espectro energético del átomo de hidrógeno

donde  $A$  es una magnitud positiva que se expresa por medio de una carga elemental, la masa del núcleo y del electrón, asimismo por la constante de Planck. En el nivel  $n = 1$  los electrones poseen energía mínima. La distancia entre los niveles es de varios electrón-voltios, con la particularidad de que estas distancias disminuyen al aumentar  $n$ .

Dado que los electrones se someten a la estadística de Fermi—Dirac, en cada estado cuántico puede encontrarse sólo un electrón. El estado cuántico no se caracteriza únicamente por la energía. En el átomo hidrogenoide se determina también por el momento de impulso (o impulso cinético) del electrón durante el movimiento orbital en el átomo, su orientación en el espacio y por la orientación del spin del electrón. Estas últimas características son también cuantificadas, o sea, poseen un conjunto discreto de valores numéricos. En total resulta que en cada nivel energético hay varios electrones y no uno. Como muestran los cálculos, en el nivel  $n = 1$  pueden hallarse sólo dos electrones que se diferencian por la orientación del spin (existen sólo dos orientaciones del spin). El momento de impulso en este nivel puede ser únicamente nulo. En el siguiente nivel  $n = 2$  el momento de impulso del electrón, además del valor nulo, puede tener otro valor más, diferente de cero. Siendo el momento de impulso nulo, no tiene sentido hablar sobre su orientación en el espacio, a diferencia de cuando el valor de dicho momento no es nulo. Para  $n = 2$  tenemos tres orientaciones posibles. Así pues, en el nivel  $n = 2$  hay en total cuatro estados cuánticos según el valor absoluto del momento cinético y sus orientaciones en el espacio. En cada uno de los estados el spin del electrón puede estar orientado de dos maneras, por lo tanto en el nivel energético  $n = 2$  existen en total ocho diferentes estados cuánticos. Ello significa que en este nivel puede haber nada más que ocho electrones. Resulta que en los niveles posteriores pueden hallarse 18, 32, 50, etc. electrones. Puesto que el estado estable del átomo (estado fundamental) corresponde al estado con energía mínima, los niveles energéticos deben llenarse, comenzando desde el nivel  $n = 1$ . El siguiente nivel comienza a rellenarse sólo después que el nivel anterior esté totalmente ocupado por los electrones. El conjunto de electrones con cierto valor de  $n$  se denomina capa atómica. Las capas se acostumbra a designarlas con las letras  $K, L, M, N$ , etc. según el siguiente esquema:

	1	2	3	4	5
Denominación de la capa	$K$	$L$	$M$	$N$	$O$

Por ejemplo, en vez de decir «el electrón en el nivel  $n = 2$ », se dice «el electrón de la capa  $L$ », etc.

La situación cambia si los átomos forman la red cristalina del sólido. La propia existencia de la red cristalina testimonia el hecho de que entre los átomos hay una interacción que determina precisamente la aparición de la red. Por consiguiente, los átomos ya no se pueden considerar aislados. Toda la red cristalina debe estudiarse como un sistema único y hay que hablar sobre los niveles energéticos de este sistema. Resulta que el espectro energético de la red cristalina está ligado con el espectro energético de los átomos aislados por medio de una relación sencilla, a saber: como consecuencia de la interacción entre los átomos, cada uno de los niveles energéticos  $n = 1, 2, \dots$  se desintegran en una gran cantidad

de subniveles, situados muy cerca uno de otro, en los cuales pueden ubicarse todos los electrones que se encontraban inicialmente en el nivel correspondiente de los átomos aislados. Por ejemplo, la capa  $K$  de un átomo aislado está ocupada por dos electrones. Si los átomos se hallan en una red cristalina que consta de  $N_0$  átomos, el nivel  $n = 1$  se desintegra en  $N_0$  subniveles, en cada uno de los cuales pueden hallarse dos electrones con diversa orientación de los spines, es decir, en total en la red cristalina se forman  $2N_0$  diferentes estados cuánticos ocupados por  $2N_0$  electrones, pertenecientes anteriormente a las capas  $K$ .

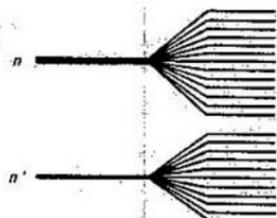


Fig. 4  
Esquema de formación de las bandas de energía

El conjunto de niveles energéticos, situados a poca distancia y formados como consecuencia de la desintegración de cierto nivel energético de un átomo aislado, se denomina banda de energía o simplemente banda. Se habla sobre la banda  $K$ , banda  $L$ , etc. según su correspondencia a las capas  $K$ ,  $L$ , . . . de los átomos aislados. El diagrama de formación de las bandas se muestra en la fig. 4. Como ya se había dicho, la distancia entre los diversos niveles dentro de las bandas es extremadamente pequeña, mientras que entre diferentes bandas ella permanece considerable e igual, según el orden de la magnitud, a la distancia entre los niveles energéticos de los átomos aislados. Los intervalos entre las bandas energéticas que no pueden ocuparse por los electrones, se denominan zonas prohibidas, ya que los electrones no pueden hallarse en ellas.

Así pues, el espectro energético de los electrones en el sólido consta de zonas prohibidas y permitidas. La distancia entre los niveles energéticos dentro de cada una de las zonas permitidas es excesivamente pequeña en comparación con la anchura de las zonas prohibidas. El esquema examinado de los niveles energéticos de un átomo aislado es idealizado. Si se tiene en cuenta con mayor plenitud la interacción de los electrones, resulta que la energía de los electrones en la capa no es la misma, sino que depende, por ejemplo, del momento de impulso (momento cinético). La energía del electrón con un valor de  $n$  más elevado puede ser no superior, sino inferior a la energía del electrón del nivel anterior. Como consecuencia, varía la sucesión del relleno de las capas por los electrones. Respectivamente cambia también la estructura de las bandas energéticas del cristal y su relleno por los electrones. En cambio, el carácter general del espectro del sólido no varía.

**Energía de Fermi.** El estado principal del sólido es el estado con energía mínima. Por esta razón, a la temperatura de 0 K, comenzando por nivel con energía mínima, todos los estados de los electrones deben rellenarse sucesivamente sin intervalos. En vista de que el número de electrones es finito, existe un nivel relleno finito con energía máxima, mientras que los siguientes niveles resultan estar libres. Así pues, a 0 K existe una frontera brusca entre los niveles libres y rellenos.

A temperatura, diferente de 0 K, esta frontera es borrosa ya que, como consecuencia del movimiento térmico, la energía de ciertos electrones resulta mayor

que la energía límite a  $T = 0$  K, y la de otros electrones, inferior. De esta manera, algunos niveles de energía que a  $T = 0$  K eran libres, ahora están rellenos y al contrario, los que estaban rellenos, resultan libres. *La anchura de la región de transición entre los niveles de energía que están totalmente rellenos y los que están completamente libres, tiene el orden  $kT$ .* La distribución energética de los electrones en este caso se caracteriza por la función de Fermi—Dirac:

$$f(E, T) = \{1 + \exp[(E - \mu)/(kT)]\}^{-1}, \quad (2.2)$$

donde  $E$  es la energía del electrón y  $\mu$ , la energía de Fermi, que depende de la temperatura. La energía de Fermi se determina como la energía para la cual la función de Fermi—Dirac es igual a  $\frac{1}{2}$ .

Los conceptos de energía de Fermi son muy evidentes para los metales. *En este caso la energía de Fermi es la energía de los electrones en el nivel relleno a  $T = 0$  K y más arriba del cual los niveles están libres.* Esta definición es exacta para  $T = 0$  K y es suficientemente precisa para todas las temperaturas cuando la distribución de Fermi es poco «borrosa» (para la mayoría de los metales esta afirmación es válida plenamente hasta las temperaturas de fusión y superiores).

*Para los dieléctricos la energía de Fermi corresponde a la mitad (está en el medio) de la zona prohibida (para  $T = 0$  K) que se encuentra más arriba de la banda totalmente rellena, en este nivel el electrón no puede encontrarse, es decir, la energía de Fermi no corresponde a la energía de cierto electrón real en el dieléctrico.* Pero ello, claro está, no disminuye su importancia para la descripción de las propiedades estadísticas de los electrones en los dieléctricos conforme a la fórmula (2.2).

Como muestra la teoría, el trabajo de salida termoiónico  $\Phi$  que participa en (2.1), está ligado con la energía  $\mu$  del nivel de Fermi mediante la relación

$$\Phi = E_0 - \mu, \quad (2.3)$$

donde  $E_0$  es la energía del electrón en reposo fuera del conductor en el vacío. Así pues,  $\Phi$  es igual al trabajo de desplazamiento del electrón desde el nivel de Fermi hasta fuera de los límites del sólido. Para los metales esta afirmación tiene un sentido real, mientras que para los dieléctricos es en cierto grado convencional, ya que en el nivel de Fermi no hay electrones reales. *En cambio en ambos casos es el trabajo de extracción del electrón del sólido, efectuado contra las fuerzas que retienen el electrón en el sólido.* La existencia del trabajo de salida se manifiesta, por ejemplo, en el efecto fotoeléctrico, cuando la energía del fotón que se absorbe en el metal, se transmite totalmente al electrón. El trabajo de salida puede determinarse según el límite fotoeléctrico de ondas largas. Por eso puede decirse que *los electrones dentro de un sólido se encuentran en un pozo de potencial de profundidad  $\Phi$ .* La fig. 5 muestra el aspecto de los pozos de potencial para los metales (a) y dieléctricos (b) (los niveles de energía, ocupados por los electrones, están rayados). El intervalo entre los niveles  $E_c$  (energía de conductancia) y  $E_v$  (energía de valencia) es zona prohibida. Es necesario señalar que *el trabajo de salida para los dieléctricos depende fuertemente de la pureza de la composición.* Incluso pequeñas cantidades de impurezas pueden cambiar esencialmente el trabajo de

salida. Además, el trabajo de salida depende también de las más insignificantes contaminaciones de la superficie. Para los metales él posee un orden de varios electrón-voltios. Por ejemplo, el tungsteno tiene 4,53 eV, el molibdénio, 4,43 eV, el cobre 4,39 eV, etc.

**Diferencia de potencial de contacto.** Las fuerzas que retienen los electrones en el sólido son de origen eléctrico. Se determinan por la diferencia de potencial entre los puntos fuera del cuerpo y los puntos interiores o, con otras palabras, sobre un gas electrónico cerca de la superficie actúan fuerzas eléctricas que tienden

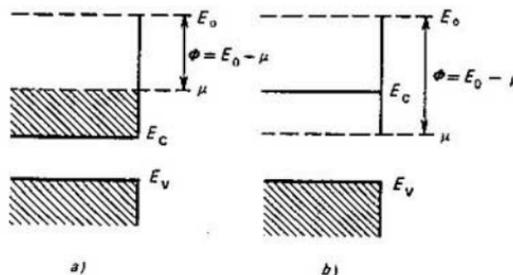


Fig. 5  
Pozo de potencial para el electrón en el metal (a) y dieléctrico (b). El trabajo de salida termiónico  $\Phi$  es la diferencia entre la energía  $E_0$  del electrón en reposo en el vacío y la energía del nivel  $\mu$  de Fermi

a arrastrar a los electrones al interior del cuerpo. Estas fuerzas son tanto más considerables, cuanto mayor es el trabajo de salida  $\Phi$ . Ellas actúan en una capa muy fina de dimensiones moleculares ( $d \approx 10^{-10}$  m). Por esta razón la intensidad efectiva del campo eléctrico que condiciona la aparición de estas fuerzas, es bastante grande:

$$E_{ef} \sim \Phi / (|e| d) \sim 10^{10} \text{ V/m}, \quad (2.4)$$

donde se toma en consideración que el trabajo de salida es igual, según el orden de la magnitud, a varios electrón-voltios.

Acerquemos las superficies de los dos cuerpos a tal grado, que en el intervalo entre ellas las capas del gas electrónico que se encuentra en la superficie de los cuerpos, se recubran. Merced a ello los cuerpos comienzan a intercambiarse de electrones. Dado que las fuerzas que arrastran el electrón al interior del cuerpo, son mayores en el cuerpo con mayor trabajo de salida, después de acercar las superficies empieza la transición de los electrones del cuerpo con menor trabajo de salida al cuerpo con mayor trabajo de salida, como resultado de lo cual, el primer cuerpo adquirirá carga positiva, y el segundo, carga negativa. El campo eléctrico, que surge entre las superficies de los cuerpos, obstaculiza el movimiento de los electrones, debido al cual él surgió. La intensidad de este campo alcanza un valor determinado. La transición posterior de los electrones

de un cuerpo a otro cesa, estableciéndose un estado de equilibrio. Las superficies resultan tener cargas de signo opuesto, pero de igual valor absoluto. Entre las superficies, lo mismo que entre las armaduras de un condensador, se establece cierta diferencia de potencial, llamada de contacto.

La diferencia de potencial de contacto puede hallarse, basándose en las siguientes consideraciones. Puesto que entre los cuerpos se establece un equilibrio electrónico, las energías de Fermi que poseen los cuerpos, deben ser iguales, como consecuencia de lo cual los puntos superiores de los pozos de poten-

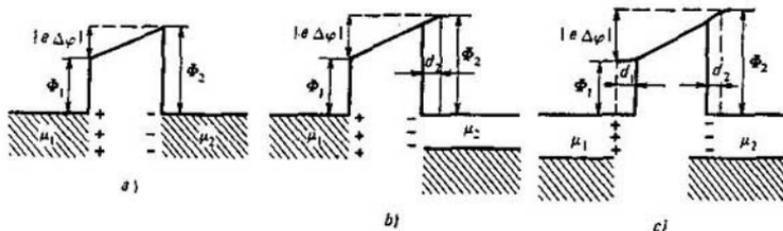


Fig. 6  
Formación de la diferencia de potencial de contacto en el espacio entre las superficies metal — metal (a), metal — dieléctrico (b) y dieléctrico — dieléctrico (c)

cial se desplazan mutuamente. Por lo tanto, entre ellos, o sea, entre las superficies de los cuerpos, surgen diferencia de potencial e intensidad del campo eléctrico.

La fig. 6 muestra los diagramas de formación de la diferencia de potencial de contacto entre dos metales (fig. 6, a), entre un metal y un dieléctrico (fig. 6, b) y entre dos dieléctricos (fig. 6, c). La diferencia en la formación de la diferencia de potencial de contacto entre los metales y entre un metal y un dieléctrico consiste en que el campo eléctrico no penetra al interior del metal, mientras que en el dieléctrico se introduce a una pequeña profundidad (en la fig. 6, b, c la profundidad de penetración se designa por  $d_1$  y  $d_2$ ). Por esta razón, la caída de potencial en los dieléctricos sucede no sólo entre las superficies, sino que también parcialmente en una capa fina dentro del dieléctrico, próxima a su superficie. Sin embargo, el grosor de esta capa es, por lo general, pequeña en comparación con la distancia entre las superficies y con gran precisión puede menospreciarse dicha circunstancia.

Como se ve (véase la fig. 6), la diferencia entre las energías de los puntos superiores de los pozos de potencial es igual a  $\Phi_2 - \Phi_1$ , por eso la diferencia de potencial de contacto entre las superficies de los cuerpos que se hallan en equilibrio electrónico, se prefija por la fórmula

$$|\Delta\varphi| = |\Phi_2 - \Phi_1| / |e|. \quad (2.5)$$

Observemos que el potencial disminuye en dirección de los cuerpos con carga positiva hacia los que poseen carga negativa. Por ello la variación del potencial

es opuesta al cambio de la energía potencial del electrón, es decir, el potencial disminuye del primer cuerpo al segundo.

**Electrificación:** Si las superficies planas de los cuerpos, entre las cuales hay una diferencia de potencial de contacto, se alejan mutuamente, conservando el paralelismo estricto entre sí, las cargas que se encuentran en estas superficies permanecen en los cuerpos y éstos resultan tener cargas de signos contrarios. Pero es prácticamente imposible separar las superficies de modo estrictamente paralelo, ya que sus distintas partes se alejan con diferente velocidad. *El resultado de la separación de las superficies es distinto en principio para los conductores y los dieléctricos.*

Al alejar las superficies planas de los conductores, las cargas que se encuentran en ellas, pueden desplazarse a lo largo de la superficie. Si unas partes de la superficie se separan antes que las otras, en ellas, lo mismo que en un condensador, para la misma diferencia de potencial, la densidad de carga disminuye. Como consecuencia, entre los cuerpos se efectúa el intercambio de cargas para restablecer el equilibrio electrónico, con la particularidad de que éste transcurre mediante el intercambio de electrones a través de la nube electrónica en la parte dada de la superficie y a causa del movimiento de las cargas a lo largo de la superficie en las otras partes. Aquellas partes de la superficie de los conductores que están separadas lo suficiente lejos y han perdido el contacto electrónico a través de la nube electrónica cerca de la superficie, resultan exentas de carga. La carga se conserva sólo en aquellas partes de la superficie que aún se encuentran en contacto electrónico. Por fin, llega un momento cuando el contacto electrónico se conserva en un área insignificante que posee una carga muy pequeña. Por ello, *al alejar definitivamente los conductores, en éstos no queda carga alguna.*

El resultado de la separación de los dieléctricos es distinto. Sus cargas no pueden desplazarse a lo largo de la superficie y el propio potencial puede ser distinto a lo largo de la superficie. Al alejar las partes de la superficie, la diferencia de potencial entre ellas no permanece constante, sino que aumenta de la misma manera como crece la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, cuando la carga de la armadura es constante y aumenta sólo la distancia entre las armaduras. La densidad de las cargas en las superficies no varía esencialmente. Después de perder el contacto electrónico a través de la nube electrónica cerca de la superficie, en las partes de la superficie las cargas eléctricas se conservan. *Como consecuencia de la separación total de las superficies de los dieléctricos, ellas resultan ser portadoras de cargas de signos contrarios, pero de igual valor absoluto.* Este proceso se denomina **electrificación**.

Para lograr un acercamiento más estrecho de las superficies de los dieléctricos y formar la diferencia de potencial de contacto, por lo general los cuerpos se frotan uno contra otro y se habla de la electrificación por frotamiento. Pero el frotamiento en este caso no tiene nada que ver con la electrificación. Sería más correcto hablar sobre la electrificación mediante el contacto de los cuerpos. Es que la terminología fue establecida mucho antes de aclararse la naturaleza física del fenómeno.

El trabajo de salida de los dieléctricos depende de la pureza de la composición y del estado de la superficie.

Al tener los cuerpos contacto, transcurre el paso de los electrones del cuerpo con menor trabajo de salida al que posee mayor trabajo de salida.

Dentro de cada una de las bandas permitidas la distancia entre los niveles energéticos es extremadamente pequeña en comparación con la anchura de las bandas prohibidas. En los dieléctricos la energía de Fermi no corresponde a la energía de cualquier electrón real en el dieléctrico.

El trabajo de salida termoiónico es igual al trabajo que se gasta el desplazar el electrón desde el nivel de Fermi hasta salir fuera del sólido.

¿Cuál es la relación entre los niveles energéticos de un átomo aislado y las bandas de energía del sólido? ¿Merced a qué factores se forman las bandas de energía?

¿Cuál es la interpretación evidente de la energía de Fermi en los metales?

¿Por qué dicha interpretación no vale para los dieléctricos?

¿De qué manera pueden determinarse los signos de las cargas de los cuerpos en contacto?

¿Por qué no se puede electrizar los metales, poniéndolos en contacto?

### § 3. Carga elemental y su invariación

*Se describen los experimentos que demuestran la existencia de carga eléctrica elemental y la ausencia de cargas, fraccionarias respecto a la elemental. Se discuten los testimonios experimentales sobre la identidad de los valores absolutos de las cargas elementales positivas y negativas y sobre la invariación de la carga.*

**Experimentos de Millikan.** La idea sobre el carácter discreto de la carga eléctrica fue enunciada en forma explícita por B. Franklin ya en 1752, pero era más especulativa. En principio, el carácter discreto de las cargas, como resultado experimental, se desprende de las leyes de la electrólisis, descubiertas por M. Faraday (1791—1867) en el año 1834. Sin embargo, semejante deducción de las leyes de la electrólisis fue hecha sólo en 1881 por H. L. Helmholtz (1821—1894) y G. Stoney (1826—1911). Poco tiempo después de eso, en 1895, H. Lorentz (1853—1928) creó la teoría del electromagnetismo, basada en la representación de las cargas elementales que existen realmente (electrones). El valor numérico de la carga elemental fue calculado teóricamente, fundamentándose en las leyes de la electrólisis, ya que el significado de la constante de Avogadro se conocía. La medición experimental directa de la carga elemental fue realizada por R. A. Millikan (1868—1953) en 1909.

El esquema de los experimentos de Millikan se da en la fig. 7. Las pequeñas partículas esféricas se mueven en un líquido viscoso en presencia de un campo eléctrico homogéneo  $E$ . Sobre la partícula actúan la fuerza sustentadora, dirigida contra la fuerza de gravedad (la densidad de la partícula es mayor que la del líquido), y la fuerza de rozamiento viscoso  $f_{roz}$  con dirección contraria a la velocidad.

La fuerza de rozamiento viscoso es, conforme a la fórmula de Stokes, proporcional a la velocidad. Siendo la velocidad de la partícula constante, la suma de las fuerzas que actúan sobre ella es nula.

Todas las fuerzas, a excepción de la que actúa sobre la partícula por parte del campo eléctrico, pueden medirse experimentalmente al moverse la partícula en un medio sin campo eléctrico. Al estudiar luego el movimiento de la partícula en el campo eléctrico, hallamos la fuerza  $qE$ . Esto permite calcular la carga  $q$  de la partícula, ya que la intensidad  $E$  del campo es conocida.

Puede también variarse la intensidad del campo eléctrico  $E$ , logrando que la partícula se halle en reposo. En este caso la fuerza de rozamiento también está ausente y las demás fuerzas son conocidas. Por esta razón, conociendo  $E$ , puede determinarse  $q$ .

Con el tiempo la carga de la partícula varía, lo que se refleja en el movimiento de la partícula. Después de determinar las cargas  $q_1$  y  $q_2$  de la partícula durante diversos lapsos, puede hallarse el cambio de la carga

$$\Delta q = q_2 - q_1. \quad (3.1)$$

Ejecutando una gran cantidad de mediciones de las cargas, Millikan encontró que  $\Delta q$  es siempre un valor entero, múltiplo a una misma magnitud  $|e|$ :

$$\Delta q = n |e|, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.2)$$

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (3.2a)$$

**Método de medida de la carga por resonancia.** En lo sucesivo los métodos de medida directa de la carga elemental fueron perfeccionados. En la actualidad la precisión de las mediciones es tal, que permite detectar las décimas de la carga elemental. El más eficaz de ellos es el método de resonancia, cuyo esquema se da en la fig. 8. Una bola que posee una masa suficientemente pequeña  $m$ , está sujeta a una barra elástica muy fina. Bajo la influencia de las fuerzas de elasticidad, que surgen al curvarse la barra, la bola oscila cerca de la posición de equilibrio con una frecuencia propia (natural)  $\omega_0$  que puede medirse experimentalmente. Si en la bola existe cierta carga  $q$ , bajo el efecto de un campo eléctrico alternativo de frecuencia  $\omega$ , la bola realiza oscilaciones forzadas, cuyas amplitudes dependen de la relación entre las frecuencias  $\omega$  y  $\omega_0$ . La amplitud máxima de las oscilaciones se alcanza estando en resonancia ( $\omega \approx \omega_0$ ). La amplitud de las oscilaciones de la bola estando en resonancia, es igual a

$$A_{res} = qE_0Q/(m\omega_0^2), \quad (3.3)$$

donde  $Q$  es el factor de calidad del sistema,  $E_0$ , la amplitud de la intensidad del campo eléctrico. Estimemos las posibilidades del método. Supongamos que

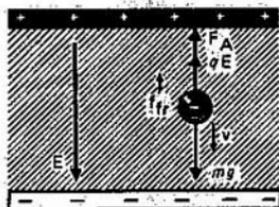


Fig. 7  
Esquema de los ensayos de Millikan

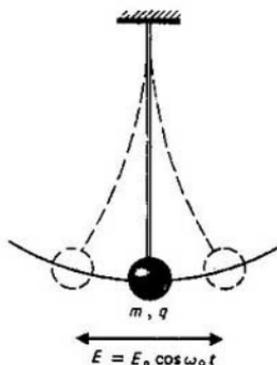


Fig. 8  
Esquema del método de medida por resonancia de la carga elemental

$m = 1 \text{ mg} = 10^{-6} \text{ kg}$ ;  $E_0 \approx 10^5 \text{ V/m}$ ;  
 $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ;  $\omega_0 = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ ;  $Q \approx 100$ ,  
entonces

$$A_{\text{res}} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 10^2}{10^{-6} \cdot 10^{-2}} \text{ m} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 160 \text{ } \mu\text{m}. \quad (3.4)$$

La magnitud  $160 \text{ } \mu\text{m}$  es muy grande y es fácil medir una parte pequeña de ella. Por lo tanto, aplicando este procedimiento, pueden medirse cargas mucho más pequeñas que  $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Este método se ha perfeccionado hasta tal punto que hoy día permite, en principio, detectar y medir una carga igual a décimas partes de la elemental, de existir ésta.

Al variar la carga de la bola en  $\Delta q$ , la amplitud de las oscilaciones de resonancia cambia a salto:

$$\Delta A_{\text{res}} = \Delta q E_0 Q / (m \omega_0^2). \quad (3.5)$$

*Las mediciones permitieron establecer con gran precisión que la carga de la bola varía siempre en un número entero de cargas elementales y que no existe carga inferior a la elemental.*

**Ausencia de carga fraccionaria.** Se llevaron a cabo búsquedas intensas de las cargas fraccionarias. Ello fue iniciado por la predicción de la existencia de los quarks. Se supone que los quarks son partículas de las que constan la mayoría de las partículas elementales pesadas (los protones, etc.). Se pronosticó que la carga eléctrica de los quarks debe ser  $1/3$  y  $2/3$  de la carga elemental (con los signos correspondientes). La búsqueda de los quarks se efectuó por muchos científicos, aplicando diferentes métodos, incluyendo el de resonancia. Todos ellos dieron un resultado negativo. Así, pues, *en la actualidad se ha establecido por vía experimental y con gran precisión que en estado libre no existen cargas fraccionarias.*

Hemos hecho resaltar las palabras «en estado libre», ya que las pruebas estaban dirigidas precisamente a buscar quarks libres. *En cambio, de aquí no se desprende el hecho de que en estado combinado dentro de las partículas elementales los quarks estén ausentes.* Sin embargo, aún no se conoce una verificación experimental directa de esta afirmación.

**Igualdad de las cargas elementales negativas y positivas.** En los experimentos, descritos más arriba, se medía tanto la carga elemental negativa, como la positiva. Los resultados de estos experimentos han demostrado su igualdad con la misma precisión con que se mide el valor de las cargas. Esta exactitud no es muy elevada. Por ejemplo, puede decirse que las cargas elementales negativa y positiva por su valor absoluto se diferencian no más de una décima de su valor, es decir,

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_{\pm}|} \leq \frac{1}{10}. \quad (3.6)$$

Esta precisión es totalmente insatisfactoria, puesto que la teoría supone una igualdad completa de los valores absolutos de las cargas elementales positivas y negativas.

Una estimación mucho más precisa puede obtenerse sin medir directamente el valor de la carga elemental. Como se sabe, los átomos poseen una misma cantidad de protones y electrones. Los cuerpos también contienen la misma cantidad de protones y electrones. Por eso la estimación de la igualdad de las cargas del protón y electrón puede llevarse a cabo por los resultados de la medición de la neutralidad de los cuerpos. Pero esto puede hacerse con una precisión extremada, dado que incluso una pequeña perturbación de ella conduce a la aparición de enormes fuerzas de interacción eléctrica entre los cuerpos, que es fácil de observar. Supongamos, por ejemplo, que dos bolas de hierro con una masa de 1 g, que se hallan a la distancia de 1 m no son neutras a causa de que las cargas del protón se diferencian de la carga del electrón en una millonésima de la carga. Estimemos cuál será la fuerza de repulsión que surge entre las bolas. Cada gramo de  $^{56}_{26}\text{Fe}$  contiene  $6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56$  de cargas de cada signo. Por lo tanto, al infringir la neutralidad sólo en  $10^{-6}$ , aparece una carga

$$q = [1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 26/56] \text{ C} = 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ C} \quad (3.7)$$

en cada bola.

La fuerza de repulsión entre las bolas es igual a

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = (4,46 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ N} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ N} = 18 \text{ MN}. \quad (3.8)$$

Ello significa que entre las bolas surge una fuerza de repulsión que equivale a la fuerza que ejerce sobre los rieles un tren cuya masa es casi de 2 mil toneladas. Y eso ocurre diferenciándose las cargas del protón y electrón nada más que en  $10^{-6}$  de la carga en 2 gramos de hierro. Es obvio que es fácil medir las fuerzas entre las bolas de hierro en una cantidad enorme de veces inferiores a (3.8). Si en el experimento no aparecen semejantes fuerzas eso significa el aumento correspondiente de la precisión con la que la carga del electrón es igual, por el valor absoluto, a la carga del protón. *En la actualidad se ha establecido experimentalmente que la carga elemental negativa del electrón es igual, por su valor absoluto, a la carga positiva del protón con una precisión relativa de  $10^{-21}$ , o sea,*

$$\frac{||e_+| - |e_-||}{|e_{\pm}|} \leq 10^{-21}. \quad (3.9)$$

La demostración expuesta respecto a la igualdad de los valores absolutos de las cargas elementales negativa y positiva puede parecer insuficientemente estricto. Podemos imaginarnos un cuerpo que consta de átomos o moléculas en los que las cargas elementales no tienen igual valor absoluto, a pesar de que la

cantidad de ellas en cada átomo o molécula es la misma. En este caso los átomos o moléculas deben poseer cierta carga, permaneciendo, en cambio, el cuerpo en total neutro, si a la par con estos átomos y moléculas éste posee, en cantidad necesaria, electrones libres o iones positivos (en dependencia del signo del carga de los átomos o las moléculas). Sin embargo, haciendo esa suposición, chocamos con complicaciones a las que es difícil someterse. Por ejemplo, habrá que renunciar a la idea de una estructura homogénea de los cuerpos y considerar que su estructura depende de sus dimensiones, etc. A pesar de todo, es deseable tener una demostración más directa de que los valores absolutos de las cargas elementales negativa y positiva en los átomos son iguales. Tal demostración fue obtenida.

*La neutralidad de los átomos aislados se verificó mediante experimentos: se investigó la desviación del haz de átomos neutros en los campos electrostáticos.* Por la desviación puede juzgarse sobre la carga del átomo y deducir la igualdad de las cargas de los electrones y protones en el átomo. Las pruebas con los haces de cesio ( $Z = 55$ ) y potasio ( $Z = 19$ ) mostraron que los valores absolutos de las cargas del electrón y protón son iguales con una precisión relativa de  $3,5 \cdot 10^{-10}$ .

**Invariación de la carga.** El hecho de que el átomo sea neutro demuestra también la independencia entre el valor numérico de la carga elemental y la velocidad. Merced a la diferencia de las masas de los electrones y protones se puede sacar la conclusión de que los electrones en los átomos se mueven con mayor velocidad que los protones. *Si la carga dependiese de la velocidad*, no podría observarse la neutralidad de los átomos. Por ejemplo, los electrones en el átomo de helio se mueven aproximadamente con una velocidad dos veces mayor que en la molécula de hidrógeno, mientras que la neutralidad del átomo de helio y de la molécula de hidrógeno se ha demostrado con gran precisión. Podemos sacar la conclusión de que con la misma exactitud la carga no depende de la velocidad hasta las velocidades de los electrones en el átomo de helio. La velocidad de los electrones en el átomo de helio es aproximadamente igual a  $0,02 c$ . En los átomos más pesados, cuya neutralidad está demostrada, los electrones se mueven en las capas internas con velocidades, iguales, más o menos, a la mitad de la velocidad de la luz. De esta manera, se ha demostrado experimentalmente que la carga elemental es invariante hasta  $0,5 c$ . No existen razones para suponer que no sea invariante a velocidades más altas. Por eso *la invariación de la carga eléctrica se toma como una de las argumentaciones experimentales de la teoría de la electricidad.*

La búsqueda de los quarks permitió con gran precisión demostrar que en la naturaleza no hay cargas fraccionarias. La ausencia de quarks en estado libre no confirma su inexistencia en estado combinado dentro de las partículas elementales.

¿En qué consiste el principio del método de resonancia de medición de la carga elemental? ¿Cuál es la precisión para hoy día de este método? Cítense estimaciones numéricas.

## § 4. Corriente eléctrica

*Se discuten los conceptos principales y las magnitudes que caracterizan la distribución y el movimiento de las cargas eléctricas.*

**Movimiento de las cargas.** El movimiento de los electrones y protones determina el movimiento de sus cargas. Por eso puede hablarse simplemente del movimiento de las cargas, sin mencionar cada vez su portador. Ello no sólo es cómodo, sino que da comunidad a los razonamientos, ya que muchos fenómenos dependen sólo de las cargas, su movimiento, etc., sin depender de las propiedades de los portadores de estas cargas, por ejemplo, de la masa de los portadores de las cargas. Si tiene importancia no solamente la carga sino que también las propiedades del portador de la carga, por ejemplo la masa de este portador, es necesario tomar en consideración no sólo la carga, sino que también otras características del portador.

En la teoría de la electricidad la carga elemental se considera puntual, incluyendo la carga del protón. La posición de la carga, su velocidad y aceleración tienen el mismo sentido que en el caso de los puntos materiales.

**Distribución continua de las cargas.** La carga elemental es muy pequeña. Por esta razón, *en la mayoría de los fenómenos macroscópicos que se estudian en la electricidad, participa una cantidad enorme de cargas eléctricas y su carácter discreto no se manifiesta.* Por ejemplo, cada una de las armaduras de un condensador plano con una capacidad de 10  $\mu\text{F}$  contiene unas  $7 \cdot 10^{16}$  cargas elementales para una diferencia de potencial de 100 V. Siendo la corriente de 1 A, a través de la sección transversal del conductor pasan aproximadamente  $6 \cdot 10^{18}$  cargas elementales por segundo. Por ello, *en la mayoría de los casos puede considerarse que la carga como si estuviese distribuida continuamente en el espacio, por lo que se menosprecia su carácter discreto.*

**Densidad volumétrica de las cargas.** Se llama densidad volumétrica de distribución continua de las cargas a la relación entre la carga y el volumen:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V_T} \sum_{\Delta V_T} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta V_T} \quad (4.1)$$

donde  $e_i$  son las cargas elementales en el volumen  $\Delta V_T$  (teniendo en cuenta su signo);  $\Delta Q$  es la carga total incluida en  $\Delta V_T$ . El volumen  $\Delta V_T$  es pequeño, pero no infinitamente pequeño en el sentido matemático. Aquí suponemos que  $\Delta V_T$  es infinitamente pequeño en el sentido físico, o sea, considerándolo muy pequeño y, por lo tanto, pudiendo caracterizar su posición en el espacio con la suficiente exactitud mediante cualquier punto de coordenadas, situado dentro del mencionado volumen, es decir, en el primer miembro de (4.1)  $\rho$  puede tomarse en calidad de argumento de la coordenada  $(x, y, z)$  para cualquier punto dentro de  $\Delta V_T$  y escribir  $\rho(x, y, z)$ . Pero en el volumen  $\Delta V_T$  debe haber una

cantidad grande de cargas elementales para que una pequeña variación de éste no conduzca a un cambio esencial de la densidad  $\rho$ , calculada por la fórmula (4.1). Por consiguiente,  $\Delta V$ , depende de condiciones concretas. *En algunos casos el volumen pequeño  $\Delta V$  puede satisfacer las condiciones necesarias y considerarse como volumen físico infinitamente pequeño, mientras que en otros casos no se le puede considerar como tal. Por fin, pueden existir condiciones cuando en general no haya ningún volumen  $\Delta V$  que pueda denominarse volumen físico infinitamente pequeño. Entonces es imposible utilizar la representación sobre la distribución continua de la carga y determinar  $\rho$  por la fórmula (4.1) a título de densidad volumétrica.* Sin embargo, en la mayoría de los casos, examinados en la teoría clásica de la electricidad, se considera válida la distribución continua de la carga.

Al determinar la densidad volumétrica  $\rho$  por la fórmula (4.1), ella puede ser considerada como una función matemática simple, y la carga, difuminada continuamente por el volumen. Entonces de (4.1) se desprende que la carga total, consistente en el volumen  $V$ , es igual a

$$Q = \int_V \rho dV, \quad (4.2)$$

donde  $dV$  es la diferencial del volumen.

**Concentración de cargas.** La relación entre la cantidad de cargas y el volumen que ocupan:

$$n_{\pm} = \frac{\Delta n_{\pm}}{\Delta V_f}, \quad (4.3)$$

donde  $\Delta n_{\pm}$  es el número de cargas de signo correspondiente en el volumen  $\Delta V_f$ , se denomina *concentración de cargas* de signo determinado. Entonces [véase (4.1)]

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i^{(+)} + \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i^{(-)} = \frac{e^{(+)} \Delta n_{(+)}}{\Delta V_f} + \frac{e^{(-)} \Delta n_{(-)}}{\Delta V_f} = \\ &= e^{(+)} n_{(+)} + e^{(-)} n_{(-)} = \rho^{(+)} + \rho^{(-)}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

donde  $e^{(\pm)}$  es una carga puntual elemental con signo correspondiente,  $\rho^{(\pm)} = e^{(\pm)} n_{(\pm)}$ , la densidad volumétrica de las cargas. El volumen físico infinitamente pequeño debe contener muchas cargas para que la definición de concentración tenga sentido.

**Densidad superficial de las cargas.** A veces la carga está distribuida en una capa muy fina en las inmediaciones de cierta superficie. *Si nos interesa la acción de la carga a distancias, mucho mayores que el grosor de la capa, y no los procesos que transcurren en esta capa, entonces puede suponerse que toda la carga está concentrada en la superficie o, con otras palabras, esta capa muy fina puede considerarse superficie.* La densidad superficial de la carga se determina valiéndose de la fórmula

$$\sigma = \frac{1}{\Delta S_f} \sum_{\Delta S_f} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta S_f}, \quad (4.5)$$

donde  $\Delta S$ , es un área infinitamente pequeña en el sentido físico,  $\Delta Q$ , la carga que corresponde al área  $\Delta S$ , de la superficie en una capa fina cerca de ella.

En  $\sigma$  como argumento pueden ponerse las coordenadas de los puntos superficiales y considerarla a título de función de estas coordenadas. La argumentación y el sentido de ello son los mismos que para la densidad volumétrica  $\rho$  en (4.1). Por esta razón, la carga total en la superficie  $S$  es igual a

$$Q = \int_S \sigma \, dS, \quad (4.6)$$

donde  $dS$  es la diferencial del área de la superficie.

**Densidad de corriente.** Las cargas en el volumen  $\Delta V_f$  se mueven con distintas velocidades que se diferencian no sólo por el módulo, sino también por la dirección. El movimiento de la carga conduce al traslado de la carga en dirección de la velocidad. Por eso, como resultado de diferentes movimientos de las cargas, que se hallan en el volumen  $\Delta V_f$ , se forma cierto traslado medio de la carga, incluida en este volumen. La intensidad de dicho traslado se caracteriza por la densidad de corriente, definida por la fórmula

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V_f} \sum_{\Delta V_f} e_i \mathbf{v}_i, \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad de la carga  $e_i$ .

Al partir la suma en (4.7) en sumas por cargas negativas y positivas, obtenemos

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\Delta V_f} \sum_i e_i^{(+)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \frac{1}{\Delta V_f} \sum_i e_i^{(-)} \mathbf{v}_i^{(-)} = \frac{e^{(+)}}{\Delta V_f} \sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} + \frac{e^{(-)}}{\Delta V_f} \sum_i \mathbf{v}_i^{(-)} \quad (4.8)$$

La fórmula (4.8) será aún más evidente si las magnitudes que la componen se expresan mediante las velocidades y concentraciones medias de las cargas:

$$\sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} = \Delta n^{(+)} \frac{1}{\Delta n^{(+)}} \sum_i \mathbf{v}_i^{(+)} = \Delta n^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle = \frac{1}{\Delta n^{(+)}} \sum_i \mathbf{v}_i^{(+)},$$

donde

$$\mathbf{v}_i^{(+)} \sum_i \frac{1}{\Delta n^{(+)}} = \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle$$

ya que  $\Delta n^{(+)}$  es la cantidad de cargas, cuya suma de las velocidades está bajo el signo de sumación  $\sum$ . De la misma manera se transforma la suma según las velocidades de las cargas negativas. Teniendo lo dicho en cuenta, la fórmula (4.8) adquiere el aspecto:

$$\mathbf{j} = e^{(+)} \frac{\Delta n^{(+)}}{\Delta V_f} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle + e^{(-)} \frac{\Delta n^{(-)}}{\Delta V_f} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle = e^{(+)} n^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle + e^{(-)} n^{(-)} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle = \\ = \rho^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle + \rho^{(-)} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle, \quad (4.9)$$

donde se han tomado en consideración las relaciones (4.3) y (4.4). De esta manera, las cargas positivas y negativas crean cada una su densidad de corriente:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(+)} &= \rho^{(+)} \langle \mathbf{v}^{(+)} \rangle, & \mathbf{j}^{(-)} &= \rho^{(-)} \langle \mathbf{v}^{(-)} \rangle, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}^{(+)} + \mathbf{j}^{(-)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

*La dirección de la densidad de corriente para las cargas positivas coincide con la de su velocidad media y la dirección de  $\mathbf{j}$  para las cargas negativas es contraria a ella.*

Por lo general, para simplificar la escritura, las fórmulas (4.10) se representan así

$$\boxed{\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}}, \quad (4.11)$$

donde  $\rho$  y  $\mathbf{v}$  son la densidad volumétrica y la velocidad de las cargas de signo correspondiente. Si la corriente se crea por las cargas de los dos signos, en el segundo miembro se supone la suma de dos términos, referentes a las cargas negativas y positivas. En cambio, en la mayoría de los casos, examinados en la teoría de la electricidad, la corriente se determina sólo por el movimiento de las cargas negativas de los electrones, por lo que el segundo miembro de (4.11) contiene solamente el producto de la densidad volumétrica negativa de la carga de los electrones por su velocidad media. *El traslado de la carga negativa en dirección contraria a la velocidad equivale al traslado de una carga positiva en dirección de la velocidad.* En distintos razonamientos es más cómodo imaginarse que la corriente se determina por el movimiento de las cargas positivas, ya que su desplazamiento espacial coincide con la dirección de la densidad de corriente.

**Intensidad de corriente a través de una superficie.** Un elemento infinitamente pequeño de la superficie se caracteriza por el vector  $d\mathbf{S}$ , cuyo módulo es igual al área del elemento de superficie y está dirigido por la normal a la superficie, que se considera positiva.

Calculemos la carga que durante el tiempo  $dt$  atraviesa un elemento de la superficie  $dS$  (fig. 9). El desplazamiento de la carga en dicho tiempo es  $\mathbf{v} dt$ . Por consiguiente, la carga que atraviesa  $dS$  es igual a la densidad volumétrica de la carga, multiplicada por el volumen de un cilindro oblicuo (fig. 9). El área de la base y la altura del cilindro oblicuo son  $dS$  y  $h = v \Delta t \cos \theta$ . Por eso la carga que atraviesa  $dS$  es igual a

$$dq = \rho v dt dS \cos \theta = dt j \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j dS \cos(\mathbf{j}, d\mathbf{S})$ . Se llama **intensidad de corriente a través de la superficie** la relación entre la carga, que atraviesa la superficie, y el tiempo. Por esta razón, la intensidad infinitamente pequeña de corriente  $dI$  que pasa por el elemento de la superficie  $dS$  [vépse (4.12)], es igual a

$$dI = dQ/dt = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.13)$$

La intensidad de corriente que pasa por una superficie finita  $S$  (fig. 10), es igual a la integral de los elementos de la intensidad de corriente de (4.13) respecto a la superficie dada:

$$J = \int_S dI = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.14)$$

Si por el conductor pasa corriente eléctrica continua, la fórmula (4.14) se reduce a la definición de la intensidad de corriente como la cantidad de electricidad que atraviesa la sección transversal del conductor en un segundo.

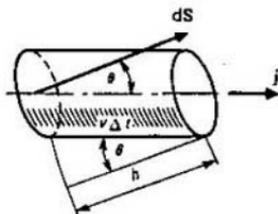


Fig. 9  
Cálculo de la intensidad de la corriente eléctrica a través del elemento de la superficie

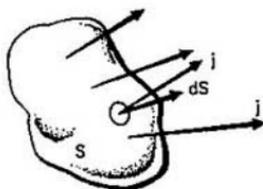


Fig. 10  
Corriente eléctrica a través de la superficie

En la mayoría de los fenómenos macroscópicos que se estudian en la electricidad, participa una cantidad enorme de cargas eléctricas sin manifestar de ninguna manera su carácter discreto.

Cierto volumen pequeño concreto puede considerarse en unos casos como un volumen físico infinitamente pequeño, mientras que en otros casos no se le puede considerar así. Existen condiciones cuando en general no hay ningún volumen que se pueda considerar como un volumen físico infinitamente pequeño. Entonces es imposible pasar al cuadro de la distribución continua de las cargas en el volumen.

## § 5. Principio de conservación de la carga

*Se examinan dos aspectos del concepto de conservación de la carga. Se ofrecen las enunciaciones diferencial e integral del principio de conservación de la carga.*

Los aspectos del concepto de conservación de la carga. En el concepto de «conservación de la carga» entran dos grupos de hechos totalmente diferentes: 1) *el electrón y el protón son partículas materiales con tiempo infinito de vida y sus cargas eléctricas elementales son invariantes y no dependen de la velocidad.* Por lo tanto, sus cargas existen sin variación alguna tanto tiempo cuanto existen los

protones y electrones, independientemente de cómo se mueven, es decir, para cualesquiera movimientos la carga se conserva. *En este aspecto el principio de conservación de la carga resulta simplemente la consecuencia de que los portadores de carga no se aniquilan como objetos físicos y de la invariación de la carga;* 2) además de los protones y electrones, existe una gran cantidad de otras partículas elementales cargadas. Todas ellas se engendran, originan otras partículas y se aniquilan en diversos procesos de autotransformaciones. Todo el enorme material experimental demuestra que sea cual sea el proceso de autotransformación de las partículas, la carga sumaria de las partículas antes de la autotransformación es igual a la carga sumaria de ellas después de dicho proceso. Por ejemplo, durante la desintegración  $\beta$  antes de emitir un electrón, el núcleo posee cierta carga positiva  $Ze^{+}$ . Después de emitir el electrón, la carga positiva del núcleo aumenta en una carga positiva elemental y se hace igual a  $(Z + 1)e^{+}$ . En cambio, sumando la carga negativa del electrón emitido, el sistema «núcleo + electrón» posee la misma carga  $(Z + 1)e^{+} - |e^{-}| = Ze^{+}$ . Puede citarse también otro ejemplo de la creación del par electrón—positrón por rayos (fotones) gamma. La partícula inicial (el fotón gamma) es neutra. Ella se transforma en un par de partículas, cuya carga sumaria es nula, lo que está demostrado con gran precisión al medir la carga positiva del positrón. Se investigó una inmensa cantidad de autotransformaciones de las partículas elementales y en todos los procesos se observó la igualdad de la carga sumaria antes del proceso y después de éste o, con otras palabras, se observa el principio de conservación de la carga. Merced a ello, la carga adquiere en cierto sentido una existencia, independiente de los portadores y el principio de su conservación puede enunciarse de la siguiente manera: *la carga se conserva durante todos los procesos y movimientos, relacionados con los portadores de las cargas.*

Sin embargo, a pesar de su independencia relativa, la carga no puede existir independientemente de los portadores de la carga o fuera del espacio y tiempo. Esto significa que *la carga no es una substancia independiente, ajena a la materia, sino que expresa una de las propiedades de la materia.* Uno de los problemas más difíciles de la física moderna es la aclaración de la naturaleza de dicha relación. Aún no está claro el por qué existe sólo una carga elemental y por qué es igual a  $|e|$  y no a otro valor cualquiera.

**Formulación integral del principio de conservación de la carga.** Partiendo del principio de conservación de la carga como un hecho experimental, expresémoslo en forma de cierta afirmación de que la variación de la carga en un volumen  $V$  puede ocurrir sólo como consecuencia de que la carga confluya o fluya por una superficie cerrada  $S$  que limita el volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.1)$$

El primer miembro de (5.1) determina la velocidad del cambio de la carga en el volumen, y el segundo miembro, la intensidad de corriente por la superficie que limita el volumen. *El signo menos significa que si la carga positiva dentro del volumen disminuye, la densidad de corriente está dirigida desde el volumen  $V$ .*

Recordemos que se considera normal positiva de las superficies cerradas la normal exterior. Por consiguiente, el vector  $dS$  en (5.1) está orientado por la normal exterior a la superficie (fig. 11).

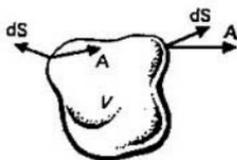


Fig. 11  
En las superficies cerradas la normal exterior es la positiva

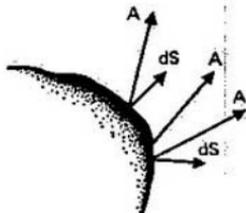


Fig. 12  
Flujo del vector  $A$  a través de la superficie

**Divergencia.** El concepto matemático de divergencia desempeña un papel importante para describir los procesos, relacionados con la creación, aniquilación y conservación de las magnitudes físicas.

Sea un vector  $A(x, y, z)$  determinado en todos los puntos del espacio. Examinemos cierta superficie  $S$  (fig. 12). La integral

$$\Phi_A = \int_S A \cdot dS \quad (5.2)$$

se denomina **flujo del vector  $A$  por la superficie  $S$** . La causa de este nombre consiste en lo siguiente: supongamos que haya una hoguera, cuyo humo tiene una densidad  $\rho$  y una velocidad  $v$  en distintos puntos del espacio. Elijamos la magnitud  $\rho v$  a título de vector  $A$ . Entonces la integral (5.2), tomando en consideración la fig. 10, define la masa del humo que atraviesa la superficie  $S$  en un segundo. Semejante aplicación para la carga eléctrica ya se utilizó en la igualdad (4.14). Por analogía con (5.1), llegamos a la conclusión de que el flujo del vector  $A$  por una superficie cerrada caracteriza la intensidad de la creación o aniquilación de  $A$  dentro del volumen, limitado por la superficie. Así, el flujo del vector  $\rho v$  a través de la superficie cerrada caracteriza la intensidad de creación de humo dentro del volumen, limitado por una superficie cerrada. Semejante interpretación tiene la igualdad (5.1) para las cargas eléctricas. Puede decirse que la integral (5.2) caracteriza la potencia sumaria de las fuentes del vector  $A$  dentro del volumen.

La divergencia caracteriza la potencia de las fuentes y se determina por la fórmula

$$\operatorname{div} A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} A \cdot dS}{\Delta V}, \quad (5.3)$$

donde  $\Delta S$  es una superficie cerrada infinitamente pequeña que delimita un volumen infinitamente pequeño  $\Delta V$ .

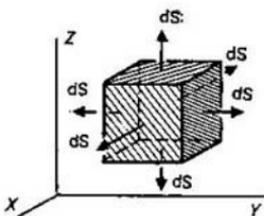


Fig. 13  
El flujo del vector a través de la superficie de un cubo se reduce a la suma de los flujos a través de sus caras

Hallemos la expresión para  $\text{div } \mathbf{A}$  en coordenadas cartesianas. Para ello calculemos el flujo del vector  $\mathbf{A}$  a través de la superficie de un cubo (fig. 13), cuyos lados son  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y su centro posee las coordenadas  $(x, y, z)$ . Las coordenadas de los centros de las caras son  $(x + \Delta x/2, y, z)$ ,  $(x - \Delta x/2, y, z)$ ,  $(x, y + \Delta y/2, z)$ ,  $(x, y - \Delta y/2, z)$ ,  $(x, y, z + \Delta z/2)$ ,  $(x, y, z - \Delta z/2)$ . La expresión subintegral de (5.3) en coordenadas tiene el siguiente aspecto:

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z, \quad (5.4)$$

donde

$$dS_x = \pm dy dz; \quad dS_y = \pm dz dx; \quad dS_z = \pm dx dy, \quad (5.5)$$

con la particularidad de que el signo de estas magnitudes se determina por la orientación de la normal exterior a la cara respecto a la dirección positiva del eje correspondiente. Por ejemplo,  $dS_y$  por la cara derecha  $(x, y + \Delta y, z)$  posee un valor positivo, mientras que por la cara izquierda, negativo. La integral por la superficie del cubo se reduce a la suma de las integrales por sus caras.

Calculemos, por ejemplo, la integral por las caras perpendiculares al eje  $Y$ . En estas caras  $dS_x = 0$ ,  $dS_y = \pm dz dx$ ,  $dS_z = 0$  y, por lo tanto, la suma en el segundo miembro de (5.4) se reduce a un sumando  $A_y dS_y$ . Designando las áreas de las superficies de las caras  $\Delta S_{y1}$  (la izquierda) y  $\Delta S_{y2}$  (la derecha), escribimos:

$$\begin{aligned} I_y &= \oint_{\Delta S_{y1} + \Delta S_{y2}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta S_{y1}} A_y dS_y + \int_{\Delta S_{y2}} A_y dS_y = \\ &= \int_{\Delta S_{y1}} A_y(x, y - \Delta y/2, z) dx dz + \int_{\Delta S_{y2}} A_y(x, y + \Delta y/2, z) dx dz. \end{aligned} \quad (5.6)$$

El signo menos de la primera integral en el segundo miembro de (5.6) toma en consideración que la normal exterior a la cara izquierda  $\Delta S_{y1}$  está orientada hacia los valores negativos de  $y$ . Para los cálculos posteriores representemos  $A_y$  en forma de la serie de Taylor respecto a  $\Delta y$ :

$$\begin{aligned} A_y(x, y + \Delta y/2, z) &= A(x, y, z) + (\Delta y/2) \partial A_y(x, y, z) / \partial y + O[(\Delta y)^2], \\ A_y(x, y - \Delta y/2, z) &= A(x, y, z) - (\Delta y/2) \partial A_y(x, y, z) / \partial y + O[(\Delta y)^2], \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $O[(\Delta y)^2]$  son los términos del orden superior de pequeñez con respecto a  $\Delta y$ . Sustituyendo (5.7) en (5.6), hallamos

$$I_y = \Delta y \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} dx dz + O[(\Delta y)^2], \quad (5.8)$$

donde se tuvo en cuenta que las áreas de las superficies  $\Delta S_{y1}$  y  $\Delta S_{y2}$  son iguales y poseen las mismas coordenadas por los ejes  $X$ ,  $Z$ .

La integral en (5.8) puede calcularse, desarrollando el integrando en serie, considerando que  $x$  y  $z$  son las variables de la integración y no las coordenadas del centro de las caras. Si por  $x$  y  $z$  se toman las coordenadas del centro de las caras, las variables se sustituyen fácilmente por las fórmulas:

$$x \rightarrow x + \xi, \quad z \rightarrow z + \eta, \quad dx dz \rightarrow d\xi d\eta, \quad (5.9)$$

$$\int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} dx dz = \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x + \xi, y, z + \eta)}{\partial y} d\xi d\eta, \quad (5.10)$$

donde  $x$ ,  $z$  en el segundo miembro de (5.10) son las coordenadas del centro de las caras, es decir, son constantes al calcular (5.10). La expresión  $\partial A_y / \partial y$  puede desarrollarse en serie respecto a  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_y(x + \xi, y, z + \eta)}{\partial y} &= \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \\ + \xi \frac{\partial^2 A_y(x, y, z)}{\partial x \partial y} &= \eta \frac{\partial^2 A_y(x, y, z)}{\partial z \partial y} + 0(\xi^2, \eta^2), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  varían al integrar desde 0 hasta  $\pm \Delta x/2$  y  $\pm \Delta z/2$  y poseen, por lo tanto, el mismo orden de pequeñez que  $\Delta x$  y  $\Delta z$ . Sustituimos (5.11) en (5.10):

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_y} \frac{\partial A_y(x + \xi, y, z + \eta)}{\partial y} d\xi d\eta &= \frac{\partial A_y}{\partial y} \int_{\Delta S_y} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} \int_{\Delta S_y} \xi d\xi d\eta + \\ + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} \int_{\Delta S_y} \eta d\xi d\eta + \dots &= \frac{\partial A_y}{y} \Delta x \Delta y \Delta z + 0[(\Delta x)^2, (\Delta z)^2]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Entonces para (5.8) obtenemos

$$I_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + 0[(\Delta x \Delta y \Delta z)^2]. \quad (5.13)$$

De la misma manera calculemos los flujos que atraviesan los otros pares de caras:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + 0[(\Delta x \Delta y \Delta z)^2]. \quad (5.14)$$

Poniendo (5.14) en (5.3) y teniendo en cuenta que el volumen del cubo es igual a  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , hallamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + 0[(\Delta x \Delta y \Delta z)^2] / (\Delta x \Delta y \Delta z) \right\} = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

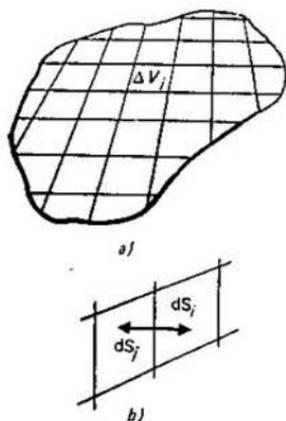


Fig. 14  
Para la deducción de la fórmula  
de Gauss — Ostrogradski

ya que el sumando, dependiente de  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ , se reduce a cero durante el paso al límite. La fórmula

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5.16)$$

permite calcular la divergencia en coordenadas cartesianas.

**Fórmula de Gauss—Ostrogradski.** Esta fórmula relaciona la potencia de las fuentes con los flujos de vectores que engendran y desempeña un papel importante en la teoría de la electricidad. Dividamos el volumen  $V$ , delimitado por la superficie  $S$  (fig. 14, a), en una gran cantidad de pequeños volúmenes  $\Delta V_i$ , cuyas superficies son  $\Delta S_i$ .

La fórmula (5.3) puede representarse como

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i \approx \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.17)$$

donde  $(\operatorname{div} \mathbf{A})_i$  significa  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  en el  $i$ -ésimo volumen. En (5.17) se ha puesto el signo de igualdad aproximada puesto que a pesar de ser  $\Delta V_i$  pequeño, es finito. Al disminuir ilimitadamente  $\Delta V_i$ , la relación (5.17) se hace exacta. Sumemos ambos miembros de (5.17) respecto a todas las células del volumen  $V$ :

$$\sum_i (\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i \approx \sum_i \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.18)$$

La suma del segundo miembro puede transformarse de la siguiente manera. Las células adyacentes poseen una superficie común de contacto. Todas las células interiores se encuentran en contacto por toda su superficie con las células adyacentes. Por eso en la suma del segundo miembro de (5.18) la integral por cada superficie dentro del volumen  $V$  participa dos veces como la integral de las partes en contacto de las células adyacentes (fig. 14, b;  $dS_i$  es opuesto a  $dS_j$ ). Dado que la dirección de las normales en cada uno de los pares de esas integrales es opuesta, mientras que el vector  $\mathbf{A}$  tiene un mismo módulo, los valores absolutos de dichas integrales son iguales, pero tienen signos contrarios. Por consiguiente, la suma de esas integrales es nula, por lo tanto, en el segundo miembro de (5.18) todas las integrales por la superficie de contacto de las células dentro del volumen  $V$  se anulan, quedando sólo la suma de las integrales por aquellas partes de las células en el límite del volumen  $V$  que no están en contacto con otras células. La suma de las áreas de estas superficies exteriores de las células, yacentes en el límite del volumen  $V$ , es el área de la superficie  $S$  que acota el

volumen  $V$ . Por lo tanto,

$$\sum_i \oint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (5.19)$$

con la particularidad de que esta igualdad es exacta y válida para cualquier partición del volumen  $V$  en células  $\Delta V_i$ .

El primer miembro de (5.18) para  $\Delta V_i \rightarrow 0$  puede expresarse en forma de una integral:

$$\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta V_i} (\operatorname{div} \mathbf{A})_i \Delta V_i = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV. \quad (5.20)$$

Sustituyendo (5.19) en (5.18) y pasando al límite, obtenemos la fórmula

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}, \quad (5.21)$$

que recibe el nombre de **fórmula de Gauss—Ostrogradski**. *Ella vincula la integral por el volumen respecto a la divergencia del vector con el flujo de este vector a través de la superficie cerrada que limita el volumen.* En las matemáticas se indican las condiciones de aplicación de esta fórmula, que aquí no se citan, ya que en la mayoría de las situaciones físicamente reales ellas se cumplen automáticamente.

**Enunciación diferencial del principio de conservación de la carga.** En la fórmula (5.1) el volumen  $V$  y la superficie  $S$  no varían con el tiempo. Por lo tanto, la derivada con relación al tiempo en el primer miembro de (5.1) puede introducirse bajo el signo de integral. Por otra parte, aplicando la fórmula de Gauss—Ostrogradski, el segundo miembro de la igualdad puede transformarse en la integral respecto al volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV. \quad (5.22)$$

Trasladando todos los términos de (5.1) al primer miembro y tomando en consideración (5.22), obtenemos

$$\int_A \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV = 0. \quad (5.23)$$

Esta igualdad es válida para cualquier volumen. Es obvio que el integrando es idénticamente igual a cero. La demostración se lleva a cabo por reducción al absurdo. Si en cierto punto el integrando no es nulo, a título de  $V$  puede tomarse un volumen pequeño en las proximidades de este punto, en cuyos límites el integrando conserva el signo. La integral respecto a esa zona no es nula, lo que está en contradicción con la igualdad inicial (5.23). Por esta razón, el in-

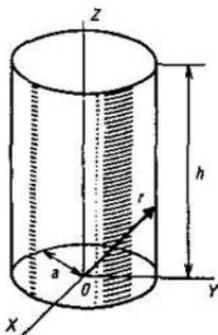


Fig. 15  
Para el cálculo del flujo del radio vector a través de la superficie de un cilindro recto

tegrando es igual a cero en todos los puntos. Entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (5.24)$$

La igualdad (5.24) es la expresión del principio de conservación de la carga en forma diferencial y se denomina también ecuación de continuidad.

¿Qué demandas debe satisfacer un volumen físico infinitamente pequeño?

¿Para qué condiciones puede hacerse uso del concepto de distribución continua de las cargas? ¿Es posible siempre determinar la densidad volumétrica de la carga? Cítese ejemplos. ¿Para qué condiciones puede emplearse la representación de las cargas superficiales?

¿Qué relación existe entre la dirección del vector de densidad de corriente y la dirección del vector de velocidad de la carga?

La carga se conserva para todos los movimientos y autotransformaciones de los portadores de carga.

La divergencia caracteriza la potencia de las fuentes. La fórmula de Gauss—Ostrogradski enlaza la potencia sumaria de las fuentes en el volumen con el flujo del vector, engendrado por las fuentes, que atraviesa la superficie que limita el volumen.

La carga no es una substancia independiente de la materia, sino que es una de las propiedades de ella.

¿Cuáles son los dos grupos de diferentes hechos que se describen por el concepto de conservación de la carga?

¿Cuál es el sentido físico de la igualdad, expresada por el teorema de Gauss—Ostrogradski?

¿Qué condición debe cumplirse para que de la igualdad a cero de la integral se desprenda la igualdad a cero del integrando?

**Ejemplo 5.1.** Calcular el flujo del radio vector a través de la superficie de un cilindro circular recto (fig. 15). Realícese el cálculo directamente y aplicando la fórmula de Gauss—Ostrogradski.

Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de la base del cilindro y dirijamos el eje Z a lo largo del eje del cilindro (véase la fig. 15). Entonces,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{inf}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{sup}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $S_{\text{inf}}$ ,  $S_{\text{sup}}$  y  $S_{\text{lat}}$  son las áreas de las bases inferior y superior del cilindro y de la superficie lateral, respectivamente. Tenemos:

$$\int_{S_{\text{inf}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \int_{S_{\text{sup}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = h\pi a^2,$$

ya que para los puntos en la superficie de las bases inferior y superior  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = r \cdot dS \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = 0$ ,  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = r \cdot dS \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = h \cdot dS$ . Por fin, para la integral con respecto a la superficie

lateral  $\int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = a \cdot 2\pi ah$ ; puesto que para los puntos en la superficie lateral  $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = a \, dS$ .

Por consiguiente,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3\pi a^2 h. \quad (5.25)$$

Según el teorema de Gauss—Ostrogradski,

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \operatorname{div} \mathbf{r} \, dV = 3\pi a^2 h, \quad (5.26)$$

onde  $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$ ,  $V = \pi a^2 h$  (el volumen de un cilindro circular recto).

## § 6. Ley de Coulomb

*Se examina la precisión de las verificaciones experimentales de la ley de Coulomb.*

**Verificaciones experimentales de la ley de Coulomb.** La ley de Coulomb para la fuerza  $F$  de interacción de dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  que se encuentran a la distancia  $r$ , tiene la forma

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (6.1)$$

donde  $\epsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$  F/m. Fue establecida por Ch.A. de Coulomb (1736—1806) en 1785 midiendo directamente las fuerzas de interacción entre los cuerpos con carga, cuyas dimensiones eran mucho más pequeñas que la distancia entre ellos. La precisión de las pruebas no era grande. Sólo por razones generales, basadas en la analogía con las fuerzas de la gravedad, existía la seguridad de que dicha ley era absolutamente correcta.

La ley de Coulomb (6.1) entra en el número de hechos experimentales principales en los que se fundamenta la teoría de la electricidad. Las tareas más importantes, cuya solución atrajo los esfuerzos considerables de los experimentadores, son la verificación de su validez y determinación de los límites de su aplicación.

Midiendo directamente las fuerzas de interacción, es difícil verificar la ley (6.1) con gran precisión, ya que los experimentadores carecen de cargas puntuales en reposo. Por esta razón, por lo general, se comparan las consecuencias de la ley de Coulomb y los resultados de los experimentadores y, basándose en esta comparación, se deducen los límites de su aplicación y precisión.

La primera verificación de la ley se realizó en 1772 por H. Cavendish (1731—1810), 13 años antes de ser descubierta ésta por Coulomb. Pero como Cavendish no publicó su trabajo, perdió la prioridad del descubrimiento. Al original con la descripción de sus experimentos se encontró en los archivos sólo hacia el final de los años 60 del siglo XIX. El método de Cavendish tenía gran

empleo y en los últimos años permitió comprobar la ley de Coulomb con gran precisión.

La tarea de la verificación experimental se enuncia de la siguiente manera. La ley de interacción se representa así

$$F = \text{const}/r^{2+\alpha}. \quad (6.2)$$

Se requiere hallar el orden de infinitud de  $\alpha$ . Cuanto menos es  $|\alpha|$ , tanto más se aproxima la ley de interacción a la de Coulomb. Por eso, el resultado de la prueba se expresa como una restricción a la de Coulomb. Por eso, el resultado de la prueba se expresa como una restricción a  $\alpha$ :  $|\alpha| \leq \delta$ . La tarea del experimento consiste en definir el valor de  $\delta$ .

**Método de Cavendish.** Las cargas libres en un conductor homogéneo se sitúan en su superficie. A primera vista parece ser consecuencia de la repulsión

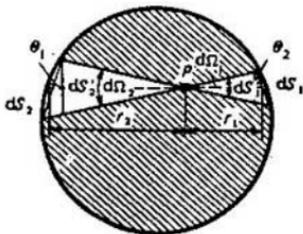


Fig. 16  
Para la teoría del método de Cavendish

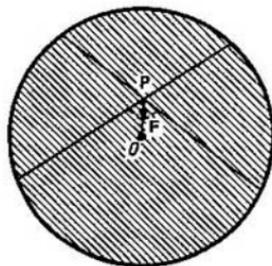


Fig. 17  
Aparición de la fuerza por parte de la capa esférica en los puntos dentro de la esfera

de las cargas del mismo signo, a causa de la cual las cargas tienden a separarse a las máximas distancias, dirigiéndose hacia la superficie del conductor. En cambio, eso es incorrecto. *Semejante situación surge debido a que la fuerza de interacción de las cargas puntuales disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, y no conforme a otra ley.*

De la teoría de la gravedad se sabe que una capa homogénea esférica de una substancia en cierta cavidad, rodeada por esta capa, no crea ninguna fuerza. De aquí se desprende que si las cargas eléctricas puntuales actúan recíprocamente por la ley de los cuadrados inversos de las distancias, la capa esférica de las cargas no crea ninguna fuerza en esta cavidad.

Supongamos que la carga está distribuida uniformemente por la superficie de la esfera con una densidad superficial  $\sigma$  (fig. 16). Dentro de la esfera en el punto  $P$  las cargas que se encuentran en los elementos de la superficie  $dS_1$  y  $dS_2$ , crean fuerzas, dirigidas opuestamente,  $dF_1 = \sigma dS_1 / (4\pi\epsilon_0 r_1^2)$  y  $dF_2 = \sigma dS_2 / (4\pi\epsilon_0 r_2^2)$ . Partiendo de las propiedades de las tangentes hacia los extremos de la cuerda se deduce que los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  entre las perpendiculares res-

pecto a la cuerda y los elementos de la superficie  $dS_1$  y  $dS_2$  son iguales. Entonces  $dS_1 = dS'_1/\cos \theta$  y  $dS_2 = dS'_2/\cos \theta$ . Por consiguiente,  $dF_1 = \sigma dS'_1 / (4\pi\epsilon_0 r_1^2 \cos \theta)$ ,  $dF_2 = \sigma dS'_2 / (4\pi\epsilon_0 r_2^2 \cos \theta)$ , donde  $dS'_1/r_1^2 = d\Omega_1$  y  $dS'_2/r_2^2 = d\Omega_2$  son ángulos sólidos, bajo los cuales  $dS_1$  y  $dS_2$  se ven desde el punto  $P$  (son iguales por su construcción). Así pues, las fuerzas  $dF_1$  y  $dF_2$ , de igual módulo, están orientadas en sentido opuesto, como consecuencia de que sus cargas en  $dS_1$  y  $dS_2$  tienen el mismo signo. Como resultado sucede la compensación mutua de las fuerzas, pertenecientes a todos los pares de elementos superficiales, situados en sentido opuesto, y la fuerza total que actúa sobre la carga de prueba en el punto  $P$ , es nula.

Si a la esfera conductora se le comunica carga, ésta se distribuye uniformemente por la superficie de la esfera debido a la simetría esférica. La ausencia de cargas en el volumen se demuestra de la siguiente manera. Sea que dentro de la esfera hayan ciertas cargas. Merced a la simetría esférica, su distribución debe ser esféricamente simétrica. Examinemos cierta capa esférica de cargas. Las cargas que se encuentran fuera de la cavidad, limitada por la capa esférica, no ejercen ninguna fuerza sobre las cargas de la capa. Sobre ellas actúan sólo las fuerzas de repulsión por parte de las cargas que se hallan dentro de la cavidad, limitada por la capa esférica. Pero ello significa que la capa esférica de cargas empezará a moverse desde el centro a la periferia. De esta manera, en el caso de distribución uniforme, no existen cargas dentro de la esfera conductora.

Otro caso es si la ley de interacción se diferencia de la de Coulomb. En este caso en el punto  $P$ , por parte de las cargas  $\sigma dS_1$  y  $\sigma dS_2$ , situadas en los elementos superficiales  $dS_1$  y  $dS_2$ , actúan las fuerzas:

$$\begin{aligned} dF_1 &= \text{const} \frac{dS_1 \sigma}{r_1^{2+\alpha}} = \frac{\text{const} \cdot \sigma}{\cos \theta} d\Omega_1 \frac{1}{r_1^\alpha}, \\ dF_2 &= \text{const} \frac{dS_2 \sigma}{r_2^{2+\alpha}} = \frac{\text{const} \cdot \sigma}{\cos \theta} d\Omega_2 \frac{1}{r_2^\alpha}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

cuya resultante es

$$\Delta F = A \left( \frac{1}{r_2^\alpha} - \frac{1}{r_1^\alpha} \right) \quad (6.4)$$

no es nula. En la fórmula (6.4)  $A$  significa los mismos factores antes de  $1/r_1^\alpha$  y  $1/r_2^\alpha$  en (6.3).

La existencia de la fuerza  $\Delta F$  conduce a que sea posible la distribución uniforme de las cargas por todo el volumen de la esfera conductora, ya que sobre la carga dentro de la esfera actúan fuerzas no sólo por parte de las capas esféricas interiores, sino también de las exteriores, con la particularidad de que el carácter de su acción depende del signo de  $\alpha$ .

Examinemos el caso cuando  $\alpha > 0$ . La fuerza que ejerce la carga ( $\sigma > 0$ ), situada respecto al punto  $P$  (fig. 16) en el elemento superficial más alejado, es interior a la que existe por parte de la carga que posee el elemento superficial más próximo. Por lo tanto, la fuerza está dirigida hacia el elemento superficial más alejado. Sumando todos los pares posibles de elementos superficiales, llegamos a la conclusión de que la resultante  $F$  está orientada hacia el centro  $O$  (fig. 17). Por consiguiente, dentro de la esfera de radio  $OP$  puede crearse una

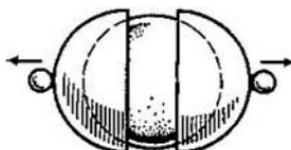


Fig. 18  
Método de Cavendish para verificar la ley de Coulomb

distribución de la carga tal, que la fuerza en el punto  $P$ , originada por esta distribución, compense la fuerza por parte de las cargas en las capas esféricas exteriores. Debido a ello, la capa de cargas en la esfera de radio  $OP$  puede hallarse en equilibrio. Es necesario elegir la distribución de la densidad de las cargas según el radio, para que en cada punto dentro de la esfera la fuerza sea nula. Semejante distribución será de equilibrio. Así pues, para  $\alpha > 0$  en la esfera conductora con carga éstas existen no sólo en la superficie como para  $\alpha = 0$ , sino también en el volumen. Una deducción semejante se hace para  $\alpha < 0$ . Puede efectuarse un cálculo matemático más detallado y hallar la carga en el volumen como función de  $\alpha$ . El método de Cavendish consiste en la medición de la carga en el volumen de la esfera y el posterior cálculo del valor de  $\alpha$ .

A la esfera conductora (fig. 18) se le acerca una envoltura esférica conductora separable que consta de dos semiesferas. Al colocarla encima de la esfera, el sistema adquiere carga eléctrica. Luego la envoltura se quita de la esfera mediante unas manecillas aislantes y se investiga la carga que quedó en ella.

*Si es válida la ley de Coulomb, toda la carga debe estar en la envoltura y eliminarse con ella. La carga que queda en la esfera es igual a cero.*

*Si existe cierta desviación de dicha ley, parte de la carga se concentra en el volumen de la esfera y parte de ella está en la envoltura. Después de quitar la envoltura, en la esfera queda cierta carga. Determinándola, puede estimarse  $\alpha$ .* Claro que en los ensayos no puede medirse directamente la carga, sino los potenciales, lo que no cambia el quid de la cuestión.

Cavendish obtuvo que  $|\alpha| \leq 0,02$ . Aproximadamente, cien años más tarde Maxwell realizó las mismas pruebas, obteniendo  $|\alpha| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ . En 1971 el método de Cavendish fue perfeccionado. El experimento se llevaba a cabo no en el régimen estático, sino que con ayuda de potenciales que varían con el tiempo. El dispositivo consta de dos esferas conductoras concéntricas. A la exterior se le suministraba una tensión alterna de  $\pm 10$  kV respecto a la Tierra. En caso de desviarse de la ley de Coulomb, el potencial de la esfera interior debe variar respecto a la Tierra. Los investigadores podían detectar una diferencia de potencial inferior a 1 pV. Ellos no encontraron oscilaciones del potencial en la esfera interior, lo que permitió tomar  $|\alpha| \leq |2,6 \pm 3,1| \cdot 10^{-16}$ .

Estos ensayos han confirmado, con una precisión extremadamente grande indicada, la ley de Coulomb para las distancias desde varios milímetros hasta decenas de centímetros.

Verificación de la ley para distancias grandes. Resulta difícil ya aplicar el método de Cavendish para verificar la ley de Coulomb para distancias, iguales a varios metros y más. Para esas distancias se utilizan métodos indirectos, cuya argumentación yace fuera de los márgenes de la teoría clásica de la electricidad. Se hace uso de las representaciones cuánticas sobre la interacción de las partículas, teniendo en cuenta sus propiedades ondulatorias. Cada interac-

ción se determina por un tipo concreto de partículas. La ley de interacción depende de las propiedades de las partículas que determinan la interacción y en primer lugar, de su masa. Si la masa en reposo de las partículas responsables de la interacción, es nula, la fuerza de interacción es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias y el potencial de interacción es inversamente proporcional a la distancia. Pero si las partículas que ejercen la interacción, poseen una masa en reposo diferente de cero, el potencial varía según la ley  $\sim (1/r) \exp(-\mu r)$ , donde  $\mu$  depende de la masa en reposo de las partículas. Siendo la masa en reposo nula,  $\mu$  es igual a cero y el potencial varía inversamente proporcional a la distancia como debe ser para la ley de Coulomb y la ley de la gravitación de Newton. Según las representaciones actuales, las interacciones electromagnéticas están determinadas por los fotones. Por esta razón, la cuestión sobre la validez de la ley de Coulomb se reduce a la cuestión sobre la igualdad a cero de la masa en reposo de los fotones.

Todas las partículas, además de propiedades corpusculares, poseen propiedades ondulatorias. La energía  $\epsilon_{\text{fot}}$  de los fotones está relacionada con la frecuencia y la masa mediante las relaciones:  $\epsilon_{\text{fot}} = \hbar\omega$  y  $\epsilon_{\text{fot}} = m_{\gamma}c^2$ , donde  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J·s es la constante de Planck y  $m_{\gamma}$ , la masa del fotón. Esta última es mayor que la masa en reposo si es que el fotón la tiene. Por eso, hallando el límite superior de  $m_{\gamma}$ , encontramos la restricción para la masa en reposo del fotón. Al demostrar de modo experimental la existencia de ondas electromagnéticas de una longitud suficientemente grande, puede afirmarse que el valor de  $m_{\gamma}$  es bastante pequeño. Si se lograra demostrar la existencia de ondas electromagnéticas de una longitud infinita de onda, se podría afirmar que la masa en reposo del fotón es nula y, por lo tanto, es válida absolutamente la ley de Coulomb.

Las ondas electromagnéticas más largas, que se logra observar en la actualidad, se forman como ondas estacionarias en el espacio entre la superficie terrestre y la ionosfera. Se denominan **resonancias de Schumann**. La resonancia mínima de Schumann corresponde a la frecuencia  $\nu_0 = 8$  Hz. Basándose en esto y teniendo en cuenta la distancia entre la superficie de la Tierra y la ionosfera, asimismo las condiciones de formación de las ondas estacionarias, para la masa del fotón obtenemos  $m_{\gamma} < 10^{-48}$  kg. Dicha estimación muestra que la ley de Coulomb se cumple con una precisión extremadamente grande, ya que la desigualdad  $|\alpha| \leq 10^{-16}$  equivale a  $m_{\gamma} \leq 10^{-50}$  kg.

Se han llevado a cabo experimentos relacionados con la investigación del campo magnético mediante los satélites en el espacio circunterrestre. Estas pruebas permitieron determinar la precisión con que se cumple la ley de Coulomb a grandes distancias. Se ha establecido que la ley de Coulomb se cumple con una precisión muy elevada hasta las distancias del orden de  $10^7$  m. No hay duda alguna de que también a mayores distancias se cumple la ley de Coulomb, a pesar de que no se llevaron a cabo verificaciones experimentales directas.

**Verificación de la ley para distancias pequeñas.** La ley de Coulomb a pequeñas distancias se comprueba en los experimentos de la interacción de las partículas elementales. Ya los ensayos de Rutherford permitieron sacar la conclusión de que la ley de Coulomb es válida con gran precisión hasta las distancias de

hasta  $10^{-15}$  m. *Los experimentos posteriores de la dispersión elástica de los electrones para las energías de varios miles de millones de electrón-voltios mostraron que la ley de Coulomb se cumple hasta las distancias de  $10^{-17}$  m.*

Para interpretar dichos experimentos se utiliza la electrodinámica cuántica.

**Interpretación de campo de la ley de Coulomb.** Antes de aparecer los trabajos de Faraday, la ley de Coulomb se interpretaba partiendo de la acción a distancia, o sea, se consideraba que un cuerpo actúa sobre otro sin intermediarios. Por esta razón, ese concepto tenía el nombre de acción a distancia. En la primera mitad del siglo XIX surgió otro punto de vista del mecanismo de interacción, conforme al cual la interacción entre los cuerpos se efectúa sólo mediante una «transmisión de fuerzas» continua a través del espacio entre los cuerpos. Semejante idea recibió el nombre de acción a corta distancia. Dicho concepto fue introducido en la ciencia por M. Faraday (1791—1867) en varios trabajos, publicados en el período de 1831 a 1855. A la par con la idea sobre la acción a corta distancia, en la ciencia apareció el concepto de campo como intermediario que efectúa la interacción. Primero las funciones de intermediario se le atribuyeron al medio que ocupa todo el espacio, recibiendo el nombre de éter. El estado del éter se caracterizaba por determinadas propiedades mecánicas, tales como la elasticidad, tensión, el movimiento de unas partes del medio con relación a otras, etc. Según esta interpretación, la fuerza que actúa sobre el cuerpo, es consecuencia de la interacción del cuerpo con el medio en el punto donde se encuentra el cuerpo. Así pues, *el mecanismo de interacción se enuncia como relaciones locales.* En 1861—1862 Maxwell (1831—1879) intentó enunciar este cuadro mecánico de transmisión de las interacciones desde el punto de vista matemático. El quiso representar las fuerzas de interacción electromagnética como fuerzas mecánicas, determinadas por las tensiones y presiones en el éter. Luego pasó a la enunciación fenomenológica de la interacción, caracterizando el estado del medio con ayuda de los vectores  $E$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $B$ , a los que, sin embargo, no se les da ninguna interpretación mecánica. Hay que señalar que Maxwell no excluía la posibilidad de la interpretación mecánica de las ecuaciones fenomenológicas. En 1864 el científico formuló las ecuaciones del campo electromagnético (las ecuaciones de Maxwell). Posteriormente se aclaró que no se podía aplicar al éter propiedades mecánicas y hablar sobre el movimiento con relación al éter. *Se esfumó la esperanza de la interpretación mecánica de las interacciones electromagnéticas. Sin embargo, la idea de la formulación local de la interacción y la necesidad de que exista en el espacio un campo que efectúe dicha interacción, se conservaron. El campo se convierte en una esencia primordial y se caracteriza por magnitudes que no pueden interpretarse en los márgenes de las representaciones mecánicas.* Esta afirmación en una forma más precisa fue enunciada en 1889 por Hertz (1857—1894) que descubrió experimentalmente las ondas electromagnéticas y formuló las ecuaciones de Maxwell para el vacío en la forma actual. Está claro que el campo existe en el espacio y el tiempo a la par con la materia en forma de átomos, moléculas, etc.

Por lo tanto, el campo es también una forma de la materia que posee características, propias para cada materia, a saber: impulso, energía, etc.

**Campo eléctrico.** Designemos:  $F_{12}$ , la fuerza que ejerce la carga  $q_1$  sobre la carga  $q_2$ ;  $F_{21}$ , la fuerza por parte de la carga  $q_2$  sobre la carga  $q_1$ ;  $r_{12}$  y  $r_{21}$ , los vectores, trazados desde el punto de estancia de la primera carga hacia el punto donde está la segunda carga y viceversa. Conforme con ello, escribamos la ley de Coulomb en la forma:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}} q_2, \quad (a)$$

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{21}^2} \frac{r_{21}}{r_{21}} q_1. \quad (b)$$

Estas dos fórmulas son diferentes por su contenido físico y determinan las fuerzas que actúan sobre la segunda carga y la primera en el punto de su estancia, es decir, describen las fuerzas en distintos puntos espaciales. Pero *el mecanismo de aparición de estas fuerzas es igual. Las cargas  $q_1$  y  $q_2$  crean un campo eléctrico en el espacio que los rodea, el cual se caracteriza por la intensidad  $E$ . La intensidad del campo es un concepto local y tiene un significado determinado en cada punto del espacio. Se llama intensidad del campo eléctrico en un punto la magnitud, igual a la relación entre la fuerza con que el campo actúa sobre una carga positiva, colocada en el punto dado del campo, y la carga. En cambio, de aquí no se desprende que para medir la intensidad del campo es suficiente colocar una carga positiva en cierto punto del espacio y medir la fuerza que actúa sobre ella.*

*En muchos casos la introducción de la carga en el punto dado va acompañada de una intensa variación de la intensidad del campo eléctrico en el punto y el resultado de la medición suele ser alterado (véase el § 7).*

Teniendo en cuenta lo dicho, las fórmulas (6.5) pueden representarse como

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \frac{r_{12}}{r_{12}}, \quad (a) \quad F_{12} = F_2 = q_2 E_2, \quad (b)$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{21}^2} \frac{r_{21}}{r_{21}}, \quad (a) \quad F_{21} = F_1 = q_1 E_1, \quad (b)$$

La fórmula (6.6a) describe la intensidad del campo eléctrico, formado por la carga puntual  $q_1$ , mientras que la fórmula (6.6b) caracteriza la fuerza con la que el campo de intensidad  $E_2$  actúa sobre la carga que se encuentra en un punto del campo. El mismo sentido tienen las fórmulas (6.7).

Así pues, la acción de una carga sobre la otra se divide en dos etapas:

1. La carga puntual  $q$  crea en el espacio que lo rodea un campo eléctrico, cuya intensidad

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (6.8)$$

donde  $r$  es el radio vector, trazado desde el punto de estancia de la carga hasta el punto donde se determina la intensidad (fig. 19).

2. La carga puntual  $q$  que se halla en el punto del campo con intensidad  $E$ , se somete por parte de este campo a la acción de la fuerza

$$F = qE.$$

(6.9)

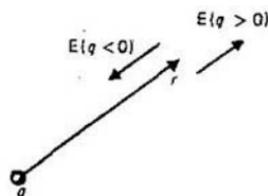


Fig. 19  
Interpretación de la ley de Coulomb respecto al campo

La enunciación de la segunda etapa de interacción, expresada por la fórmula (6.9), es local: la intensidad  $E$ , la carga  $q$  y la fuerza  $F$  se determinan en un mismo punto. La formulación de la primera etapa de interacción, expresada por la fórmula (6.8), no es local: la intensidad  $E$  en el primer miembro de (6.8) depende no sólo del punto donde se define, sino también del punto de estancia de la fuente del campo. Con otras palabras, (6.8) es la relación entre las magnitudes que se refieren a diversos puntos del espacio, es decir, tiene carácter no local. La enunciación local se da en el § 13.

Sobre los límites de aplicación de la concepción clásica de campo. Antes se supuso que la intensidad  $E$  varía continuamente y lo suficiente suave en el espacio y el tiempo. En cambio, en los márgenes de las representaciones cuánticas la fuerza de interacción entre los cuerpos con carga surge como consecuencia del intercambio de fotones. De aquí se desprende el carácter discreto de la interacción. Pero eso significa que la intensidad  $E$  no puede interpretarse como una magnitud continua que varía suavemente en el espacio y el tiempo. Se pregunta: ¿para qué condiciones puede considerarse continua a pesar de todo? Está claro que eso puede realizarse sólo a condición de que la acción de cuantos aislados es pequeña en comparación con la acción total, o sea, cuando los fenómenos en cuestión dependen de la acción simultánea de una cantidad inmensa de cuantos. Semejante situación se encuentra con mucha frecuencia. Por ejemplo, una bombilla de 200 W de potencia a la distancia de 2 m da un flujo de fotones de luz visible aproximadamente igual a  $10^{15}$  fotones/(cm<sup>2</sup>·s). El área de la pupila del ojo es mucho menor que un cm<sup>2</sup>, sin embargo, la cantidad de fotones que llega al ojo en el transcurso de 1 s es muy grande. Por esta razón, el flujo de fotones se percibe como continuo. En cambio, disminuyendo la intensidad luminosa, puede lograrse una posición en la que al ojo llegue sólo una cantidad pequeña de fotones por segundo. En condiciones especiales el ojo puede percibir fotones aislados en forma de relámpagos separados. En este caso ya es imposible utilizar el concepto de flujo continuo de luz. Las estaciones de radio de la gama de ondas ultracortas en la URSS funcionan en frecuencias de 60 . . . 70 MHz. A la distancia de 10 km semejante estación de 200 W de potencia emite un flujo de unos  $4 \cdot 10^{14}$  cuantos/(cm<sup>2</sup>·s), lo que corresponde a la densidad de  $10^4$  cuantos/cm<sup>3</sup>. Por lo tanto, en un volumen igual al cubo de la longitud de onda ( $\approx 64$  m<sup>3</sup>) se encuentran más de  $10^{11}$  cuantos de emisión. En estas condiciones es también difícil fijar el campo de un cuanto aislado. En aquellos casos cuando la acción de los cuantos aislados no se manifiesta, puede utilizarse la descripción clásica. Ello es posible si la cantidad de cuantos es grande, mientras que el impulso de un cuanto es pequeño en comparación con el impulso del sistema material. Por ejemplo, la radiación de un átomo aislado no se puede examinar desde el punto de vista clásico, puesto que la cantidad de fotones antes de la radiación era nula y después de ella, existe sólo un fotón.

Si se cumple estrictamente la ley de Coulomb, la carga de la esfera conductora se distribuye por su superficie. Al desviarse de la ley de Coulomb, la carga existe también en el volumen de la esfera.

La representación de la interacción continua clásica es válida sólo a condición de que la acción de cuantos (fotones) aislados es pequeña en comparación con la acción total, es decir, cuando el fenómeno en cuestión depende de la participación simultánea de una inmensa cantidad de cuantos y cuando la acción de cuantos aislados no se manifiesta.

La definición de la intensidad del campo eléctrico no está ligada con la pequeñez de las cargas de prueba.

¿En qué ley física se funda el método de Cavendish para verificar la ley de Coulomb? ¿Cuál es la precisión de la verificación de la ley de Coulomb usando el método de Cavendish, pero con procedimientos modernos? ¿Para qué distancias son válidas estas pruebas?

¿En qué consiste el método de verificación de la ley de Coulomb para distancias grandes? ¿Para qué distancias existen resultados directos de la verificación? ¿Cuáles son?

¿En qué se basa la verificación de la validez de la ley de Coulomb para distancias muy pequeñas? ¿Cuáles son los resultados de la prueba?

¿En qué se diferencian los conceptos de campo electromagnético y de éter?

## § 7. Principio de superposición

*Se analiza el contenido físico del principio de superposición y se discuten los límites de su aplicación.*

**Principio de superposición para la interacción de las cargas puntuales.** Las fuerzas de interacción de dos cargas aisladas puntuales se definen mediante la ley de Coulomb (6.1). ¿Cambia esta fuerza si en las proximidades de dos cargas en interacción existe otra carga puntual más? Para que el interrogatorio tenga un sentido unívoco es necesario precisar lo que se comprende por fuerzas de interacción de dos cargas en presencia de una tercera (se supone que todas las cargas son inmóviles).

Si por fuerzas de interacción se comprende la fuerza dirigida a lo largo de la línea que une las cargas en interacción, estas fuerzas dependen de la tercera carga y, además, no satisfacen la demanda de la igualdad de la acción y reacción. La dificultad consiste en que la fuerza que actúa sobre la carga, puede medirse, pero no está claro cómo diferenciar la aportación de distintas cargas en dicha fuerza. Sin embargo, la tercera carga puntual no se diferencia en nada de las dos cargas en cuestión y todas las tres son equitativas. Por esta razón, puede cambiarse el planteamiento de la pregunta. Existen tres cargas en interacción. Las fuerzas que actúan sobre cada una de las cargas son magnitudes que se miden experimentalmente. La ley de adición de las fuerzas según la regla del paralelogramo se conoce. Se pregunta: ¿es la fuerza a medir, que actúa sobre cada una de las cargas, igual a la suma de las fuerzas que ejercen las otras dos cargas si estas fuerzas se calculan conforme a la ley de Coulomb (6.1)? Señalemos que aquí se trata de la medición experimental de la fuerza y el cálculo matemático de las fuerzas según la ley (6.1) y su adición, aplicando la regla del paralelogramo. Semejante planteamiento tiene un sentido bien determinado y su res-

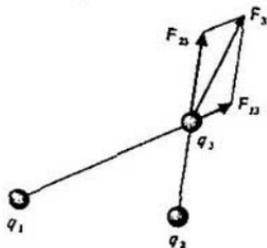


Fig. 20  
Principio de superposición

puesta puede obtenerse del experimento. Las investigaciones mostraron que *la fuerza a medir es siempre igual a la suma de las fuerzas calculadas por la ley de Coulomb, que ejercen dos cargas*. Ese resultado experimental se expresa en forma de las siguientes afirmaciones:

a) *la fuerza de interacción de dos cargas puntuales no varía, en presencia de otras cargas;*

b) *la fuerza que actúa sobre una carga puntual por parte de dos cargas puntuales es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre ella por parte de cada una de las cargas puntuales en ausencia de la otra.*

Esta afirmación se denomina **principio de superposición** y refleja un hecho experimental que forma uno de los cimientos de la teoría de la electricidad. Este es tan importante en la teoría de la electricidad como, por ejemplo, la ley de Coulomb. La generalización para el caso de muchas partículas es evidente.

**Enunciación con relación al campo del principio de superposición.** Examinemos la fuerza  $F_3$ , que actúa sobre la carga puntual  $q_3$ , habiendo otras dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  (fig. 20). Designemos por  $F_{13}$  y  $F_{23}$  las fuerzas que actúan sobre la carga  $q_3$  por parte de las cargas  $q_1$  y  $q_2$  cuando no existen las cargas  $q_2$  y  $q_1$ . El principio de superposición afirma que

$$F_3 = F_{13} + F_{23}. \quad (7.1)$$

Designemos por  $E_{13}$  y  $E_{23}$  las intensidades del campo eléctrico, creado por las cargas  $q_1$  y  $q_2$  en el punto con carga  $q_3$  en ausencia de la carga  $q_2$  o  $q_1$ , respectivamente. Por la fórmula (6.9) tenemos:

$$F_{13} = q_3 E_{13}, \quad F_{23} = q_3 E_{23}. \quad (7.2)$$

Escribamos la expresión (7.1) de nuevo:

$$F_3 = q_3 E_{13} + q_3 E_{23}. \quad (7.3)$$

La fuerza en el campo eléctrico surge como consecuencia de la acción del campo sobre la carga. Por lo tanto, la fuerza  $F_3$  en (7.3) testimonia la presencia de un campo eléctrico en el punto donde se halla la carga  $q_3$ . Este campo posee una intensidad  $E_3$  que determina la mencionada fuerza [véase (6.9)], o sea,

$$F_3 = q_3 E_3. \quad (7.4)$$

Sustituyendo (7.4) en (7.3) y reduciendo la expresión obtenida por el factor común  $q_3$ , hallamos

$$E_3 = E_{13} + E_{23}. \quad (7.5)$$

La igualdad (7.5) es la enunciación respecto al campo del principio de superposición: *la intensidad del campo de dos cargas puntuales es igual a la suma*

de las intensidades que crea cada una de las cargas en ausencia de la otra. Dicha enunciación es local, ya que todas las magnitudes se refieren a un punto del espacio.

La generalización para el caso de muchas cargas es evidente:

$$E = \sum E_i \quad (7.6)$$

es decir, *la intensidad del campo de cualquier número de cargas puntuales es igual a la suma de intensidades de los campos, creados por cada una de las cargas puntuales en ausencia de las demás.*

**Cargas de prueba.** De la definición de la intensidad del campo eléctrico se deduce que su medición se reduce a la medición de la fuerza que actúa sobre la carga puntual. Esta carga puntual, con cuya ayuda se determina la intensidad, se denomina *carga de prueba*. Surge la pregunta sobre el valor de la carga de prueba. *Si se supone que todas las cargas puntuales, cuya intensidad sumaria del campo se calcula, están fijas en los puntos del espacio, la carga de prueba puede ser cualquiera.* Pero sin embargo, si las cargas puntuales no están fijas en el espacio, la carga de prueba, actuando sobre estas cargas, puede desplazarlas a otros puntos del espacio. En este caso se hallará no la intensidad que había en el punto de estancia de la carga de prueba para la posición inicial de todas las cargas, sino otra intensidad que surge como consecuencia del desplazamiento de las cargas a una nueva posición, influenciadas por la carga de prueba. Para evitar eso hay que disminuir la influencia de la carga de prueba sobre las cargas que crean el campo a investigar. Por esta razón, *la carga de prueba debe ser suficientemente pequeña.* En cambio, es necesario señalar que *esta demanda no tiene relación alguna con el principio de superposición, solo asegura la observación de las condiciones para las cuales la intensidad del campo a investigar no varía esencialmente al medirla.*

**Límites de aplicación del principio de superposición.** Como testimonio experimental de la validez del principio de superposición sirve la concordancia entre las deducciones obtenidas mediante dicho principio y los resultados de los ensayos. Se ha establecido que *el principio de superposición se observa incluso hasta intensidades muy elevadas de los campos.* Toda la práctica ingenieril confirma bien su validez para las intensidades de los campos de varios millones de voltios por metro (electrotécnica, aceleradores, descargas de alta tensión, etc.). En los átomos y núcleos existen intensidades de campo mucho mayores. En las orbitales de los electrones en los átomos son iguales a  $E \approx 10^{11} \dots 10^{17}$  V/m. Las diferencias de los niveles energéticos de los átomos, calculadas conforme al principio de superposición, se confirman experimentalmente con un grado elevado de exactitud (el error relativo es no más de  $10^{-6}$ ). Esto significa que a intensidades de los campos interatómicos, el principio de superposición se observa también con gran precisión. En la superficie de los núcleos pesados las intensidades alcanzan valores enormes ( $E \approx 10^{22}$  V/m). Los datos experimentales testimonian que para estas inmensas intensidades se cumple también el principio de superposición. Sin embargo, en este caso se ponen al descubierto otros

efectos, a saber: para la intensidad de unos  $10^{20}$  V/m surge la polarización del vacío como consecuencia de la aparición de los pares electrón-positrón. Ello conduce a una no linealidad cuántica de interacción.

La fuerza de interacción de dos cargas puntuales no varía en presencia de otras cargas, mientras que la fuerza de interacción de los cuerpos cargados, en general, cambia en presencia de otros cuerpos con carga.

La carga de prueba se supone ser suficientemente pequeña. Pero esta demanda no tiene nada que ver con el principio de superposición que permanece siendo válido para cualesquiera valores de la carga de prueba.

¿Por qué la fuerza de interacción de dos cuerpos cargados cambia, en general, en presencia de un tercer cuerpo con carga?

¿Infringe esto el principio de superposición?

¿Qué hechos experimentales permiten juzgar sobre la validez del principio de superposición incluso hasta intensidades muy elevadas del campo eléctrico?

## § 8. Campo magnético

*Se analiza la naturaleza relativista del campo magnético. Aplicando las transformaciones relativistas, de la ley de Coulomb se deduce la ley de interacción de conductores paralelos.*

**Necesidad de la aparición de un campo magnético durante el movimiento de las cargas.** La interacción de las cargas inmóviles puntuales se describe totalmente por la ley de Coulomb. En cambio, *la ley de Coulomb resulta ser insuficiente para analizar la interacción de las cargas en movimiento*, con la particularidad de que semejante deducción se desprende no de las peculiaridades concretas de la interacción de Coulomb, sino que se determina por las propiedades relativistas del espacio y el tiempo y las ecuaciones relativistas del movimiento.

Esta afirmación se deduce, en principio, de las siguientes consideraciones. La ecuación relativista del movimiento

$$dp/dt = F \quad (8.1)$$

es invariante y tiene la misma forma en todos los sistemas inerciales de coordenadas, en particular, en el sistema de coordenadas  $K'$  que se mueve de modo uniforme y rectilíneo respecto a  $K$ :

$$dp'/dt' = F'. \quad (8.2)$$

Las letras con tildes señalan las magnitudes, referentes a  $K'$ . Los primeros miembros de estas ecuaciones están compuestos de magnitudes puramente mecánicas, cuyo comportamiento al pasar de un sistema de coordenadas a otro, se conoce. Por lo tanto, mediante cierta fórmula pueden relacionarse los primeros miembros de las ecuaciones (8.1) y (8.2). Pero entonces resultan enlazadas entre sí las fuerzas que se encuentran en el segundo miembro de estas ecuaciones. La exigencia de una invariación relativista de la ecuación de movimiento de-

termina la existencia de semejante enlace. Dado que en los primeros miembros de las ecuaciones (8.1) y (8.2) participan las velocidades, sacamos la conclusión de que la fuerza de interacción de las cargas en movimiento depende de la velocidad y no se reduce a la fuerza de Coulomb. De esta manera se demuestra que la interacción de las cargas en movimiento se efectúa no sólo por la fuerza coulombiana, sino que también por una fuerza de otra naturaleza, denominada magnética. La existencia de la fuerza magnética se aclara del siguiente ejemplo de interacción de las cargas.

**Interacción entre una carga puntual y un hilo infinito recto con carga.** Claro está que la interacción más sencilla de dos cargas puntuales que están en reposo en el sistema de coordenadas  $K'$ , es la de Coulomb. Sin embargo, en otro sistema de coordenadas  $K$ , que se mueve respecto a  $K'$ , estas cargas se mueven con las mismas velocidades y su interacción se complica, ya que debido al movimiento de las cargas, el campo eléctrico en cada punto del espacio es variable. Por eso es conveniente elegir una situación que sea lo suficiente sencilla tanto en el sistema de coordenadas  $K'$ , donde las cargas están en reposo, como también en el sistema de coordenadas  $K$ , en el que ellas se mueven. La interacción entre la carga puntual y un hilo recto infinito con carga resulta ser relativamente sencilla.

En el sistema de coordenadas  $K'$  el hilo está en reposo y se orienta a lo largo del eje  $X'$  (fig. 21). La carga puntual  $q$  está situada en el eje  $Y'$  a la distancia  $y'_0$  del hilo. Designemos por  $S'_0$  el área de la sección transversal del hilo, considerando sus dimensiones lineales muy pequeñas en comparación con la distancia hasta la carga puntual. Si la densidad volumétrica de la carga es  $\rho'$ , en el elemento de longitud  $dx'$  del hilo se encuentra una carga  $dq' = \rho' S'_0 dx'$ . Para mayor precisión suponemos que la carga del hilo y la puntual son positivas. Entonces las fuerzas que actúan sobre la carga puntual por parte de la carga en el elemento del hilo, están orientadas así como se muestra en la fig. 21. Según la ley de Coulomb

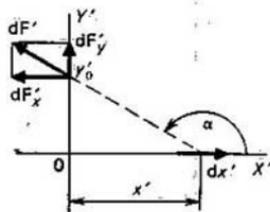


Fig. 21  
Para el cálculo de la fuerza de interacción entre una carga puntual y un hilo cargado recto infinito

$$dF'_x = \frac{q\rho' S'_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 (y_0'^2 + x'^2)} \cos \alpha,$$

$$dF'_y = \frac{q\rho' S'_0 dx'}{4\pi\epsilon_0 (y_0'^2 + x'^2)} \sin \alpha. \quad (8.3)$$

Tomando en consideración que  $\cos \alpha = -x' / (y_0'^2 + x'^2)^{1/2}$ ,  $\sin \alpha = y_0' / (y_0'^2 + x'^2)^{1/2}$ , para las proyecciones de la fuerza obtenemos

$$F'_x = -\frac{q\rho' S'_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}},$$

$$F'_y = \frac{q\rho' S'_0 y_0'}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}}. \quad (8.4)$$

La primera integral es nula, ya que en el integrando se encuentra una función impar, mientras que para calcular la segunda integral es necesario sustituir las variables:  $x' = -y'_0 \cot \alpha$ ,  $dx' = y'_0 d\alpha / \sin^2 \alpha$ ,  $1 + \cot^2 \alpha = 1/\sin^2 \alpha$ . Entonces

$$F'_x = 0, \quad F'_y = \frac{q\rho' S'_0}{4\pi\epsilon_0 y'_0} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{q\rho' S'_0}{2\pi\epsilon_0 y'_0}. \quad (8.5)$$

Además,  $F'_z = 0$ . Tomando en consideración que en el momento dado la carga está en reposo y designando por  $m_0$  la masa del portador de la carga, obtenemos para la aceleración de la carga en el sistema  $K'$  las siguientes expresiones:

$$a'_x = 0, \quad a'_y = F'_y/m_0 = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0 m_0), \quad a'_z = 0. \quad (8.6)$$

Examinemos ahora esta misma interacción en el sistema de coordenadas  $K$  que se mueve respecto al sistema  $K'$  con una velocidad  $v$  en dirección de los valores negativos del eje  $X'$ . Orientemos el eje  $X$  a lo largo del hilo de tal manera que su dirección positiva coincida con la dirección positiva del eje  $X'$  y consideremos que el mencionado sistema es inmóvil. En el sistema de coordenadas  $K$  el sistema  $K'$ , el hilo y la carga se mueven en dirección de los valores positivos del eje  $X$  con una velocidad  $v$ .

Calculemos la fuerza de repulsión coulombiana que ejerce el hilo en movimiento sobre la carga que se desplaza. Dado que la carga es invariante, la carga puntual  $q$  es invariable. Debido a la reducción de las escalas en movimiento, cada metro de longitud del hilo que se desplaza posee mayor cantidad de cargas que un metro de longitud del hilo inmóvil, o sea, la densidad de las cargas del hilo en movimiento es mayor que del inmóvil. En los cálculos anteriores la densidad de las cargas del hilo inmóvil se designó por  $\rho'$ . Por eso la densidad de las cargas en el hilo en movimiento en el sistema  $K$  es igual a

$$\rho = \rho' / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.7)$$

donde  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  tiene en cuenta la variación relativista de las escalas en movimiento. Todos los cálculos posteriores son totalmente análogos a los que se han hecho para el hilo en reposo. Dado que las longitudes permanecen constantes en dirección perpendicular a la velocidad  $v$ , el área de la sección transversal del hilo en movimiento y la distancia entre el hilo y la carga puntual quedan invariables. Por esta razón, en lugar de (8.5) obtenemos:

$$f_x = 0, \quad f_y = q\rho S_0 / (2\pi\epsilon_0 y_0), \quad f_z = 0, \quad (8.8)$$

con la particularidad de que aquí la fuerza coulombiana se denota por una letra minúscula para diferenciarla de la fuerza total que actúa sobre la carga y no se reduce a la fuerza de Coulomb. Sustituyendo (8.7) en la segunda ecuación de (8.8), hallamos

$$f_y = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0) \sqrt{1 - v^2/c^2} = q\rho' S'_0 / (2\pi\epsilon_0 y'_0) \sqrt{1 - v^2/c^2} = F'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.9)$$

donde  $S_0 = S'_0$ ,  $y_0 = y'_0$  y se toma en consideración la fórmula (8.5).

Hallemos la fuerza total que actúa sobre la carga puntual en el sistema de coordenadas  $K$ . Debido a la simetría, la fuerza está dirigida a lo largo del eje  $Y$  y relacionada con el impulso mediante la ecuación del movimiento:

$$F_y = dp_y/dt. \quad (8.10)$$

En el sistema de coordenadas  $K'$  este enlace tiene el aspecto

$$F'_y = dp'_y/dt'. \quad (8.11)$$

Según las fórmulas de transformación de la teoría de la relatividad

$$p'_y = p_y, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu_x/c^2} \quad (\beta = v/c), \quad (8.12)$$

donde  $u_x$  es la componente de la velocidad de la partícula en el sistema de coordenadas  $K'$ , con la particularidad de que en el caso dado  $u_x = 0$ . Teniendo en cuenta (8.12), de la ecuación (8.10) hallamos

$$F_y = dp_y/dt = (dp'_y/dt')(dt'/dt) = F'_y \sqrt{1-\beta^2}. \quad (8.13)$$

La comparación de (8.13) con (8.9) muestra que

$$F_y = (1 - \beta^2) f_y, \quad (8.14)$$

es decir, la fuerza coulombiana de repulsión  $f_y$  es mayor que la fuerza  $F_y$  que ejerce el hilo en movimiento sobre la carga que se desplaza. Por lo tanto, además de la fuerza coulombiana de repulsión, sobre la carga actúa otra fuerza más, diferente de la mencionada, que en este caso es la fuerza de atracción. Esta surge como consecuencia del movimiento de las cargas y se denomina fuerza magnética. Esta forma de interacción respecto al campo para la fuerza magnética se enuncia de la misma manera que la interpretación de la interacción eléctrica, respecto al campo: la carga en movimiento crea un campo magnético en el espacio que la rodea; el campo magnético ejerce una fuerza sobre la carga en movimiento.

**Naturaleza relativista del campo magnético.** Examinando (8.14) se ve que la fuerza magnética es igual a

$$F_{ym} = F_y - f_y = -v^2 f_y / c^2. \quad (8.15)$$

El signo menos significa que la fuerza está orientada hacia el hilo cargado, o sea, es una fuerza de atracción. Como se desprende de (8.15), esta fuerza se describe por una magnitud de segundo orden de pequeñez respecto a  $v/c$  con relación a la interacción de Coulomb. Por lo tanto, la interacción magnética es comparable por su magnitud con la eléctrica sólo cuando las partículas con carga poseen velocidades suficientemente grandes. No obstante, es notoria también para las pequeñas velocidades de las cargas si la interacción eléctrica coulombiana no se manifiesta por ciertas causas. Semejante situación tiene lugar, por ejemplo, habiendo corriente eléctrica en el conductor. En este caso, el campo eléctrico de las cargas en movimiento se neutraliza por el campo eléctrico de las cargas del conductor que poseen signo contrario, es decir, el campo se apantalla. En definitiva, queda sólo la fuerza magnética, infinitamente pequeña en compa-

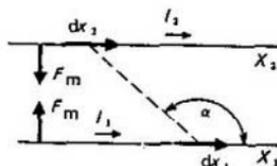


Fig. 22  
Interacción de dos corrientes paralelas

ración con la fuerza coulombiana si ella no estuviese apantallada. Por ejemplo, para las velocidades típicas de deriva de los electrones en un conductor metálico (véase el § 31), la fuerza magnética es más de  $10^{20}$  veces inferior a la de Coulomb, sin embargo, es lo suficientemente grande y se manifiesta como cierta interacción de los conductores con la corriente. Por esta razón, *el efecto puramente relativista de la aparición del campo magnético se revela para cualesquiera velocidades, no sólo para las muy grandes.*

**Fuerzas de interacción de los conductores paralelos con corriente.** Imaginemos que las cargas se mueven en un hilo cilíndrico fino que en total es eléctricamente neutro. Entonces las fuerzas coulombianas por parte de las cargas en movimiento, que forman la corriente eléctrica, se apantallan por las cargas de signos contrarios del hilo, de esta manera, fuera del hilo actúa sólo la fuerza magnética (8.15). Por lo tanto, alrededor del conductor con corriente se manifiesta sólo la acción de la fuerza magnética sobre las cargas en movimiento que forman la corriente eléctrica. Así, surge una interacción magnética de las corrientes. Ello ocurre como resultado del análisis relativista de la interacción de las cargas en movimiento. En cambio, la interacción magnética de las corrientes fue descubierta mucho antes de crearse la teoría de la relatividad.

Supongamos que las cargas en movimiento forman una corriente lineal, que pasa por un conductor, paralela a la corriente inicial, que fluye a lo largo del eje  $X$  y situada a la distancia  $r$  de él (fig. 22). Las magnitudes, referentes a la corriente inicial, las designaremos por los índices 1 y las pertenecientes a la corriente lineal, por los índices 2. La corriente  $I_1$  ejerce una fuerza magnética de atracción  $F_{mag}$  (8.15) sobre cada carga de la corriente  $I_2$ . Dicha fuerza puede representarse, teniendo en cuenta (8.8), como

$$F_{my} = -\frac{v^2}{c^2} \frac{q\rho_1 S_{01}}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} qv \frac{\rho_1 v S_{01}}{r} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} qv \frac{I_1}{r}, \quad (8.16)$$

donde  $\rho_1 v S_{01} = I_1$  [véase (4.11) y (4.14)],  $r = y_0$  [véase (8.8)].

Designemos la concentración lineal de las cargas en el segundo conductor por  $n_2$ . En el elemento de longitud  $dx_2$ , se encuentran  $n_2 dx_2$  cargas sobre las cuales actúa una fuerza magnética

$$dF_m = F_{my} n_2 dx_2. \quad (8.17)$$

Sustituyendo la expresión (8.16) en (8.17), obtenemos

$$dF_m = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I_1 q v n_2 dx_2}{r}, \quad (8.18)$$

donde  $q v n_2 = I_2$ . Además, en la teoría del magnetismo en lugar de la constante  $\epsilon_0$  se acostumbra utilizar  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ , que es la constante magnética. Enton-

cés [véase (8.18)]

$$dF_m = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} dx_2. \quad (8.19)$$

Ella caracteriza la interacción de las corrientes rectilíneas en conductores paralelos infinitos. Es necesario señalar que la condición para aplicar (8.19) es la pequeñez de las dimensiones transversales de los conductores en comparación con la distancia entre ellos (conductores finos y corrientes lineales).

**Unidad de la intensidad de corriente.** De la fórmula (8.19) se ve que a la longitud  $l_2$  del conductor le corresponde la fuerza

$$F_{m1} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} l_2. \quad (8.20)$$

El signo menos indica que para las mismas direcciones de  $I_1$  e  $I_2$  entre los conductores actúa la fuerza de atracción. Pero si las orientaciones de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  son distintas, surge la fuerza de repulsión.

A base de (8.20) se da la definición de unidad de intensidad de corriente: *amperio es la intensidad de la corriente continua que, manteniéndose en dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y de sección circular ínfima, situados a la distancia de 1 m uno de otro en el vacío, provoca entre estos conductores a aparición de una fuerza igual a  $2 \cdot 10^{-7}$  N por un metro de longitud.* Suponiendo en (8.20)  $I_1 = I_2 = 1$  A,  $r = 1$  m,  $l_2 = 1$  m,  $F_{m1} = -2 \cdot 10^{-7}$  N, hallamos

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2. \quad (8.21)$$

Como ya se señaló [véase (8.19)],

$$\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2, \quad (8.22)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Esta relación refleja el enlace profundo que existe entre los campos magnético y eléctrico y se caracteriza por la constante física fundamental  $c$ , igual a la velocidad de la luz. La naturaleza de este enlace se aclarará al estudiar las ondas electromagnéticas (véase el capítulo 9).

**Campo magnético.** Por analogía completa con la interpretación respecto al campo de la interacción coulombiana (véase el § 6), el proceso de aparición de la fuerza (8.18) puede formularse de nuevo en dos etapas: la generación del campo magnético por la corriente  $I_1$  en el espacio que rodea esta corriente y la acción del campo magnético sobre la carga en movimiento o la corriente. En cambio las leyes de aparición del campo magnético y de la acción de la fuerza resultan ser más complicadas que en la ley de Coulomb, ya que dependen de la orientación mutua de la corriente y la velocidad de la carga. Además, la corriente  $I_1$ , que fluye por un conductor infinitamente largo, no vale para el papel de objeto elemental, la interacción de la carga puntual con el cual puede considerarse como acción elemental. Por esta razón, es necesario volver a analizar la acción de las fuerzas sobre las cargas puntuales en movimiento o sobre los elementos de la corriente.

La ley de Coulomb es insuficiente para describir la interacción de las cargas en movimiento. Esta deducción no se desprende de las peculiaridades concretas de la interacción cou-

lombiana, sino que se determina por las propiedades relativistas del espacio y el tiempo, asimismo por la ecuación relativista del movimiento.

La interacción magnética es comparable con la eléctrica sólo a velocidades bastante grandes de las partículas cargadas. No obstante, puede manifestarse a velocidades muy pequeñas si por causa alguna falta la interacción coulombiana.

## § 9. Fuerza de Lorentz. Fuerza de Ampère

*Se estudian las propiedades relativistas de las fuerzas de Lorentz y Ampère.*

**Transformación de las fuerzas.** En el § 8, en un ejemplo particular, se mostró de qué manera, partiendo de la suposición sobre la invariación relativista de la ecuación del movimiento, puede obtenerse la ley de transformación de la fuerza al pasar de un sistema de coordenadas a otro. Generalicemos este método para un caso más común.

Como siempre, el sistema de coordenadas  $K'$  se mueve respecto al sistema  $K$  en dirección de los valores positivos del eje  $X$  con una velocidad  $v$ . Examinemos el movimiento de un punto material bajo la acción de las fuerzas prefijadas. Sean las proyecciones de la fuerza en el sistema de coordenadas  $K'$  iguales a  $(F'_x, F'_y, F'_z)$  y en  $K$ ,  $(F_x, F_y, F_z)$ . En el caso general las correspondientes proyecciones de estas fuerzas en diferentes sistemas de coordenadas no son iguales entre sí. Sin embargo, entre ellas existen unas relaciones bien determinadas que aseguran la invariación de las ecuaciones del movimiento, o sea, un mismo aspecto de éstas en distintos sistemas de coordenadas:

$$dp_x/dt = F_x, \quad dp_y/dt = F_y, \quad dp_z/dt = F_z, \quad (9.1)$$

$$dp'_x/dt' = F'_x, \quad dp'_y/dt' = F'_y, \quad dp'_z/dt' = F'_z. \quad (9.2)$$

Los primeros miembros de estas ecuaciones se transforman con ayuda de las fórmulas de la teoría de la relatividad para el impulso y las transformaciones de Lorentz:

$$p_x = \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad (9.3)$$

donde  $E' = m'c^2$  es la energía total del punto material,  $\beta = v/c$ . Las fórmulas (9.1) se reducen a la forma:

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt'} \left[ \frac{p'_x + (E'/c^2)v}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \frac{dt'}{dt} = F'_x + \frac{vu'_y/c^2}{1+vu'_x/c^2} F'_y + \frac{vu'_z/c^2}{1+vu'_x/c^2} F'_z, \quad (9.4)$$

$$F_y = \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} F'_y, \quad (9.5)$$

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2} F'_z, \quad (9.6)$$

donde  $(u'_x, u'_y, u'_z)$  son las velocidades en el sistema  $K'$ ;  $F'_x, F'_y, F'_z$  aparecieron en los segundos miembros de (9.4)–(9.6) como resultado de la utilización de las ecuaciones del movimiento (9.2). Para calcular (9.4) se tomó en consideración la fórmula

$$\frac{dE'}{dt'} = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}', \quad (9.7)$$

que expresa el principio de conservación de la energía en el sistema de coordenadas  $K'$ . Aplicando las fórmulas de adición de las velocidades

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}. \quad (9.8)$$

Reduzquemos la expresión (9.4) a la forma

$$F_x = F'_x + \frac{vu_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y + \frac{vu_z/c^2}{1-\beta^2} E'_z. \quad (9.9)$$

Para simplificar (9.5) y (9.6) es necesario tener una relación importante que se obtiene de las fórmulas para las transformaciones de las velocidades. Escribamos las transformaciones directas e inversas, por ejemplo, para la proyección  $y$  de la velocidad:

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu'_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1+vu_x/c^2}.$$

Al multiplicar término a término los primeros y segundos miembros de estas igualdades y reducir las igualdades obtenidas por el factor común  $u_y u'_y$ , hallamos

$$\left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) = 1 - \beta^2. \quad (9.10)$$

Tomando en consideración (9.10), transformemos las fórmulas (9.5) y (9.6):

$$F_y = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_y, \quad (9.11)$$

$$F_z = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} F'_z. \quad (9.12)$$

De esta manera, aplicando las fórmulas (9.9), (9.11) y (9.12), la fuerza en el sistema de coordenadas  $K$  se expresa mediante la fuerza en el sistema  $K'$ . Haciendo uso del principio de la relatividad, no es difícil escribir las fórmulas de transformación inversas.

Al deducir estas fórmulas, no se ha hecho ninguna clase de suposiciones acerca de las propiedades de las fuerzas iniciales: ellas pueden depender de las coordenadas, del tiempo y de la velocidad. Además, no se supuso que en alguno de los sistemas de coordenadas la partícula se encuentra en reposo, ya que no se puso restricción alguna a la velocidad de las partículas. Las fórmulas obtenidas muestran que *en la teoría relativista es indispensable la dependencia entre*

las fuerzas y la velocidad: incluso si en cierto sistema de coordenadas ésta está ausente (por ejemplo,  $F'_x, F'_y, F'_z$ ), en otros sistemas de coordenadas dicha dependencia aparece obligatoriamente (en el caso dado  $F_x, F_y, F_z$  dependen de la velocidad  $u_x, u_y, u_z$  de la partícula).

Escribamos las fórmulas de transformación de las fuerzas en forma vectorial. Para eso introduzquemos las siguientes designaciones:

$$\Phi = (F'_x, F'_y/\sqrt{1-\beta^2}, F'_z/\sqrt{1-\beta^2}), \quad (9.13)$$

$$\mathbf{G} = [0, -(v/c^2)F'_z/\sqrt{1-\beta^2}, (v/c^2)F'_y/\sqrt{1-\beta^2}]. \quad (9.14)$$

No es difícil comprobar que con ayuda de (9.13) y (9.14) las fórmulas (9.9), (9.11) y (9.12) se escriben en forma de una igualdad vectorial

$$\mathbf{F} = \Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{G}. \quad (9.15)$$

Dado que  $\mathbf{F}$  es un vector, todo el segundo miembro es vector. La igualdad es válida para  $\mathbf{u}$  arbitrarias. Por lo tanto, cada uno de los sumandos en el segundo miembro es vector. Puesto que  $\mathbf{u} \times \mathbf{G}$  y  $\mathbf{u}$  son vectores, sacamos la conclusión de que  $\mathbf{G}$  también es vector. Así queda demostrado que las magnitudes  $\Phi$  y  $\mathbf{G}$ , definidas por las igualdades (9.13) y (9.14), son vectores.

**Fuerza de Lorentz.** Supongamos que en el sistema de coordenadas  $K'$  existe sólo un campo eléctrico y, como consecuencia, la fuerza ( $F'_x, F'_y, F'_z$ ) no depende de la velocidad  $\mathbf{u}'$  de la partícula. Entonces  $\Phi$  [véase (9.13)] no depende de la velocidad  $\mathbf{u}$  de la partícula y es en sí una fuerza eléctrica en el sistema de coordenadas  $K$ .

De la misma manera deducimos que el vector  $\mathbf{G}$  tampoco depende de la velocidad  $\mathbf{u}$  de la partícula, sólo puede ser función de las coordenadas y el tiempo. Por eso, la dependencia entre la fuerza y la velocidad de la partícula está en el segundo sumando de (9.15):

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{u} \times \mathbf{G}. \quad (9.16)$$

Esto es precisamente la fuerza magnética, dirigida perpendicularmente a la velocidad de la partícula y al vector  $\mathbf{G}$  que representa el campo magnético que actúa sobre la partícula en movimiento.

Dado que  $\Phi$  en la fórmula (9.15) representa la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga  $q$ , la intensidad

$$\mathbf{E} = \Phi/q. \quad (9.17)$$

De semejante manera, la inducción del campo magnético

$$\mathbf{B} = \mathbf{G}/q. \quad (9.18)$$

Teniendo en cuenta (9.17) y (9.18), la fórmula (9.15) para la fuerza que actúa sobre la carga puntual, se escribe en la forma

$$\boxed{\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}.} \quad (9.19)$$

Esta es la fuerza de Lorentz. El primer sumando del segundo miembro caracteriza la fuerza con la cual el campo eléctrico actúa sobre la carga puntual, y el segundo sumando, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre dicha carga.

**Inducción del campo magnético.** Dado que la fuerza que ejerce el campo magnético sobre la carga en movimiento, se describe por el vector  $\mathbf{B}$ , es natural denominar este vector intensidad del campo magnético. Pero la denominación histórica de la intensidad del campo magnético le quedó a otro vector que se designa por  $\mathbf{H}$ . Este vector no es una característica respecto al campo del campo magnético, sólo tiene en cuenta las propiedades del medio material en que existe el campo. Por ejemplo, siendo  $\mathbf{H}$  dado, el vector  $\mathbf{B}$  y, por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la carga en movimiento, pueden tener los más diversos valores (véase el § 38). El vector  $\mathbf{B}$  recibió el nombre de inducción del campo magnético.

**Fuerza de Ampère.** Supongamos que haya un conjunto de cargas puntuales, cuya concentración es igual a  $n$ . Entonces en el elemento de volumen  $dV$  hay  $n dV$  cargas. Si todas ellas se mueven con una velocidad  $\mathbf{u}$  y sobre cada una de ellas actúa una fuerza magnética que se determina por el segundo sumando en (9.19), la fuerza que actúa sobre las cargas en el elemento de volumen  $dV$  es

$$dF_m = nq dV \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (9.20)$$

A continuación no se necesitará escribir el subíndice  $m$  que muestra que la fuerza es «magnética». La fuerza actúa sobre la carga de la misma manera, independientemente de su origen. Teniendo en cuenta que

$$nq = \rho, \quad nqu = \rho \mathbf{u} = \mathbf{j}, \quad (9.21)$$

donde  $\rho$  y  $\mathbf{j}$  son la densidad de las cargas y la densidad de la corriente [véase (4.4) y (4.11)], escribamos la fórmula (9.20) como

$$dF = \rho \mathbf{u} \times \mathbf{B} dV, \quad (9.22)$$

o bien

$$\boxed{dF = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV}. \quad (9.23)$$

La relación (9.23) se denomina ley de Ampère y determina la fuerza que actúa sobre el elemento de la corriente eléctrica de densidad  $\mathbf{j}$ , incluido en el volumen  $dV$ .

**Paso de las corrientes volumétricas a las lineales.** La fórmula (9.23) puede presentarse en otra forma. Supongamos que la corriente eléctrica circula por un conductor fino, cuya área de la sección transversal es  $S_0$ . Examinemos un elemento de longitud  $dl$  del conductor (fig. 23). El volumen de ese elemento es  $dV = S_0 dl$ . Por ser el área de la sección transversal del conductor pequeña, puede considerarse que la densidad  $\mathbf{j}$  de la corriente que atraviesa la sección

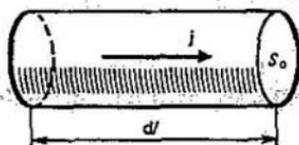


Fig. 23  
Paso de las corrientes volumétricas a las lineales:  $\mathbf{j} \cdot dV = \mathbf{j} \cdot S_0 \cdot dl = I \cdot dl$

del conductor es constante y, por lo tanto,

$$I = S_0 j. \quad (9.24)$$

Sea que la dirección de  $d\mathbf{l}$  coincida con el vector de la densidad de corriente que fluye por esta sección del conductor. Entonces,

$$j \, dV = j S_0 \, dl = I \, dl. \quad (9.25)$$

En general, la corriente eléctrica en cada punto del espacio tiene diferente densidad y, por eso, se denomina **volumétrica**. La fuerza que actúa sobre semejante corriente en el elemento de volumen  $dV$ , se determina por la fórmula (9.23). Pero si la corriente pasa por conductores finos (en el límite, infinitamente fino en sentido físico), se denomina **corriente lineal**. En este caso se puede hablar sobre el elemento de corriente en la longitud  $dl$  del conductor. El paso de las fórmulas, deducidas para las corrientes volumétricas, a las de las corrientes lineales se da mediante la relación (9.25) que es conveniente representar como

$$j \, dV \rightleftharpoons I \, dl. \quad (9.26)$$

Las flechas indican que esta sustitución permite pasar tanto de las fórmulas para las corrientes volumétricas a las fórmulas para las corrientes lineales, como también viceversa.

En particular, la fórmula (9.23) para las corrientes lineales adquiere el aspecto

$$d\mathbf{F} = I \, d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (9.27)$$

La fórmula (9.27) refleja la idea principal de Ampère: reducir la interacción de los circuitos con corriente a la interacción de los elementos infinitamente pequeños de corrientes.

**Campo magnético de la corriente rectilínea.** Comparando las fórmulas (9.27) y (8.19), sacamos la conclusión de que *la corriente que fluye por un conductor rectilíneo ilimitado, crea un campo magnético, cuyas líneas de fuerza son circunferencias, concéntricas según la corriente y yacentes en los planos, perpendiculares a la corriente*. La inducción del campo magnético a la distancia  $r$  del centro del conductor con corriente se expresa mediante la fórmula

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}, \quad (9.28)$$

obtenida mediante la teoría de la relatividad partiendo de la ley de Coulomb y teniendo en cuenta el principio de superposición para la intensidad del campo eléctrico y la invariación de la carga. *Basándose en el principio de superposición para la intensidad del campo eléctrico, puede deducirse la validez también del principio de superposición para la inducción del campo magnético.*

Representemos el resultado de (9.28) en forma vectorial, haciendo coincidir el eje  $X$  del sistema cartesiano de coordenadas con la corriente rectilínea. Designando por  $\mathbf{r} = i_x(x - x') + i_y y + i_z z$  el radio vector dirigido desde

el punto  $(x', 0, 0)$  hacia el punto  $(x, y, z)$  y tomando en consideración el valor de la integral al calcular  $F'_y$  en (8.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(y_0'^2 + x'^2)^{3/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{[y_0'^2 + (x-x')^2]^{3/2}} = \frac{2}{y_0'^2}, \quad (9.29)$$

podemos presentar el resultado de (9.28) en forma de

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}_x \times \mathbf{r}}{r^3} dx', \quad (9.30)$$

donde se tuvo en cuenta que  $|\mathbf{i}_x \times \mathbf{r}| = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Las fórmulas de transformación de la fuerza se obtienen exigiendo que la ecuación relativista del movimiento sea invariante.

En la teoría relativista la dependencia entre las fuerzas y la velocidad es inevitable. Incluso si en cierto sistema de coordenadas la fuerza no depende de la velocidad, en otro sistema de coordenadas que se mueve respecto al primero, aparece la dependencia entre la fuerza y la velocidad.

Si las fórmulas de transformación de la fuerza se obtienen, exigiendo que la ecuación relativista del movimiento sea invariante, ¿no se podría de aquí sacar la conclusión de que la ley de la transformación de la fuerza es desde el punto de vista físico una afirmación sin contenido, simplemente una tautología (repetición inútil) de la exigencia de la invariación relativista?

¿Por qué directamente del aspecto de las fórmulas (9.13) y (9.14) no puede sacarse la conclusión de que  $\Phi$  y  $\mathbf{G}$  son vectores?

## § 10. Ley de Biot y Savart

*Se examinan la interpretación de campo de la interacción de las corrientes y la ley de Biot y Savart.*

**Interacción de los elementos de corriente.** La ley de interacción de las corrientes fue descubierta experimentalmente mucho antes de crearse la teoría de la relatividad. Dicha ley es mucho más complicada que la ley de Coulomb que describe la interacción de las cargas puntuales inmóviles. Eso explica la participación activa de muchos científicos en su investigación. Contribuyeron esencialmente en el descubrimiento tales científicos eminentes como Biot (1774—1862), Savart (1791—1841), Ampère (1775—1836) y Laplace (1749—1827).

En 1820 H. Ch. Oersted (1777—1851) descubrió el efecto de la corriente eléctrica sobre una aguja imantada. En ese mismo año Biot y Savart enunciaron la ley para la fuerza  $dF$  que ejerce el elemento de corriente  $I dl$  sobre el polo magnético, alejado a la distancia  $r$  del elemento de corriente:

$$dF \sim I dl \varphi(\alpha) f(r). \quad (10.1)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que caracteriza la orientación mutua del elemento de corriente y del polo magnético. La función  $\varphi(\alpha)$  fue descubierta experimentalmente poco tiempo después. La función  $f(r)$  fue deducida teóricamente por Laplace en forma de

$$f(r) \sim 1/r^2. \quad (10.2)$$

De esta manera, los esfuerzos de Biot, Savart y Laplace dieron sus frutos: se halló la fórmula que describía la fuerza del efecto de la corriente sobre el polo magnético. En forma definitiva la ley de Biot—Savart—Laplace fue enunciada en 1826 como la fórmula para la fuerza que actúa sobre el polo magnético ya que aún no existía el concepto de intensidad del campo.

En 1820 Ampère descubrió la interacción de las corrientes: la atracción o repulsión de las corrientes paralelas. Demostró la equivalencia del solenoide y el imán permanente. Esto permitió plantear con precisión la tarea de la investigación: reducir todas las interacciones magnéticas a la interacción de los elementos de corriente y hallar la ley de su acción recíproca como la ley fundamental que desempeñe el mismo papel en el magnetismo como la ley de Coulomb en la electricidad. Por su enseñanza y afición Ampère era teórico y matemático. No obstante, al investigar la interacción de los elementos de corriente, efectuó trabajos experimentales muy minuciosos, construyendo varios dispositivos ingeniosos. Hasta hoy día se utiliza en las conferencias la máquina de Ampère para mostrar las fuerzas de interacción de los elementos de corriente y su dependencia de los ángulos. En definitiva, el científico descubrió la ley de interacción de los elementos de corriente. Desgraciadamente, ni en las publicaciones, ni en sus papeles no quedó la descripción de qué manera llegó al descubrimiento. Sin embargo, la fórmula de Ampère para la fuerza se diferencia de (10.3) por haber una diferencial total en el segundo miembro. Esta diferencia no tiene importancia si se calcula la fuerza de interacción de las corrientes cerradas, ya que la integral de la diferencial total respecto a un circuito cerrado es nula. Teniendo en cuenta que en los experimentos no se mide la fuerza de interacción de los elementos de corriente, sino la fuerza de interacción de corrientes cerradas, Ampère puede considerarse con toda razón el autor de la ley de la interacción magnética de las corrientes. La fórmula para la interacción de los elementos de corriente que se utiliza en la actualidad, fue obtenida en 1844 por H. G. Grassmann (1809—1877) y en las designaciones modernas tiene el siguiente aspecto

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad (10.3)$$

donde  $d\mathbf{F}_{12}$  es la fuerza con que el elemento de corriente  $I_1 d\mathbf{l}_1$  actúa sobre el elemento de corriente  $I_2 d\mathbf{l}_2$ ;  $\mathbf{r}_{12}$ , el radio vector, trazado desde el elemento de corriente  $I_1 d\mathbf{l}_1$  hacia  $I_2 d\mathbf{l}_2$  (fig. 24); la línea de rayas significa los circuitos cerrados, la interacción de los elementos de corriente en los cuales no se examina.

La fuerza  $d\mathbf{F}_{21}$  con que el elemento de corriente  $I_2 d\mathbf{l}_2$  actúa sobre  $I_1 d\mathbf{l}_1$ , se da, claro está, con la misma fórmula (10.3), pero sustituyendo el índice

2 por el 1:

$$dF_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \times (I_2 dl_2 \times r_{21})}{r_{21}^3} \quad (10.4)$$

En la figura 24 los versores  $n_{21}$  y  $n_{12}$  muestran la dirección de las fuerzas  $dF_{21}$  y  $dF_{12}$ , perpendiculares a los correspondientes elementos de corriente. En general, estas fuerzas no son colineales. Por lo tanto, la interacción de los elementos de corriente no satisface la tercera ley de Newton:

$$\boxed{dF_{21} + dF_{12} \neq 0.} \quad (10.5)$$

La fuerza que ejerce la corriente  $I_1$ , que fluye por un circuito cerrado  $L_1$ , sobre otro circuito cerrado  $L_2$  con la corriente  $I_2$ , es, basándose en (10.3), igual a

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{dl_2 \times (dl_1 \times r_{12})}{r_{12}^3} \quad (10.6)$$

Las intensidades de corrientes  $I_1$  e  $I_2$  se sacan del signo de la integral, puesto que son constantes en todos los puntos de los circuitos correspondientes  $L_1$  y  $L_2$  de integración. El mismo aspecto lo tiene la fórmula para la fuerza  $F_{21}$  que actúa sobre el circuito cerrado con la corriente  $I_1$ . Para las fuerzas de interacción de los circuitos cerrados con corriente se cumple la tercera ley de Newton:

$$\boxed{F_{21} + F_{12} = 0.} \quad (10.7)$$

**Sobre la verificación experimental de la ley de interacción.** Hablando estrictamente, la ley de interacción de los elementos de corriente (10.3) no puede comprobarse por vía experimental, ya que no existen elementos de corriente aislados  $I dl$ , la fuerza de interacción entre los cuales podría medirse. Cada elemento de corriente es parte del circuito cerrado de corriente, por lo que puede verificarse experimentalmente sólo la ley de interacción de las corrientes cerradas (10.6). Sin embargo, de la validez de (10.6) no se desprende la de (10.4), porque a esta última se le puede añadir cualquier función que, al ser integrada por circuitos cerrados, después de sustituirla en (10.6) da cero.

La corriente eléctrica se determina por el movimiento de las cargas. Por eso la fórmula (10.4) expresa también la ley de la interacción magnética de las cargas en movimiento que es fácil obtener de ella y comprobar por vía experimental, ya que la fuerza de interacción entre las cargas en movimiento puede ser medida. Pero la verificación experimental más completa de esta fórmula es la concordancia entre la prueba y sus consecuencias que son muy numerosas.

**Interpretación de la interacción respecto al campo.** Por analogía total con la electrostática, la interacción de los elementos de corriente se representan en dos etapas: el elemento de corriente  $I_1 dl_1$  en el punto donde se encuentra el

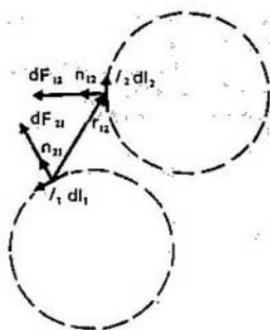


Fig. 24  
Interacción de los elementos de corriente

elemento de corriente  $I_2 dl_2$  crea un campo magnético, la interacción del elemento  $I_2 dl_2$  con el cual conduce a la aparición de la fuerza  $dF_{12}$ . La acción del campo magnético con la inducción  $\mathbf{B}$  sobre  $I dl$  se describe mediante la fórmula (9.27). Teniéndola en cuenta, las dos etapas de interacción se definen así:

1) el elemento de corriente  $I_1 dl_1$  crea en el punto en que se encuentra el elemento de corriente  $I_2 dl_2$  un campo magnético, cuya inducción es

$$d\mathbf{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dl_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}; \quad (10.8)$$

2) sobre el elemento de corriente  $I_2 dl_2$  que se halla en el punto con inducción magnética  $d\mathbf{B}_{12}$ , actúa la fuerza

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 dl_2 \times d\mathbf{B}_{12}. \quad (10.9)$$

**Ley de Biot y Savart.** La relación (10.8), que explica la generación del campo magnético por la corriente, se denomina ley de Biot y Savart. Para la corriente cerrada  $I$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (10.10)$$

donde  $r$  es el radio vector, trazado desde el elemento de corriente  $I dl$  hacia el punto en que se calcula la inducción  $\mathbf{B}$  del campo magnético. La integración en (10.10) se efectúa por el circuito cerrado de corriente. Se supone que la corriente es lineal. El paso a las corrientes volumétricas se ejecuta conforme a la regla (9.26). Para las corrientes volumétricas la ley de Biot y Savart (10.10) toma el siguiente aspecto

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (10.11)$$

Aquí se integra por todas las zonas del espacio donde hay corrientes volumétricas que se caracterizan por la densidad de corriente  $\mathbf{j}$ .

**Fuerza de interacción de las corrientes rectilíneas.** El elemento de corriente  $I_1 dx_1$  (fig. 22) en el punto donde se encuentra el elemento  $I_2 dx_2$  crea un campo con inducción  $d\mathbf{B}_{12}$ , dirigida perpendicularmente al plano del dibujo hacia nosotros, y cuyo módulo es igual a

$$dB_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 dx_1 \sin \alpha}{r_{12}^2}. \quad (10.12)$$

Por lo tanto, la inducción del campo magnético, creado por la corriente lineal  $I_1$  que fluye por un conductor ilimitado en el punto donde se encuentra

el elemento de corriente  $I_2 dx_2$  [véase (10.10)], se expresa por la fórmula

$$B_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha dx_1}{r_{12}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{r}, \quad (10.13)$$

donde para calcular la integral se ha hecho uso de la misma sustitución que para obtener la fórmula (8.5). La fórmula (10.3) coincide con la (9.28).

La fórmula de Ampère conduce a la conclusión de que la fuerza  $dF_{12}$  en el campo magnético con inducción (10.13) actúa sobre el elemento de corriente  $I_2 dl_2$  perpendicularmente al conductor con corriente  $I_2$  y está orientada hacia la corriente  $I_1$ , es decir, es una fuerza de atracción:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1 I_2}{r} dz_2. \quad (10.14)$$

La fórmula (10.14) coincide con la (8.19).

La confirmación experimental de las fórmulas para el campo magnético, obtenidas mediante las transformaciones relativistas de las fórmulas para el campo eléctrico, sirve no sólo para demostrar la existencia del campo magnético, sino que atestigua su naturaleza relativista.

Las fuerzas de interacción de los elementos de la corriente no satisfacen la tercera ley de Newton.

Las fuerzas de interacción de los circuitos cerrados con corriente satisfacen la tercera ley de Newton.

Dado que en forma aislada no existen elementos de corriente, ¿en qué sentido puede hablarse de la verificación experimental directa de la fórmula para la interacción de los elementos de corriente?

¿Qué puede deducirse del hecho de que las fuerzas de interacción de los elementos de corriente no satisfacen la tercera ley de Newton y de las corrientes cerradas, satisfacen?

**Ejemplo 10.1.** Determinar la inducción del campo magnético creado por una sección rectilínea finita del conductor de longitud  $l$  por el que circula la corriente  $I$  (fig. 25).

La intensidad del campo de cada elemento del conductor está dirigida perpendicularmente al plano del diseño y conforme a la ley (10.10) es igual a

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \times r}{r^2},$$

dado que  $dl \times r$  es perpendicular al plano del diseño. Entonces,

$$|dl \times r| = dl r \widehat{\sin(\angle dl, r)} = dl r \sin \beta = dy d,$$

por eso

$$B = \frac{\mu_0 I d}{4\pi} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2).$$

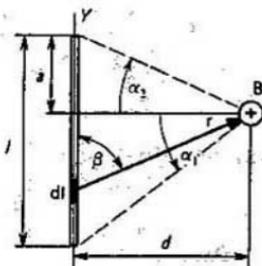


Fig. 25. Inducción magnética de una sección rectilínea de corriente de longitud finita

Aplicando esta fórmula, puede calcularse la inducción de cualquier circuito con corriente que consta de segmentos rectilíneos.

**Ejemplo 10.2.** Definir la inducción del campo magnético en el eje de la corriente circular  $I$  de radio  $r_0$  (fig. 26).

Hacemos uso de la ley (10.11):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

donde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{h}$ ,  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 + d\mathbf{l} \times \mathbf{h}$ . Al integrar, el módulo  $r$  no varía, por eso

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left( \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 + \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{h} \right). \quad (10.15)$$

Dado que  $\mathbf{h}$  es un vector constante, hallamos

$$\oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{h} = \left( \oint_L d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{h} = 0,$$

ya que  $\oint_L d\mathbf{l} = 0$ . La otra integral que figura en (10.15), se calcula de la siguiente manera:

$$\oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{r}_0 = \oint_L n r_0 d\mathbf{l} = n r_0 \oint_L d\mathbf{l} = n r_0 2\pi r_0,$$

donde  $\mathbf{n}$  es el versor, perpendicular al plano en que fluye la corriente  $I$ .

Entonces

$$\mathbf{B}_h = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{n}. \quad (10.16)$$

**Ejemplo 10.3.** Dos conductores circulares coaxiales del mismo radio situados en planos paralelos, la distancia  $d$  entre los cuales es igual al radio de los anillos, se denominan anillos de Helmholtz.

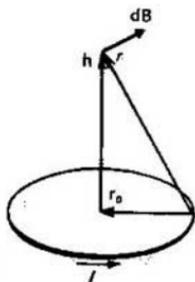


Fig. 26  
Inducción magnética en el eje de una espiral con corriente

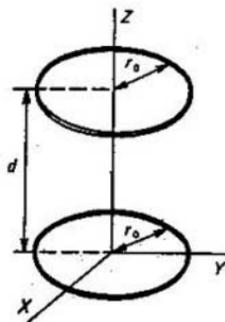


Fig. 27  
Para el cálculo de la interacción de dos corrientes circulares

Demstrar que el campo magnético en el eje de los anillos de Helmholtz en la mitad de la distancia entre ellos es homogéneo con una gran precisión.

Coloquemos el origen del sistema cartesiano de coordenadas en el centro de uno de los anillos y el eje  $Z$  lo dirigimos a lo largo del eje de los anillos (fig. 27). La inducción del campo

en el eje de los anillos en el punto con la coordenada  $z$ , conforme a (10.16), es igual a

$$B_z = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2} \left[ \frac{1}{(z^2 + r_0^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{3/2}} \right], \quad (10.17)$$

donde  $I$  es la intensidad de corriente en el anillo.

La heterogeneidad de  $B_z$  se caracteriza en primera aproximación por la primera derivada:

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{3\mu_0 I r_0^3}{2} \left[ \frac{-z}{(z^2 + r_0^2)^{5/2}} - \frac{z-d}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{5/2}} \right]. \quad (10.18)$$

Para  $z = d/2$  obtenemos  $\partial B_z / \partial z = 0$ , entonces

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \frac{3\mu_0 I r_0^3}{2} \left\{ \frac{5z^2}{(z^2 + r_0^2)^{7/2}} - \frac{1}{(z^2 + r_0^2)^{5/2}} + \frac{5(z-d)^2}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{7/2}} - \frac{1}{[(z-d)^2 + r_0^2]^{5/2}} \right\}. \quad (10.19)$$

Para los anillos de Helmholtz  $d = r_0$  y para  $z = d/2$  ( $\partial^2 B_z / \partial z^2 = 0$ ). Ello muestra que el campo en las proximidades del punto  $z = d/2$  en el eje de los anillos de Helmholtz es realmente homogéneo con un grado elevado de precisión.

**Ejemplo 10.4.** Existe un solenoide circular recto de longitud  $L$  que consta de  $n$  espiras hechas de un conductor fino muy ajustadas. Hallar la inducción en el eje del solenoide si por sus espiras circula una corriente  $I$ .

Dado que las espiras están compactamente ajustadas la una a la otra, puede considerarse con suficiente exactitud que cada espira crea un campo en el eje del solenoide de acuerdo con la fórmula (10.16). La densidad del bobinado es igual a  $n/L$ . Puede tomarse que por la longitud  $dz$  del solenoide fluye una corriente  $(In/L) dz$ . Colocando el origen del sistema de coordenadas en el punto del eje del solenoide en la mitad de su longitud (fig. 28), hallamos, valiéndonos de la fórmula (10.16) que la inducción en el eje del solenoide en el punto  $z$  es

$$\begin{aligned} \beta_z &= \frac{\mu_0 n r_0^2 I}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[(z-z')^2 + r_0^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2L} \left\{ \frac{-z+L/2}{[(z-L/2)^2 + r_0^2]^{3/2}} + \frac{z+L/2}{[(z+L/2)^2 + r_0^2]^{3/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Para un solenoide muy largo ( $L \rightarrow \infty$ ) en los puntos  $z \ll L/2$  de (10.20) obtenemos

$$\lim_{L \rightarrow \infty} B_z = \mu_0 n I / L. \quad (10.21)$$

El campo de un solenoide ilimitadamente largo no sólo es constante a lo largo del eje, sino que también es homogéneo por su sección [véase (8.38)].

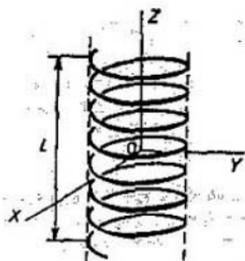


Fig. 28 Solenoide de longitud finita

## § 11. Transformación de los campos

*Partiendo de que la ecuación de movimiento de la carga es invariante en el campo electromagnético, se deduce la ley de transformación de los campos.*

**Invariación de la expresión para la fuerza en el campo electromagnético.** La expresión (9.19) para la fuerza de Lorentz que actúa sobre la carga puntual en el campo electromagnético, se obtiene de la exigencia de invariación de la ecuación relativista del movimiento. Por lo tanto, esa expresión debe ser también invariante desde el punto de vista relativista, es decir, debe tener el mismo aspecto en todos los sistemas de coordenadas. Así, pues, en los sistemas de coordenadas  $K$  y  $K'$  las expresiones para las fuerzas tiene la forma:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (11.1)$$

$$\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'). \quad (11.2)$$

Haciendo uso de la invariación relativista de la expresión para la fuerza, representada por las fórmulas (11.1) y (11.2), y teniendo en cuenta (9.9), (9.11) y (9.12), pueden obtenerse las relaciones entre los vectores de los campos magnéticos y eléctricos en distintos sistemas de coordenadas.

Un caso particular de la transformación de los vectores de los campos ya se examinó anteriormente, a saber: fue demostrado que si en el sistema de coordenadas  $K'$  hay sólo intensidad eléctrica, en el sistema  $K$  aparece también inducción magnética. Se podría mostrar de la misma manera que si en cierto sistema de coordenadas hay sólo inducción magnética, en el otro surge, en general, también intensidad del campo eléctrico. Estudiemos la relación entre los campos eléctrico y magnético para el caso general.

**Transformación de los campos.** Sustituamos  $F_y$  y  $F'_y$  en la fórmula (9.11) por sus expresiones de (11.1) y (11.2):

$$E_y + (u_x B_x - u_x B_x) = \frac{1 - vu_x/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} [E'_y + (u'_x B'_x - u'_x B'_x)]. \quad (11.3)$$

Excluyendo de (11.3) las magnitudes  $u'_x$  y  $u'_y$  mediante las fórmulas de adición de las velocidades

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - vu_x/c^2} \quad (11.4)$$

y agrupando todos los términos en el primer miembro de (11.3), hallamos

$$\left( E_y - \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{v B'_z}{1 - \beta^2} \right) + \left( -B_z + \frac{v E'_y}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{B'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \times \\ \times u_x + (B_x - B'_x) u_x = 0. \quad (11.5)$$

Esta igualdad es válida para los valores arbitrarios de  $u_x$  y  $u_z$ . Por lo tanto, las expresiones entre paréntesis de (11.5) por separado son iguales a cero. Igualándolas a cero, obtenemos las fórmulas de transformación para los vectores del campo:

$$E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.6)$$

$$B_x = B'_x, \quad (11.7)$$

$$B_z = \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (11.8)$$

De la misma manera, partiendo de (9.12), obtenemos las fórmulas de transformación para los otros componentes:

$$E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (11.9)$$

$$B_x = B'_x, \quad (11.10)$$

$$B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (11.11)$$

La deducción de la transformación para la proyección  $x$  de la fuerza es cómodo argumentarla, basándose en la fórmula (9.4) escrita en la forma

$$F_x = \frac{1}{1 + vu_x/c^2} \left[ F'_x + \frac{v}{c^2} (\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}') \right]. \quad (11.12)$$

Obrando de la misma manera que en los casos anteriores, reducimos la igualdad (11.12) a la forma

$$\left( 1 + \frac{vu_x}{c^2} \right) [E_x + (u_y B_z - u_z B_y)] - E'_x + (u'_y B'_z - u'_z B'_y) = \frac{v}{c^2} (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'), \quad (11.13)$$

donde  $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}' = q\mathbf{E}' \cdot \mathbf{u}'$ . Haciendo uso de las fórmulas (11.8) y (11.11), hallamos que

$$E_x = E'_x. \quad (11.14)$$

Así, pues, las fórmulas de transformación para los vectores del campo electromagnético tienen el aspecto:

$E_x = E'_x, \quad B_x = B'_x,$ $E_y = \frac{E'_y + vB'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_y = \frac{B'_y - (v/c^2)E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}},$ $E_z = \frac{E'_z - vB'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B_z = \frac{B'_z + (v/c^2)E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}.$	(11.15)
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------

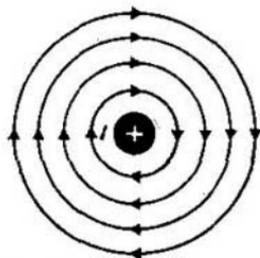


Fig. 29  
Líneas de fuerza del campo magnético, formado por un hilo cargado que se mueve a lo largo de su longitud

Las fórmulas inversas de transformación de los vectores del campo se obtienen, conforme al principio de la relatividad, de las fórmulas (11.15) sustituyendo  $v \rightarrow -v$  y las magnitudes con rasgo por las magnitudes sin éstos y viceversa.

**Aplicación de las fórmulas (11.15).** Las fórmulas (11.15) permiten hallar los vectores del campo electromagnético en cualquier sistema inercial de coordenadas si se conocen por lo menos en uno cualquiera de ellos.

A título de ejemplo estudiemos el campo de un hilo infinito cargado. El hilo es inmóvil y se encuentra en el sistema de coordenadas  $K'$  a lo largo del eje  $X'$ . Por lo tanto, en este sistema de coordenadas existe sólo un campo eléctrico, cuya intensidad se da por las fórmulas (8.5), teniendo en cuenta la definición de la intensidad. Por eso en lugar de (8.5) para la intensidad del campo eléctrico, obtenemos las expresiones:

$$E_x = 0, \quad E_y' = \rho' S_0' / (2\pi\epsilon_0 y_0'), \quad E_z = 0. \quad (11.16)$$

El eje  $Y$  puede tener cualquier dirección, perpendicular al hilo. Basándose en la fórmula (11.16), sacamos la conclusión de que la intensidad del campo eléctrico de un hilo infinito cargado está orientada por las perpendiculares respecto al hilo y decrece inversamente proporcional al primer grado de la distancia del hilo. El campo magnético está ausente en el sistema de coordenadas  $K'$ , ya que las cargas son inmóviles.

En el sistema de coordenadas  $K$  el hilo se mueve a lo largo de su longitud en dirección de los valores positivos del eje  $X$  con una velocidad  $v$ . Basándose en (11.15), la intensidad del campo eléctrico es igual a

$$E_x = 0, \quad E_y = E_y' / \sqrt{1 - \beta^2} = \rho' S_0' (2\pi\epsilon_0 y_0' \sqrt{1 - \beta^2}), \quad E_z = 0, \quad (11.17)$$

lo que equivale a (8.8), dado que la intensidad es igual a la relación entre la fuerza y la carga.

Las fórmulas (11.15) muestran que a la par con el campo eléctrico, el hilo cargado en movimiento crea en el medio que lo rodea, un campo magnético, cuya inducción es

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{(v/c)^2 E_y'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{vp' S_0'}{2\pi\epsilon_0 c^2 y_0' \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11.18)$$

que, conforme a (8.9), equivale a la fórmula (8.15) sólo si se pasa de la fuerza  $f_y$  a la inducción del campo magnético de acuerdo con las fórmulas (9.18) y (9.16), es decir, si dividimos  $f_y$  en (8.15) por  $qv$ . Es obvio que las líneas magnéticas de fuerza son circunferencias concéntricas, yacentes en planos, perpendiculares al hilo (fig. 29): el centro de las circunferencias está en el hilo.

Al resolver tareas concretas, es necesario elegir un sistema de coordenadas, en el que el campo electromagnético sea el más sencillo, lo que simplifica la solución del problema. Pero *no hay que pensar que siempre existe un sistema de coordenadas, donde el campo se reduce o bien al campo eléctrico, o bien al magnético. Existen configuraciones del campo electromagnético, tales, que en cualquier sistema de coordenadas están presentes simultáneamente el campo eléctrico y el magnético.* El examen general de dicha cuestión se efectúa, analizando las invariaciones del campo electromagnético con relación a la transformación de Lorentz (véase el § 62).

**Campo de una carga puntual que se mueve uniforme y rectilíneamente.** Hagamos coincidir el origen del sistema cartesiano de coordenadas  $K'$  con la carga puntual  $q$ . En este sistema la intensidad del campo eléctrico se describe por la ley de Coulomb en ausencia del campo magnético:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{B}' = 0, \quad (11.19)$$

donde  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ . En el sistema de coordenadas  $K$  la carga  $q$  se mueve con una velocidad  $v$  en dirección de los valores positivos del eje  $X$ . Los ejes de coordenadas del sistema  $K'$  están orientados de tal manera que para el momento de tiempo  $t' = t = 0$  ellos coinciden con los ejes correspondientes del sistema  $K$ . Sustituyendo (11.19) en (11.15) y utilizando las transformaciones de Lorentz, obtenemos

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = \frac{q\gamma(x-vt)}{4\pi\epsilon_0[\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (11.20)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (11.21)$$

Designando por  $x_q$  la coordenada de la carga  $q$  en el sistema  $K$  en el momento  $t$  en que se determina la intensidad del campo en el punto  $(x, y, z)$ , escribamos (11.20) de nuevo en la forma

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x-x_q)}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (11.22)$$

ya que  $x_q = vt$  es la ley del movimiento de la carga en el sistema  $K$ .

De la misma manera hallamos las otras dos componentes de la intensidad del campo eléctrico:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}, \quad (11.23)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x-x_q)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (11.24)$$

La inducción del campo magnético se determina valiéndose de las fórmulas (11.15). El resultado es más cómodo escribirlo en forma vectorial:

$$\mathbf{B} = (1/c^2) \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (11.25)$$

donde  $E$  se define por las fórmulas (11.22)—(11.24). Se ve que las líneas de  $B$  forman circunferencias concéntricas con centro en el eje  $X$ , a lo largo del cual se mueve la carga  $q$ .

La configuración del campo de la carga que se mueve uniforme y rectilíneamente, no varía con el tiempo, sólo cambia la posición de esta configuración respecto al sistema de coordenadas inmóvil  $K$ , o sea, la configuración invariable del campo se mueve junto con la carga. Estudiémosla en el momento en que la carga se encuentra en el origen del sistema de coordenadas  $K$ , es decir, para  $x_q = 0$ . En este caso véase (11.22)—(11.24)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma r}{(\gamma x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (11.26)$$

donde  $r$  es el radio vector, trazado desde el punto en que se encuentra la carga  $q$  hacia el punto donde se determina  $E$ . Así, pues, la intensidad está orientada a lo largo del radio vector, en cambio su valor depende de la dirección del radio vector. Designemos el ángulo entre las direcciones de la velocidad  $v$  de la carga y del radio vector por  $\theta$ . Entonces  $x = r \cos \theta$ ,  $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta$ ,  $\gamma x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)$ ,  $\beta = v/c$  y la fórmula (11.26) adquiere la forma

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

La diferencia entre los campos eléctricos de la carga en movimiento y de la carga inmóvil consiste en la fuerte dependencia de la intensidad del campo de la carga en movimiento respecto a la dirección. Por la línea de movimiento de la carga ( $\theta = 0$ ;  $\theta = \pi$ ) y perpendicularmente a ella ( $\theta = \pm\pi/2$ ) la intensidad es igual a

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2), \quad (11.27)$$

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (11.28)$$

respectivamente.

*Para las velocidades relativistas ( $\beta \approx 1$ ) la intensidad del campo de la carga en movimiento a una distancia prefijada de ella es pequeña, a lo largo de la línea de movimiento de la carga, y es grande en dirección perpendicular, es decir, el campo se concentra aparentemente en las inmediaciones del plano, que atraviesa la carga perpendicularmente a su velocidad.*

Si en cierto sistema de coordenadas existe sólo el campo eléctrico, en otro sistema aparece también el campo magnético y viceversa. Eligiendo de la manera adecuada el sistema de referencia, puede lograrse obtener una configuración más sencilla de los campos eléctrico y magnético o eliminar uno de ellos. Sin embargo, no siempre existe semejante sistema de referencia, donde el campo se reduce bien al eléctrico, o bien al campo magnético.

Partiendo de las fórmulas de transformación de las magnitudes del sistema  $K'$  al sistema  $K$ , ¿qué procedimientos pueden aplicarse para recibir las fórmulas de transformación de las mismas magnitudes pasando del sistema  $K$  al sistema  $K'$ ? Basándose en el ejemplo de las fórmulas (11.15), compruébese que ambos procedimientos conducen al mismo resultado.

¿Es central el campo de una carga puntual que se mueve con gran velocidad? simétrico-central?

Problemas

- 1.1. Calcular  $\text{div } r$ .
- 1.2. Calcular  $\text{grad } (r \cdot A)$ , donde  $A$  es un vector constante.
- 1.3. Calcular  $\text{div } (\omega \times r)$ , donde  $\omega$  es un vector constante.
- 1.4. Calcular  $\text{div } (r/r)$ .
- 1.5. Calcular  $\text{div } [A \times (r \times B)]$ , donde  $A$  y  $B$  son vectores constantes.
- 1.6. ¿Cuál es la inducción del campo magnético en el centro de un circuito cuadrado, cuyo lado es  $a$  y por el que circula una corriente  $I$ ?
- 1.7. Un conductor está bobinado en espiral sobre un aislador cilíndrico de radio  $a$  y forma  $n$  espiras completas. El ángulo de elevación de la espiral es igual a  $\alpha$ . Determinar la inducción magnética en el centro del aislador cilíndrico si por el arrollamiento circula una corriente  $I$ .
- 1.8. Dos cargas puntuales  $q$  y  $-q$  están situadas en los puntos  $(a, 0, 0)$  y  $(-a, 0, 0)$ , respectivamente. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el punto  $(x, y, z)$ .

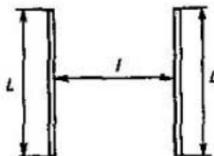


Fig. 30  
Dos secciones del conductor de longitud finita

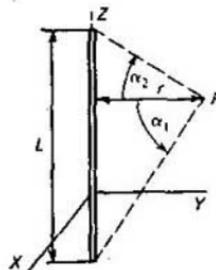


Fig. 31  
Designación de los ángulos en el sistema de coordenadas elegido

- 1.9. La carga está distribuida con una densidad lineal  $\tau$  en una longitud  $L$  a lo largo del radio vector que comienza en el punto en que se halla la carga puntual  $q$ . La distancia desde  $q$  hasta el punto, más próximo a ésta, de la carga lineal es igual a  $R$ . Hallar la fuerza que actúa sobre la carga lineal.
- 1.10. Dos cargas se distribuyen con la misma densidad lineal en una longitud  $L$  de modo paralelo y se encuentran a la distancia  $l$  (fig. 30). Hallar la fuerza de interacción entre ellas.
- 1.11. Un disco posee cierta carga superficial con una densidad  $\sigma = \alpha r^2$ , donde  $r$  es la distancia desde el centro del disco. El radio del disco es  $r_0$ . Hallar la intensidad del campo en la perpendicular al plano del disco, trazada por su centro a la altura  $h$ .
- 1.12. Dos superficies uniformemente cargadas son paralelas al plano  $X, Y$  y atraviesan el eje  $Z$  en los puntos  $z_1 = a_1$  y  $z_2 = a_2 > a_1$ . Las densidades superficiales de las cargas son iguales, pero de signo contrario ( $\sigma_1 = -\sigma_2$ ). Hallar la intensidad del campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
- 1.13. Hallar la intensidad de un campo eléctrico en el punto  $P$ , creado por un hilo cargado de longitud  $L$  (fig. 31). La densidad lineal de la carga es  $\tau$ . El punto  $P$  yace en el plano  $Z, Y$ , lo que, sin embargo, no impone restricción alguna a la idea general de la solución, ya que el campo es axialmente simétrico.
- 1.14. Un cilindro ilimitadamente largo de sección circular está cargado uniformemente con una densidad superficial  $\sigma$ . En el eje del cilindro se coloca un hilo ilimitadamente

- largo con una carga uniforme de densidad lineal  $\tau$ . ¿Para qué condición la intensidad del campo eléctrico fuera del cilindro será nula?
- 1.15. Dentro de una esfera de radio  $a$  se distribuye una carga, cuya densidad volumétrica es  $\rho = \alpha \sqrt{r}$ . Hallar la intensidad del campo eléctrico.
- 1.16. Un haz de sección circular que posee un radio de 1 mm y consta de protones, se acelera aplicándole una diferencia de potencial de 10 kV. Suponiendo que la densidad de los protones por la sección del haz es constante, hallar la densidad volumétrica de la carga eléctrica en el haz para la corriente de  $5 \cdot 10^{-6}$  A.

## Respuestas

- 1.1.  $\frac{\mu_0 I n}{2a}$  1.2.  $\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 n^2 \tan^2 \alpha}}$  1.3. 0 1.4.  $2/r$  1.5.  $2(A \cdot B)$  1.6.  $2\sqrt{2} \mu_0 I / (\pi l)$  1.7.  $\frac{\mu_0 I n}{2a} \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 n^2 \tan^2 \alpha}}$  1.8.  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-a) i_x + y i_y}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{(x+a) i_x + y i_y}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$
- 1.9.  $F = \frac{q\tau L}{4\pi\epsilon_0 R(R+L)}$  1.10.  $F = \frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0} \left[ \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} - 1 \right]$  1.11.  $E_h = \frac{\alpha h}{2\epsilon_0} \times \left[ \frac{r_0^2 + 2h^2}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}} - 2h \right]$  1.12.  $E_z = 0$  para  $z < a_1$  y  $z > a_2$ ;  $E_z = \sigma_1/\epsilon_0$  para  $a_1 < z < a_2$ .
- 1.13.  $E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} [(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) i_y - (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) i_z]$  1.14.  $\tau = -2\pi r \sigma$  1.15.  $E = \frac{2\alpha}{7\epsilon_0} \times \sqrt{r}$   $r, 0 < r < a$ ;  $E = \frac{2\alpha a^{7/2}}{7\epsilon_0} \frac{r}{r^3}$  para  $r > a$  1.16.  $\rho = 1,15 \cdot 10^{-6}$  C/m<sup>3</sup>.

## Campo eléctrico constante

Los campos eléctricos constantes en la naturaleza no existen, ya que no hay cargas elementales inmóviles. En cambio, si en un volumen físico infinitamente pequeño la suma de las cargas elementales de cada signo es aproximadamente constante y la velocidad media es próxima a cero, el campo que ellas originan a una distancia suficientemente grande del volumen es casi constante. Dicho campo se denomina campo eléctrico constante. En calidad de modelo de una carga que engendra semejante campo, puede servir una carga puntual inmóvil. El conjunto de cargas puntuales puede formar cargas lineal, superficial y volumétrica. Pasando al modelo de distribución continua de la carga, estos conjuntos se caracterizan por densidades lineal, superficial y volumétrica de la carga.

### § 12. Campo eléctrico constante

*Se examina el modelo ideal de un campo eléctrico constante y los límites de su aplicación.*

**Carga inmóvil.** En la electrostática se estudian los campos eléctricos de cargas inmóviles. Se supone que las cargas se mantienen en distintos puntos del espacio mediante fuerzas de origen no electrostático, cuya naturaleza no se precisa en los márgenes de la electrostática. Verbigracia, en la electrostática se investigan la distribución de las cargas en la superficie del conductor, el campo eléctrico que engendran, las fuerzas que actúan, pero no se examina el por qué estas cargas no abandonan la superficie del conductor. En los márgenes de la electrostática no se estudia la naturaleza de las fuerzas que mantienen las cargas en la superficie del conductor. Un sentido análogo tiene la expresión «la carga  $q$  se encuentra en el punto  $(x, y, z)$  en el vacío». Se supone que la carga  $q$  está aparentemente fija en el punto  $(x, y, z)$  del espacio, con la particularidad de que en las inmediaciones de la carga no hay ninguna partícula material (vacío). Está claro que semejante representación es una idealización.

**Esencia del modelo.** Como no existen cargas elementales inmóviles, *tampoco existen campos constantes*. Sin embargo, en la mayoría de los fenómenos que se estudian en la teoría clásica de la electricidad, se observa no el campo de una carga elemental aislada, sino la superposición de los campos de muchas cargas. La aportación del campo de una carga elemental aislada en la superposición de los campos es muy pequeña. A esto es necesario añadir que la intensidad del campo eléctrico se determina como el valor medio respecto a un volumen y a un intervalo de tiempo físicamente pequeños. *Las fluctuaciones*

del valor medio de la intensidad del campo son bastante pequeñas. Precisamente estos valores medios son el objeto de estudio en la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo. Por eso, hablando en rigor, para la electrostática lo esencial es no la inmovilidad de las cargas, sino que la constancia con el tiempo del campo eléctrico. Con otras palabras, en el modelo de campos constantes no se idealiza la constancia del campo, sino la inmovilidad de las cargas que lo originan.

**Límites de aplicación del modelo.** Dado que el modelo se fundamenta en la existencia de campos con fluctuaciones muy pequeñas de los valores medios y no la existencia de cargas inmóviles, sus límites se determinan por las exigencias de pequeñez de aportación de las cargas elementales aisladas en el campo que se observa. De aquí, por ejemplo, se desprende que la electrodinámica no puede aplicarse al movimiento de electrones aislados en el átomo. Su movimiento en los átomos se describe mediante la teoría cuántica.

### § 13. Forma diferencial de la ley de Coulomb

*Se analizan los factores que determinan la validez del teorema de Gauss. Se da la formulación diferencial de la ley de Coulomb y se discuten sus corolarios.*

**Teorema de Gauss.** El teorema electrostático de Gauss determina la relación matemática entre el flujo de intensidad a través de una superficie cerrada y la carga que se encuentra en un volumen, limitado por esta superficie.

Sea que la carga puntual  $q$  se halla dentro del volumen  $V$ , acotado por la superficie cerrada  $S$  (fig. 32). Examinemos el flujo  $N$  de intensidad  $E$  a través de esta superficie:

$$N = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.1)$$

Recordemos que para las superficies cerradas a título de dirección positiva se elige siempre la dirección hacia la normal exterior. Ello significa que el elemento del área de superficie  $d\mathbf{S}$  en (13.1) está orientado hacia la parte exterior del volumen (fig. 32). Según la ley de Coulomb

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (13.2)$$

Por lo tanto, la integral en (13.1) puede representarse así:

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} \right). \quad (13.3)$$

Tengamos en cuenta la relación

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = \left| \frac{\mathbf{r}}{r} \right| dS \cos(\widehat{\mathbf{r}, d\mathbf{S}}) = dS', \quad (13.4)$$

donde  $dS'$  es la proyección del área del elemento  $dS$  sobre el plano perpendicular al radio vector  $r$ . De la geometría se sabe que

$$d\Omega = dS'/r^2, \quad (13.5)$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido, bajo el cual el elemento del área  $dS'$  se ve desde el punto de referencia de los radios vectores, que en este caso coincide con el lugar donde está la carga puntual  $q$ . Teniendo en cuenta (13.4) y (13.5), la expresión (13.3) adquiere la forma

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega. \quad (13.6)$$

El ángulo sólido total, bajo el cual se ve la superficie cerrada desde los puntos dentro del volumen que ésta limita, es igual a  $4\pi$ , es decir,

$$\oint_S d\Omega = 4\pi, \quad (13.7)$$

y por eso de (13.6) obtenemos

$$N = q/\epsilon_0 \quad (13.8)$$

El flujo de  $E$  a través de la superficie cerrada se calcula de la misma manera (fig. 33) y se define por la fórmula (13.3) si la carga puntual se hallaba fue-

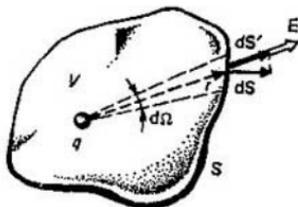


Fig. 32  
Cálculo del flujo del vector de intensidad a través de una superficie cerrada cuando la carga puntual está dentro del volumen, limitado por la superficie

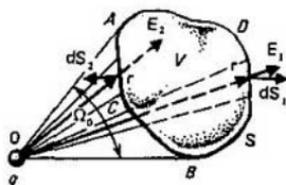


Fig. 33  
Cálculo del flujo del vector de intensidad a través de una superficie cerrada cuando la carga puntual está fuera del volumen, limitado por la superficie

ra del volumen, limitado por la superficie. En cambio, ahora el integrando toma valores tanto positivos, como negativos: en los puntos de la superficie,

en que el ángulo  $(r, dS)$  es inferior a  $\pi/2$ , es positivo y cuando el ángulo es mayor, el integrando es negativo. Esto significa que en la superficie  $ADB$  el integrando es positivo y en la  $ACB$ , negativo. Por esta razón, los elementos del ángulo sólido de (13.5) son positivos en la superficie  $ADB$  y negativos, en la  $ACB$ . Designemos por  $\Omega_0$  el ángulo sólido en el vértice del cono, formado por

las tangentes trazadas desde el punto  $O$  a la superficie en cuestión (fig. 33). Entonces

$$\oint_S \frac{1}{r^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{ADB} d\Omega - \oint_{ACB} d\Omega = \Omega_0 - \Omega_0 = 0, \quad (13.9) \right.$$

ya que las superficies  $ACB$  y  $ADB$  se ven desde el punto  $O$  bajo el mismo ángulo sólido  $\Omega_0$ , pero en la integral están con signos contrarios. Cuando la carga puntual se encuentra fuera del volumen, el flujo de intensidad  $\mathbf{E}$  a través de la superficie cerrada es nulo:

$$N = 0. \quad (13.10)$$

Uniendo los resultados de (13.8) y (13.10), podemos escribir definitivamente para (13.1):

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \\ &= \begin{cases} q/\epsilon_0, & \text{cuando } q \text{ se encuentra dentro del volumen limitado por } S; \\ 0, & \text{cuando } q \text{ se halla fuera del volumen, limitado por } S. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.11)$$

La confirmación que posee (13.11) es el contenido del teorema electrostático de Gauss para la carga puntual.

Su generalización para el sistema de cargas puntuales se lleva a cabo mediante el principio de superposición. Si hay cargas puntuales  $q_i$ , la intensidad  $\mathbf{E}$  del campo en cada punto es la suma de las intensidades  $\mathbf{E}_i$  de los campos, creados por cada una de las cargas puntuales:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (13.12)$$

Por consiguiente,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.13)$$

Al calcular cada una de las integrales que se encuentran bajo el signo de suma en el segundo miembro de (13.13), es necesario tomar en consideración (13.11): para la carga puntual dentro del volumen la integral correspondiente es igual a  $q_i/\epsilon_0$ , y para la carga fuera del volumen, es nula. Por esta razón, (13.13) toma la forma

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_V q_i = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (13.14)$$

donde  $V$ , perteneciente al signo de suma, significa que la suma se compone sólo de cargas que se encuentran dentro del volumen  $V$ . La carga total dentro del volumen  $V$  en (13.14) se denota por  $Q$ :

$$Q = \sum_V q_i. \quad (13.15)$$

Teniendo en cuenta la definición (4.1) para la densidad volumétrica  $\rho$  para la distribución continua de las cargas, la fórmula (13.14) se escribe inmediatamente así:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q, \quad (13.16)$$

donde

$$Q = \int_V \rho \, dV \quad (13.17)$$

es la carga total, incluida en el volumen limitado por la superficie cerrada  $S$ . La afirmación que encierra la fórmula (13.16) es el contenido del teorema electrostático de Gauss para la distribución continua de las cargas. Es obvio que la fórmula incluye en sí también las expresiones (13.14) y (13.11) como casos particulares.

**Medición de la carga.** El teorema de Gauss permite determinar la carga total que contiene el volumen dentro de sí, midiendo el flujo de intensidad a través de la superficie que limita el volumen. *Otras definiciones de la carga no dan resultados satisfactorios.* Por ejemplo, no se puede hallar esta carga, midiendo la fuerza que ella ejerce sobre una carga de prueba que está fuera de dicho volumen, ya que la fuerza depende no sólo de la carga total, sino también de su distribución por el volumen, que por cierto, es desconocida. Puede determinarse la carga, midiendo la fuerza que actúa sobre ella en un campo eléctrico exterior homogéneo que se conoce. En este caso es importante asegurar la homogeneidad del campo. Está claro que este procedimiento es aplicable sólo cuando el campo homogéneo exterior no varía esencialmente la distribución de las cargas dentro del volumen.

**Base física de la validez del teorema de Gauss.** Partiendo de la deducción del teorema de Gauss, se ve que su validez se determina por la posibilidad de reducir el integrando (13.3) mediante (13.4) y (13.5) a la diferencial del ángulo sólido  $d\Omega$ . Ello resulta posible sólo cuando  $E(r)$  decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde la carga puntual. Para otra dependencia de  $E(r)$ , en la fórmula (13.6) bajo la integral debe haber además de la diferencial del ángulo sólido, cierta función respecto a  $r$  que no permite expresar el flujo de intensidad mediante la superficie en forma de función de la carga, lo que significa la inobservancia del teorema de Gauss. Por esta razón, *la base física del teorema de Gauss es la ley de Coulomb o, de otra manera, el teorema de Gauss es la formulación integral de la ley de Coulomb.*

**Enunciación diferencial de la ley de Coulomb.** Ecuación de Maxwell para  $\text{div } \mathbf{E}$ . Con ayuda de la fórmula matemática de Gauss—Ostrogradski (5.21) el flujo  $\mathbf{E}$  a través de una superficie cerrada puede transformarse en una integral de  $\text{div } \mathbf{E}$  respecto al volumen:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{E} \, dV, \quad (13.18)$$

como consecuencia de lo cual la fórmula (13.16) adquiere el aspecto

$$\int (\text{div } \mathbf{E} - \rho/\epsilon_0) dV = 0. \quad (13.19)$$

La igualdad de la integral a cero se cumple para un volumen arbitrario  $V$ . Por lo tanto, el integrando es idénticamente igual a

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (13.20)$$

La posibilidad de realizarse (13.20), lo mismo que el teorema de Gauss, se determina por la validez de la ley de Coulomb. Por consiguiente, (13.20) es la forma diferencial de la ley de Coulomb. El carácter lineal de la ecuación (13.20)

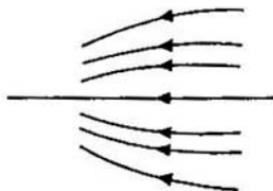


Fig. 34  
Líneas de fuerza del campo, cuya intensidad aumenta de derecha a izquierda

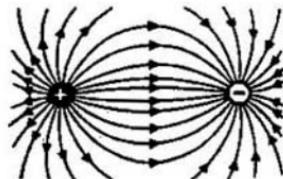


Fig. 35  
Líneas de fuerza de dos cargas con signos contrarios

refleja la validez del principio de superposición para la intensidad del campo. En este caso se dedujo para las cargas inmóviles. Se considera que es válido para un movimiento arbitrario de las cargas.

**Líneas de fuerza.** Se llama línea de fuerza de un campo eléctrico a la línea, la tangente a la cual en cada punto coincide con la intensidad  $\mathbf{E}$ . Con ayuda de las líneas de fuerza es cómodo representar gráficamente el campo. Se ha acordado caracterizar la intensidad del campo por el número de líneas de fuerza que atraviesan  $1 \text{ m}^2$  de área de la superficie, perpendicular a la dirección de las líneas de fuerza en el punto correspondiente: cuanto mayor es la densidad de las líneas, tanto mayor es la intensidad del campo. En la fig. 34 se muestra un campo eléctrico, cuya intensidad crece de derecha a izquierda.

**Fuentes y sumideros del vector  $\mathbf{E}$ .** Como se ve de la ecuación (13.20) las líneas de fuerza comienzan donde  $\text{div } \mathbf{E} > 0$  y terminan donde  $\text{div } \mathbf{E} < 0$ ; es decir, empiezan en las cargas positivas y terminan en las negativas. Se dice que las cargas positivas son las fuentes del vector  $\mathbf{E}$  y las negativas, los sumideros. Es obvio que semejante diferencia entre las cargas es puramente convencional: eso parte de la definición de la dirección de la intensidad del campo. Según su papel en la formación del campo eléctrico las cargas positivas y negativas son

totalmente equivalentes. La fig. 35 muestra las líneas de fuerza de dos cargas de signo contrario.

**Invariación de la carga.** Hallemos el flujo  $E$  a través de la superficie cerrada que rodea una carga puntual  $q$  que se mueve uniforme y rectilíneamente. La intensidad del campo para esta carga se determina por la fórmula (11.26). El flujo de intensidad es igual a

$$N = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E r^2 d\Omega = \oint E r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (13.21)$$

donde en calidad de superficie de integración se toma una esfera con centro en el punto donde está la carga en movimiento en cierto momento de tiempo y se tiene en cuenta que  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{S}$  son colineales al radio vector  $\mathbf{r}$ ;  $\theta$  y  $\varphi$  son los ángulos polar y axial, respectivamente, del sistema esférico de coordenadas, cuyo eje polar coincide con el eje  $X$  del sistema de coordenadas inmóvil. Sustituyendo (11.26) en (13.21), hallamos

$$N = \frac{q(1-\beta^2)}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad (13.22)$$

dónde la integración se lleva a cabo por el ángulo  $d\varphi$  del que el integrando en (13.21) no depende. Ya que  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ ,  $\sin \theta d\theta = -d \cos \theta$ , entonces

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1-\beta^2 + \beta^2 x^2)^{3/2}} = \frac{2}{\beta^3} \left[ \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \right]_0^1 = \frac{2}{1-\beta^2},$$

dónde  $a^2 = (1-\beta^2)/\beta^2$ . Entonces la relación (13.22) adquiere la forma

$$N = q/\epsilon_0, \quad (13.23)$$

que coincide con (13.8). Esto demuestra que el teorema de Gauss es también válido para la carga puntual que se mueve de modo uniforme y rectilíneo. Si la carga en el volumen se determina mediante el flujo  $E$  a través de la superficie cerrada que limita el volumen, la igualdad (13.23) expresa la invariación de la carga.

El teorema de Gauss expresa la relación entre el flujo de la intensidad del campo eléctrico a través de una superficie cerrada y la carga en el volumen, acotado por dicha superficie. La base física del teorema de Gauss es la ley de Coulomb o, con otras palabras, el teorema de Gauss es la forma integral de la ley de Coulomb.

Se llama línea de fuerza del campo eléctrico a la línea, la tangente a la cual en cada punto coincide con la intensidad del campo eléctrico.

Las cargas positivas son las fuentes de la intensidad del campo eléctrico, mientras que las negativas, los sumideros. Pero esta diferencia entre las cargas es puramente convencional. Su papel en la formación del campo eléctrico es absolutamente igual.

## § 14. Carácter potencial de un campo electrostático

*Se examinan las formas diferencial e integral del carácter potencial del campo. Se introduce el potencial escalar y se estudian sus propiedades. Se calcula el potencial de las cargas distribuidas en una zona finita del espacio. Se demuestra el teorema de Earnshaw*

**Trabajo en un campo eléctrico.** Puesto que la fuerza que actúa en el campo eléctrico sobre una carga puntual  $q$  es igual a  $F = qE$ , al desplazar la carga a  $dl$ , se efectúa un trabajo

$$dA = F \cdot dl = qE \cdot dl. \quad (14.1)$$

El trabajo específico que se gasta para desplazar la carga, se determina como la relación entre el trabajo y la carga:

$$dA' = dA/q = E \cdot dl. \quad (14.2)$$

Este trabajo se expresa en julios por Coulomb. Examinando (14.2) se ve que el trabajo que efectúa el campo se considera positivo, mientras que el que realizan las fuerzas exteriores respecto al campo, es negativo. Esto es la condición de los signos semejante a la que se utiliza en la termodinámica para el trabajo del sistema.

Al desplazar la carga del punto 1 al punto 2 por el trayecto  $L$  (fig. 36), el trabajo específico es

$$A' = \int_L^{(2)} E \cdot dl. \quad (14.3)$$

**Carácter potencial del campo coulombiano.** El campo de fuerzas se denomina potencial si el trabajo de desplazamiento en este campo depende sólo de los puntos inicial y final del camino y no depende de la trayectoria. Otra definición equivalente del carácter potencial es la exigencia que el trabajo de desplazamiento por cualquier circuito cerrado sea nulo.

Se sabe que la fuerza de gravedad de una masa puntual que decrece inversamente proporcional al cuadrado de las distancias, es de potencial, con la particularidad de que su carácter potencial se determina precisamente por esta dependencia de la distancia. Dado que la fuerza coulombiana de la carga puntual disminuye por la misma ley, ella es también de potencial. Toda la parte matemática de la teoría del potencial fue elaborada en los márgenes de la teoría de la gravedad. El concepto de potencial surgió en los trabajos de J. L. de Lagrange (1736–1813) en 1777, aunque no mencionó este nombre para la función que es el potencial. El término «potencial» fue introducido en la ciencia en 1828 por G. Green e independientemente por C. F. Gauss (1777–1855). Los científicos P. S. de Laplace (1749–1827) y S. D. Poisson (1781–1840), contribuyeron en gran medida en la teoría del potencial.

Basándose en el principio de superposición del carácter potencial del campo de una carga puntual, se desprende el carácter potencial de un campo electrostático arbitrario. La demostración matemática de esta afirmación es

$$\oint E \cdot dl = \oint \left( \sum_i E_i \right) \cdot dl = \sum_i \oint E_i \cdot dl = \sum_i 0 = 0, \quad (14.4)$$

donde

$$E = \sum E_i, \quad \oint E_i \cdot dl = 0. \quad (14.5)$$

**Rotor del vector.** El criterio del carácter potencial del campo que se utilizó hasta ahora, no es diferencial y no siempre se puede aplicar de manera fácil y

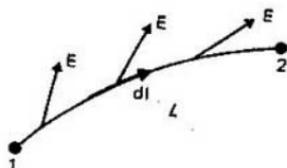


Fig. 36  
Trabajo en el campo eléctrico al desplazar una carga puntual

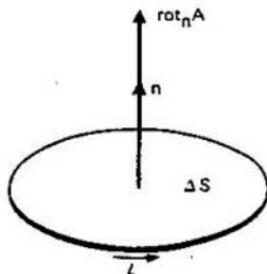


Fig. 37  
Para la definición vectorial del rotor

eficaz. Su aplicación se reduce a la verificación de la corroboración de que el trabajo por cualquier camino cerrado es nulo. Ello significa la necesidad de investigar una cantidad infinita de caminos cerrados, lo que es imposible para el caso general. El criterio puede aplicarse sólo cuando se conoce la expresión general para el trabajo por cualquier camino, dada en forma analítica. Pero sólo en casos muy raros se logra obtener semejante fórmula. Por esta razón, es indispensable hallar otro criterio del carácter potencial que pueda utilizarse en la práctica con facilidad y comodidad. La forma diferencial que se da con ayuda del rotor del vector es precisamente este criterio.

Ante todo examinemos la definición vectorial del rotor  $A$ , designado por  $\text{rot } A$ . El vector se determina por tres componentes que no yacen en un mismo plano. Eliamos cierta dirección que se caracteriza por el versor  $n$ . En el plano, perpendicular a  $n$ , limitemos el área  $\Delta S$  por un contorno cerrado muy pequeño  $L$  (fig. 37). Por lo general, la dirección del recorrido positivo en el contorno  $L$  está relacionada con  $n$  por la regla de Ampère (del sacacorchos). Se denomina **rotor** el vector, cuya proyección sobre la dirección de  $n$  se determina por la

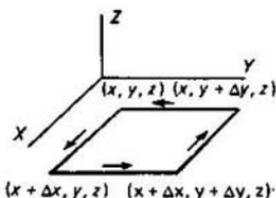


Fig. 38  
Para la definición del rotor  
en coordenadas

fórmula

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (14.6)$$

El rotor caracteriza la intensidad del «remolino» del vector, lo que se refleja en el nombre de la operación. Supongamos, por ejemplo, que el vector  $\mathbf{A}$  sea igual a la velocidad  $\mathbf{v}$  de los puntos de un sólido que gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje, colineal con  $\mathbf{n}$ . Hallemos  $\text{rot}_n \mathbf{v}$  para los puntos del eje de rotación. Elijamos en calidad de contorno  $L$  una circunferencia de radio  $r$  con centro en el eje y yacente en el plano perpendicular al eje. Es obvio que tenemos  $v = \omega r$ ,  $\Delta S = \pi r^2$  y  $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = v dl$ , donde  $dl$  es el valor escalar del elemento de la circunferencia. Por eso basándose en (14.6), obtenemos

$$\text{rot}_n \mathbf{v} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega r \oint dl}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\omega r 2\pi r}{\pi r^2} = 2\omega, \quad (14.7)$$

donde  $\oint dl = 2\pi r$  es la longitud de la circunferencia. De esta manera, el rotor de la velocidad lineal de los puntos de un sólido en rotación es igual a la velocidad angular duplicada de su rotación. Puede mostrarse que esta confirmación es válida no sólo para los puntos en el eje de rotación, sino para todos los puntos en general.

Al calcular el rotor en la práctica, es más cómodo emplear en lugar de (14.6) las fórmulas de coordenadas. Hallemos las proyecciones del rot  $\mathbf{A}$  en el sistema cartesiano rectangular de coordenadas. Cojamos como ejemplo el eje  $Z$  (fig. 38). El contorno  $L$  es un rectángulo con lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ . La dirección del recorrido positivo se indica en la figura. En este caso

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = & \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_x(x, y, z) dx + \int_{(x+\Delta x, y, z)}^{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)} A_y(x+\Delta x, y, z) dy + \\ & + \int_{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}^{(x, y+\Delta y, z)} A_x(x, y+\Delta y, z) dx + \int_{(x, y+\Delta y, z)}^{(x, y, z)} A_y(x, y, z) dy, \quad (14.8) \end{aligned}$$

donde la integración se lleva a cabo a lo largo de los lados del rectángulo entre sus vértices, cuyas coordenadas se designan en (14.8) como límites de integración. Teniendo en cuenta que  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son pequeños, cuan se quiera, se puede en los integrandos de las integrales segunda y tercera efectuar el desarrollo de  $A_y$  y  $A_x$  en serie respecto a  $\Delta x$  y  $\Delta y$  y limitarse a los términos lineales:

$$A_x(x, y+\Delta y, z) = A_x(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} + \dots \quad (a)$$

$$A_y(x+\Delta x, y, z) = A_y(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} + \dots \quad (b) \quad (14.9)$$

Calculemos la suma de la primera y tercera integrales:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_x(x, y, z) dx + \int_{(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}^{(x, y+\Delta y, z)} A_x(x, y+\Delta y, z) dx = \\
 &= \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} A_x(x, y, z) dx - \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \left[ A_x(x, y, z) + \Delta y \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \right] dx, \quad (14.10)
 \end{aligned}$$

donde para calcular la segunda integral en (14.10) se utilizó la fórmula (14.9a) y el signo menos apareció como consecuencia del cambio de la dirección de la integración por la contraria. En (14.10) los términos que contienen en los integrandos  $A_x(x, y, z)$  se eliminan mutuamente y por eso

$$I_1 = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (14.11)$$

De la misma manera calculamos la suma de las integrales segunda y cuarta en (14.8):

$$I_2 = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (14.12)$$

Según la fórmula (14.6), hallamos

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (14.13)$$

Por analogía calculamos las proyecciones sobre los otros ejes de coordenadas:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad (\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (14.14)$$

Designando como siempre por  $i_x, i_y, i_z$  los versores de los ejes de coordenadas, escribimos el vector de rot  $\mathbf{A}$  como

$$\text{rot } \mathbf{A} = i_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + i_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + i_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (14.15)$$

**Fórmula de Stokes.** La fórmula de Stokes enlaza la circulación del vector por el contorno que limita la superficie, con el flujo de su rotor a través de la superficie. La deducción de dicha fórmula se basa en la definición de (14.6). Calculemos el flujo del vector de rot  $\mathbf{A}$  a través de la superficie  $S$ , limitada por el contorno  $L$  (fig. 39), la que dividimos en elementos  $\Delta S_i$ :

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{\Delta S_i} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (14.16)$$

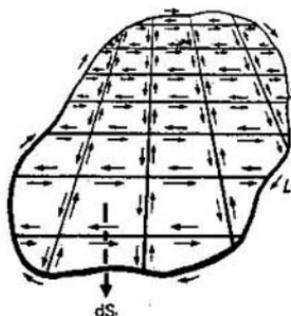


Fig. 39  
Para la demostración de la  
fórmula de Stokes

del área vecina. Las integrales tienen iguales módulos, pero signos contrarios, ya que los caminos a lo largo de las fronteras para calcular las integrales tienen orientaciones contrarias. Así pues, en la suma de (14.18) todas las partes de las integrales por las fronteras entre  $\Delta S_i$  se reducen recíprocamente y queda sólo la suma de las integrales por aquellas partes de los contornos  $L_i$  que no forman frontera alguna entre  $\Delta S_i$ , o sea, se conserva la integral por el contorno  $L$  que limita el área  $S$ . Para  $\Delta S_i \rightarrow 0$  la igualdad aproximada (14.18) se convierte en exacta:

$$\boxed{\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}, \quad (14.19)$$

denominada fórmula de Stokes.

Enunciación diferencial del carácter potencial del campo. La igualdad

$$\int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (14.20)$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son los caminos diversos entre los puntos  $A$  y  $B$ , expresa la independencia entre el trabajo y el camino al desplazar la carga en el campo eléctrico. Teniendo en cuenta que  $\int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{L_2}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , representemos (14.20) como

$$\int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_2}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (14.21)$$

donde  $L_1 + L_2 = L$ . La fórmula (14.21) es la enunciación matemática de la afirmación de que en un campo electrostático el trabajo es nulo al desplazar la carga por cualquier contorno cerrado.

Aplicando (14.19), de (14.21) obtenemos

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (14.22)$$

donde  $S$  es la superficie, limitada por el contorno  $L$ . Puesto que  $S$  es arbitraria, de (14.22) se desprende que

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (14.23)$$

Esta igualdad es la forma diferencial del carácter potencial del campo electrostático.

**Gradiente.** Sea  $\varphi(x, y, z)$  una función escalar del punto. El vector

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (14.24)$$

se llama gradiente de  $\varphi$ .

Para aclarar el sentido de este vector, calculemos la diferencial total de la función  $\varphi$  al desplazarse a  $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_x dx + \mathbf{i}_y dy + \mathbf{i}_z dz$ :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}. \quad (14.25)$$

De esta manera, un incremento infinitamente pequeño de  $d\varphi$  al desplazarse en cierta dirección, es igual al componente del  $\text{grad } \varphi$  por esta dirección, multiplicado por el módulo de desplazamiento. Tracemos la familia de superficies  $\varphi = \text{const}$  (fig. 40). Al moverse a lo largo de la superficie  $\varphi = \text{const}$ , tenemos  $d\varphi = 0$ . Por esta razón [véase (14.25)]  $\text{grad } \varphi \perp d\mathbf{r}$ , es decir, el vector del  $\text{grad } \varphi$  está dirigido perpendicularmente a la superficie  $\varphi = \text{const}$ . Es igual, según el módulo, a la derivada respecto a  $\varphi$  por el camino en dirección perpendicular a la superficie  $\varphi = \text{const}$ .

**Potencial escalar.** Dado que el trabajo para desplazar la carga en un campo potencial no depende del trayecto, sino que es sólo función de los puntos inicial y final del camino, se puede expresar a través de la coordenada de los extremos de la trayectoria. Eso se hace con ayuda del potencial.

Comprobando directamente, puede uno cerciorarse que existe siempre la igualdad idéntica

$$\text{rot grad } \varphi = 0. \quad (14.26)$$

Por esta razón, la ecuación (14.23) se satisface si  $\mathbf{E}$  se representa como

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (14.27)$$

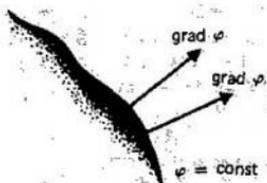


Fig. 40  
Dirección del  $\text{grad } \varphi$

El signo se elige de tal manera que la intensidad  $E$  esté dirigida hacia el decremento de  $\varphi$ . La función escalar  $\varphi$ , relacionada con la intensidad  $E$  del campo mediante la fórmula (14.27) se denomina potencial escalar del campo eléctrico.

La intensidad puede medirse de manera experimental. *El potencial  $\varphi$  no tiene un valor numérico determinado y no tiene sentido hablar de la definición experimental de su valor.*

**Multiformidad del potencial escalar.** De la fórmula (14.27) se ve que si a  $\varphi$  se le añade cierta constante, el campo, descrito por el potencial, no varía, ya que las derivadas de una magnitud constante con respecto a las coordenadas son nulas. Por lo tanto, *el potencial  $\varphi$  de un campo eléctrico dado está determinado sólo con una precisión de hasta una constante aditiva.*

**Normalización.** Haciendo uso de la multiformidad del potencial escalar, se le puede atribuir en cualquier punto, prefijado de antemano, cualquier valor, prefijado con anterioridad. Después de ello, el potencial tiene un valor bien determinado en todos los demás puntos, o sea, será unívoco. *Este procedimiento de atribuir al potencial un carácter unívoco, agregándole un valor determinado en uno de los puntos, se llama normalización del potencial.* Al estudiar los campos eléctricos en las proximidades de la superficie terrestre, por regla general, se toma como potencial nulo el de la Tierra. Al investigar cuestiones generales, cuando las cargas se hallan en una zona finita del espacio, es más cómodo considerar que el potencial es nulo a un alejamiento infinito de las cargas. Semejante normalización se utiliza con frecuencia en el presente libro.

**Expresión del trabajo por medio del potencial.** Si la carga se desplaza entre los puntos 1 y 2, el trabajo específico es igual a

$$A' = \int_{(1)}^{(2)} E \cdot dl = - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi \cdot dr = - \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi(1) - \varphi(2) \quad (14.28)$$

donde se utilizó la fórmula (14.25) y  $dl = dr$ . De (14.28) se ve que en efecto, el trabajo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria y no depende de la forma de esta última. Partiendo de esta misma fórmula, se desprende que la diferencia de potencial entre dos puntos tiene un sentido físico claro y puede medirse experimentalmente. Así, pues, *el sentido físico lo posee no el propio potencial, sino la diferencial de potencial entre distintos puntos.*

**Potencial del campo de una carga puntual.** Normalicemos el potencial a cero en el infinito. Considerando que en la fórmula (14.28) el punto 2 se encuentra en el infinito, suponemos que  $\varphi(2) = \varphi(\infty) = 0$  y obtenemos la siguiente expresión para el potencial en el punto 1:

$$\varphi(1) = \int_{(1)}^{\infty} E \cdot dl. \quad (14.29)$$

El camino del punto 1 al infinito puede ser cualquiera. Pero hay que elegirlo de manera que se simplifiquen en lo más posible los cálculos.

El campo de la carga puntual  $q$  es esféricamente simétrico. El potencial a la distancia  $r$  de la carga puntual es, según la fórmula (14.29)

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} \frac{r'}{r'} \cdot dl. \quad (14.30)$$

El camino de integración más adecuado es a lo largo del radio vector que parte de la carga puntual. Entonces  $(r \cdot dl/r) = dr$  y de (14.30) se desprende que

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (14.31)$$

Como ejercicio, se recomienda al estudiante comprobar si de esta fórmula se deduce la ley de Coulomb:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \text{grad } \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (14.32)$$

**Potencial del campo de un sistema de cargas puntuales.** Según el principio de superposición, *el potencial del campo de un sistema de cargas puntuales es igual a la suma de los potenciales creados en el punto en cuestión por cada una de las cargas.* Eso es obvio:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -\text{grad } \varphi_1 - \text{grad } \varphi_2 = -\text{grad } (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Por consiguiente, con ayuda de la fórmula (14.31) para el potencial, creado por un sistema de cargas puntuales  $q_i$ , puede escribirse la expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}, \quad (14.33)$$

donde  $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$  es la distancia entre la carga puntual  $q_i$ , que se encuentra en el punto  $(x_i, y_i, z_i)$ , y el punto  $(x, y, z)$  en el que se calcula el potencial.

**Potencial del campo para una distribución continua de las cargas.** Suponemos, como de costumbre, que *todas las cargas están en una zona finita del espacio y el potencial está normalizado a cero en el infinito.* Designando la densidad volumétrica de la carga por  $\rho(x', y', z')$ , obtenemos en vez de (14.33) para el potencial la expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (14.34)$$

Esta fórmula puede escribirse de otra manera, sin indicar detalladamente las variables:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}, \quad (14.35)$$

donde  $dV$  es el elemento de volumen por el que se efectúa la integración. Semejante forma breve de escritura se emplea con frecuencia en la exposición a continuación.

**Potencial del campo de las cargas superficiales.** Si la carga está en la superficie, la distribución se caracteriza por la densidad superficial de la carga  $\sigma$ . En el elemento del área  $dS$  (es un escalar y no vector del elemento de la superficie) se encuentra una carga  $\sigma dS$  y, por lo tanto, el potencial en cierto punto, de modo análogo con (14.35), se da por la fórmula

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}, \quad (14.36)$$

donde  $r$  es la distancia entre el elemento del área  $dS$  y el punto en que se calcula el potencial. La integral (14.36) se propaga a todas las superficies que poseen cargas superficiales.

**Infinitud del potencial del campo de una carga puntual.** De (14.31) se deduce que para  $r \rightarrow 0$  el potencial  $\varphi (r \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ . Esto está relacionado con el hecho de que la carga puntual posee formalmente una densidad volumétrica infinita, ya que su volumen es nulo. Precisamente la densidad volumétrica infinita de la carga es la que determina la inversión del potencial al infinito.

**Carácter finito del potencial, siendo continua la distribución de la carga con densidad finita.** Para la distribución continua de la carga con una densidad finita, el potencial no se reduce en ninguna parte al infinito. De ello puede uno cerciorarse al calcular el potencial por la fórmula (14.34). Tomemos el punto  $(x, y, z)$  como origen de las coordenadas ( $x = y = z = 0$ ) y efectuaremos los cálculos en el sistema esférico de coordenadas. El elemento de volumen en éste se expresa mediante la fórmula  $dx'dy'dz' = r'^2 \sin \theta' d\theta' d\alpha' dr'$ , donde  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ . Entonces [véase (14.34)]

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(r', \alpha', \theta') r' \sin \theta' d\alpha' dr'.$$

Por lo tanto, si  $\rho$  es finito, el potencial  $\varphi$  también es finito, lo que se requería demostrar.

**Continuidad del potencial.** La derivada del potencial por la coordenada cartesiana ofrece una componente correspondiente de la intensidad del campo eléctrico. Está claro que la intensidad no puede ser infinita. Por consiguiente, las derivadas del potencial respecto a las coordenadas deben ser finitas. Pero ello significa que el potencial es una función continua. De esta manera, el potencial  $\varphi$  es una función finita y continua con derivadas finitas por las coordenadas. Estas condiciones son importantes para resolver las ecuaciones diferenciales para el potencial.

**Teorema de Earnshaw.** Este teorema afirma que no existe una configuración de las cargas inmóviles que sea estable, si no hay otras fuerzas, además de las fuerzas de interacción coulombiana entre las cargas del sistema.

La demostración del teorema de Earnshaw se desprende de la fórmula de Gauss. Supongamos que el equilibrio es estable. Entonces, al desplazar cualquier

carga del sistema de su posición de equilibrio hacia cualquier dirección, sobre ella debe actuar una fuerza que tienda a volver la carga a la posición inicial. Pero eso significa que la intensidad del campo, creado en las inmediaciones de cada una de las cargas en reposo por todas las demás cargas, está dirigida a lo largo de los radios que emanan del punto en que está dicha carga. El flujo de la intensidad de este campo a través de una superficie cerrada alrededor de la carga se diferencia de cero, ya que la intensidad está orientada a lo largo de los radios en una dirección (en la cercanía de la carga positiva, hacia la carga y en la proximidad de la carga negativa, desde la carga). Según el teorema de Gauss, el flujo que atraviesa la superficie cerrada, se origina por la carga que está en un volumen limitado por dicha superficie. Esto contradice a la suposición inicial de que el flujo se crea por las cargas que se encuentran fuera del volumen. Por eso mismo se rechaza la suposición sobre la estabilidad de la configuración de las cargas inmóviles y el teorema de Earnshaw queda demostrado.

Las configuraciones estables de las cargas inmóviles pueden existir sólo cuando además de las fuerzas de interacción entre ellas, hay otras fuerzas ajenas que mantienen las cargas en las posiciones de equilibrio. Los estados estables de las cargas en movimiento pueden existir como, por ejemplo, el movimiento de dos cargas de signos contrarios por las elipses alrededor del centro de masas (si, claro está, menospreciamos la radiación).

La condición de los signos: el trabajo que ejecuta el campo se considera positivo y el que efectúan las fuerzas, exteriores respecto al campo, negativo.

La enunciación diferencial del potencial del campo eléctrico:  $\text{rot } E = 0$ . El signo menos en la expresión  $E = -\text{grad } \varphi$  se eligió de acuerdo para que  $E$  esté orientada hacia la disminución de  $\varphi$ .

La utilización de la ecuación de Poisson para resolver el problema no supone una normalización determinada del potencial y la ausencia de las cargas en el infinito. El potencial es una función continua y finita con derivadas finitas respecto a las coordenadas.

¿Qué métodos para definir la intensidad del campo por la distribución prefijada de las cargas conoce Usted? ¿Qué es lo que determina en cada caso concreto la elección del método para resolver la tarea?

¿Qué ventajas tiene la búsqueda de la intensidad del campo, resolviendo las ecuaciones de Laplace y Poisson, en comparación con otros métodos?

¿Cuáles son las propiedades del potencial, como solución de las correspondientes ecuaciones diferenciales?

¿Qué enunciaciones del carácter potencial del campo electrostático conoce Usted? ¿En qué consiste la ventaja de la forma diferencial?

¿Cuáles son las circunstancias físicas que determinan la posibilidad de normalizar el potencial escalar? ¿Qué normalizaciones son las más aplicables y en qué casos son convenientes?

Ejemplo 14.1. Calcular  $\text{grad } \varphi(r)$ .

Tenemos:

$$\text{grad } \varphi = i_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial r}{\partial x}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

De la misma manera calculamos  $\partial\varphi/\partial y$ ,  $\partial\varphi/\partial z$ . La raya significa la derivada con relación al argumento  $r$ . Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}, \text{ obtenemos } \text{grad } \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} (1_x x + 1_y y + 1_z z) = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

En particular, para  $\varphi(r) = r$ ,  $\text{grad } r = \mathbf{r}/r$ , y para  $\varphi(r) = 1/r$   $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^2$ .

**Ejemplo 14.2.** Calcular tanto directamente, como con ayuda del teorema de Stokes, la circulación del vector  $\omega \times \mathbf{r}$  por la circunferencia  $L$  de radio  $r_0$ , situada en el plano perpendicular al vector constante  $\omega$ . El centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas.

El vector  $\omega \times \mathbf{r}_0$  está dirigido en cada punto por la tangente a la circunferencia. Por lo tanto,

$$\oint_L \omega \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \omega r_0 \int_L d\mathbf{l} = 2\pi\omega r_0^2. \quad (14.38)$$

La dirección del recorrido se ha elegido de manera que los vectores  $\omega \times \mathbf{r}$  y  $d\mathbf{l}$  son colineales en cada punto. Durante la dirección inversa del recorrido cambia el signo de la integral.

Con ayuda del teorema de Stokes el problema se resuelve de otra manera:

$$\oint_L \omega \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $S$  es la superficie, limitada por la circunferencia  $L$ . Para  $\omega = \text{const}$   $\text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) = 2\omega$  y

$$\int_S \text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_S \omega \cdot d\mathbf{S} = 2\omega \int_S dS = 2\pi\omega r_0^2, \quad (14.39)$$

lo que como debe ser, coincide con (14.38).

No es difícil ver que la superficie  $S$  puede ser cualquiera, limitada por la circunferencia y no solamente plana. Tenemos

$$\int_{S_1} \text{rot}(\omega \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{S_1} \omega \cdot d\mathbf{S} = 2\omega \int_{S_1} dS. \quad (14.40)$$

Tomamos en consideración que

$$\oint_{S'} d\mathbf{S} = 0, \quad (14.41)$$

donde  $S'$  es una superficie cerrada que consta de la superficie  $S_1$  en (14.40) y la superficie  $S$  del círculo en (14.39), es decir,  $S' = S_1 + S$ . De (14.41) obtenemos

$$\int_{S_1} dS = -n\pi r_0^2, \quad (14.42)$$

donde  $n$  es un versor, perpendicular al plano del círculo. En (14.42) se tiene en cuenta que en (14.41) el elemento  $d\mathbf{S}$  está dirigido por la normal exterior hacia la superficie cerrada. Sustituyendo (14.42) en (14.40), obtenemos una fórmula idéntica a (14.39).

**Ejemplo 14.3.** Hallar el potencial y la intensidad del campo, creado por un hilo con carga uniforme de longitud finita  $2L$  en el espacio circundante. La densidad lineal de la carga del hilo es igual a  $\tau$ .

Coloquemos el origen del sistema cartesiano de coordenadas en la mitad del hilo (punto  $O$ ) y el eje  $Z$  lo dirigimos a lo largo del hilo (fig. 41). Como consecuencia de la simetría axial, el potencial depende sólo de  $r$  y de la coordenada  $z$ .

La fig. 41 muestra el plano que atraviesa el punto  $(r, z)$  y el eje  $Z$ . La carga  $\tau dz'$  que se encuentra en el elemento de longitud  $dz'$ , crea en el punto  $(r, z)$  un potencial

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}}$$

Por lo tanto, el potencial, originado por todo el hilo cargado, es igual a

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\tau dz'}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}} = \\ &= -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left( \frac{z-L + \sqrt{r^2 + (z-L)^2}}{z+L + \sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right). \end{aligned} \quad (14.43)$$

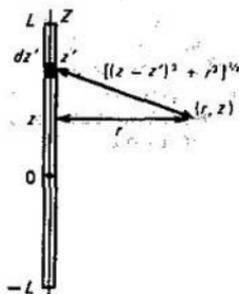


Fig. 41  
Carga lineal de longitud finita

Las componentes de la intensidad del campo eléctrico se dan mediante las fórmulas:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right), \quad (14.44)$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{z-L}{\sqrt{r^2 + (z-L)^2}} - \frac{z+L}{\sqrt{r^2 + (z+L)^2}} \right). \quad (14.45)$$

Para  $L \rightarrow \infty$  obtenemos

$$E_z = 0, \quad E_r = \tau/(2\pi\epsilon_0 r).$$

El potencial para  $L \rightarrow \infty$  tiende al infinito:

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} [\ln r - \ln(2L)] \rightarrow \infty.$$

Esto es la consecuencia de que la carga no está concentrada en una zona finita del espacio; por lo que no se puede utilizar la fórmula (14.43) para calcular el potencial en el caso de  $L \rightarrow \infty$ .

A distancias muy grandes del centro del hilo ( $R = \sqrt{r^2 + z^2} \gg L$ ) de (14.43) hallamos

$$\varphi = \frac{\tau 2L}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

donde  $Q = 2\tau L$  es la carga total del hilo. Así pues, a distancias grandes en comparación con las dimensiones lineales del hilo, el campo es próximo al coulombiano.

## § 15. Campo electrostático en el vacío

*Se exponen los métodos fundamentales del cálculo del potencial y la intensidad del campo electrostático y se analizan los ejemplos de los cálculos.*

**Planteamiento del problema.** Resolvamos uno de los problemas de la electrostática:

definir la intensidad del campo eléctrico, creado por una distribución conocida de cargas.

Este problema puede resolverse por varios métodos. En el sentido principal, todos esos métodos son equitativos, mientras que en el práctico, son diferentes en función de las circunstancias, ya que están relacionados con distintos volúmenes de cálculos. Es útil elegir el método que conduce al resultado buscado, aplicando el camino más sencillo.

**Aplicación directa de la ley de Coulomb.** En este caso la intensidad del campo en el punto se calcula como la suma de las intensidades de los campos,

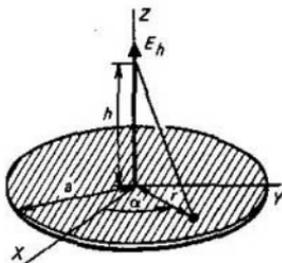


Fig. 42  
Campo en el eje de un disco con carga uniforme

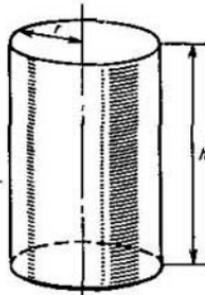


Fig. 43  
Para el cálculo de la intensidad del campo de un hilo con carga infinita mediante el teorema de Gauss

creados por todos los elementos  $\rho dV$  y  $\sigma dS$  de las cargas volumétricas y superficiales. Dicho método es el más natural, pero no el más sencillo, ya que hay que sumar los vectores, lo que complica bastante los cálculos. Un ejemplo de aplicación de este método se examinó en el § 8 al calcular la fuerza de interacción de una carga puntual y un hilo recto infinito con carga.

**Cálculo del potencial.** Las fórmulas (14.35) y (14.36) pueden aplicarse sólo para la distribución de la carga en una zona finita del espacio y la normalización del potencial a cero en el infinito.

A título de ejemplo, analicemos un campo en los puntos de la perpendicular al plano de un disco uniformemente cargado de radio  $a$  que atraviesa su centro (fig. 42). La carga total del disco es igual a  $Q$ . Para el potencial a la distancia  $h$  de la superficie del disco tenemos [véase (14.36)]

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}, \quad (15.1)$$

donde  $\sigma = Q/(\pi a^2)$  es la densidad superficial de la carga en el disco. Es cómodo calcular la integral en coordenadas polares, considerando que  $x^2 + y^2 = r^2$ ,

$dz dy = dS = r dr d\alpha$ . Entonces [véase (15.1)]

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} (\sqrt{a^2 + h^2} - h). \quad (15.2)$$

Partiendo de la simetría axial de la distribución de la carga, se desprende que el vector de intensidad del campo eléctrico está orientado a lo largo del eje del disco y es igual a

$$E_h = -\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right). \quad (15.3)$$

Para  $h \gg a$  puede considerarse que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/h^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{h^2} + \dots \quad (15.4)$$

y por lo tanto,

$$E_h \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{h^2}, \quad (15.5)$$

como se podía esperar sin efectuar los cálculos, puesto que a distancias grandes la intensidad del campo de un cuerpo con carga es próxima a la intensidad del campo de una carga puntual.

**Uso del teorema de Gauss.** En ciertos casos, al haber simetría, el método más eficaz de definición de la intensidad del campo es la aplicación del teorema de Gauss. Sea, por ejemplo, que se requiera hallar la intensidad del campo de un hilo recto infinito con carga de una densidad lineal  $\tau$ . Construyamos un cilindro circular de radio  $r$ , cuyo eje coincide con el hilo (fig. 43). Designemos la altura del cilindro por  $h$ . Apliquemos al volumen del cilindro el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (15.6)$$

donde  $Q$  es la carga en el volumen del cilindro y  $S$ , la superficie del cilindro. Es obvio que  $Q = \tau h$ . El flujo de  $\mathbf{E}$  a través de la base del cilindro es nulo, ya que el vector  $\mathbf{E}$  es paralelo a las bases. El flujo de  $\mathbf{E}$  que atraviesa la superficie lateral, se calcula fácilmente, puesto que en ésta el vector  $\mathbf{E}$  coincide en dirección con la normal a la superficie y según el módulo, es constante. Entonces

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{lat}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r h. \quad (15.7)$$

De esta manera, el teorema de Gauss conduce a la igualdad

$$E \cdot 2\pi r h = \tau h / \epsilon_0, \quad (15.8)$$

de la cual obtenemos

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (15.9)$$

En un campo que posee esa intensidad, la fuerza que actúa sobre la carga puntual, tiene el valor de (8.5), obtenido aplicando directamente la ley de Coulomb.

**Ecuación de Laplace y Poisson.** En muchos casos el método más preferible para hallar la intensidad del campo es la reducción de la tarea a la solución de una ecuación diferencial para el potencial. Para obtenerla, sustituyamos en

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (15.10)$$

la expresión

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (15.11)$$

Entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho/\epsilon_0. \quad (15.12)$$

Consideraremos que

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi, \quad (15.13)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador de Laplace, que representa la suma de las segundas derivadas respecto a las coordenadas. A veces se denota por  $\Delta \equiv \nabla^2$ . Haciendo uso de (15.13), la igualdad (15.12) se escribe como

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (15.14)$$

y se denomina **ecuación de Poisson**. En las zonas del espacio donde no hay cargas ( $\rho = 0$ ), dicha ecuación se transforma en

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (15.15)$$

llamada **ecuación de Laplace**.

Después de hallar el potencial  $\varphi$  como solución de (15.14), puede calcularse la intensidad del campo eléctrico por la fórmula (15.11). La solución debe satisfacer las exigencias, enunciadas para el potencial (véase el § 14): *el potencial  $\varphi$  es una función finita y continua, con derivadas finitas respecto a las coordenadas.*

Si todas las cargas están concentradas en una zona finita del espacio, la solución de (15.14), es (14.35), lo que se desprende de la unicuidad de la solución de los problemas del electromagnetismo (véase el § 58).

La ventaja más importante de hallar la intensidad del campo con ayuda de la ecuación diferencial de Poisson para el potencial es la comunidad amplia de este método y su aplicación. Las fórmulas (14.35) y (14.36) suponen que todas las cargas se encuentran en una zona finita del espacio, merced a lo cual tiene sentido la normalización del potencial a cero en el infinito. Pero la ecuación de Poisson no presupone la normalización definida del potencial y la ausencia de las cargas en el infinito.

**Cilindro circular infinito, cargado uniformemente.** Aplicando la ecuación de Poisson, hallemos el potencial, creado por un cilindro circular infinito de radio  $a$ , cuya densidad volumétrica de la carga es  $\rho = \text{const}$ .

Dirijamos el eje  $Z$  a lo largo del eje del cilindro. Como consecuencia de la simetría axial de la distribución de la carga, el potencial  $\varphi$  posee también simetría axial, o sea,  $\varphi = \varphi(r)$ . Por esta razón, es cómodo hacer uso del sistema

de coordenadas cilíndricas, cuyo ángulo axial designaremos por  $\alpha$ . En dicho sistema el operador de Laplace tiene el siguiente aspecto

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (15.16)$$

Puesto que en este caso el potencial  $\varphi$  depende sólo de  $r$ , la expresión (15.16) se simplifica:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (15.17)$$

y la ecuación de Poisson (15.14) se escribe así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) &= -\rho/\epsilon_0 \quad (0 < r < a), \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) &= 0 \quad (r > a). \end{aligned} \quad (15.18)$$

Las soluciones comunes de (15.18) se encuentran por integración:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1, \\ \varphi_2 &= A_2 \ln r + B_2, \end{aligned} \quad (15.19)$$

donde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son constantes de integración. Dado que el potencial en todos los puntos debe ser finito, y  $\ln r \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow 0$ , es necesario en la solución de (15.19) poner  $A_1 = 0$ . También resulta cómodo normalizar el potencial mediante la condición  $\varphi_1(0) = 0$ , entonces  $B_1 = 0$ .

Dado que no hay cargas superficiales, la intensidad del campo eléctrico en la superficie de la esfera es continua, es decir, es continua la derivada respecto al potencial. Las condiciones de continuidad para el potencial y su derivada a  $r = a$  dan dos ecuaciones algebraicas para definir las dos constantes  $A_2$  y  $B_2$ , que permanecen por ahora incógnitas:

$$A_2 \ln a + B_2 = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2, \quad \frac{A_2}{a} = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a. \quad (15.20)$$

De aquí se desprende que

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= -\frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} r^2 \quad (0 < r \leq a), \\ \varphi_2(r) &= \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \ln \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{\rho}{\epsilon_0} a^2 \quad (r \geq a). \end{aligned} \quad (15.21)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} r \quad (0 < r \leq a), \\ E_r &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r} \quad (r \geq a). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Teniendo en cuenta que  $\rho \pi a^2 = \tau$  es la carga que corresponde a un metro de longitud del cilindro, la segunda igualdad de (15.22) puede escribirse

como

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (15.23)$$

La comparación de (15.23) y (15.9) muestra que el campo fuera de un cilindro con carga uniforme es tal como si toda su carga estuviese concentrada en el eje.

La búsqueda de la intensidad del campo por la distribución prefijada de las cargas, aplicando directamente la ley de Coulomb, es la más natural, pero no la más sencilla.

Por lo general es útil hallar la intensidad del campo con ayuda del teorema de Gauss, habiendo simetrías de la distribución de la carga.

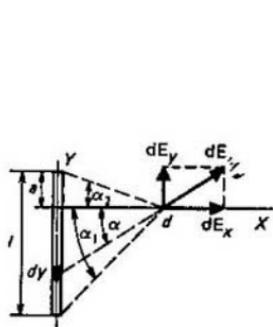


Fig. 44  
Para el cálculo de la intensidad del campo eléctrico de una carga lineal de longitud finita

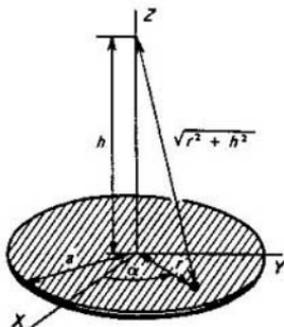


Fig. 45  
Para el cálculo de la intensidad del campo eléctrico de un disco con carga

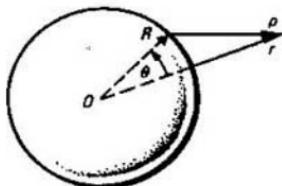


Fig. 46  
Para el cálculo de la intensidad del campo de la carga superficial de una esfera

¿Qué puede decirse del sentido físico del potencial en los márgenes de la electrostática? ¿Qué sentido físico tiene la diferencia de potencial?

**Ejemplo 15.1.** Hallar la intensidad del campo de un hilo recto de longitud finita, cargado uniformemente con una densidad lineal de la carga  $\tau$  (fig. 44). Tomar:  $\tau = 10^{-10}$  C/m;  $l = 1$  m;  $d = 0,5$  m;  $a = 0,5$  m.

Según la ley de Coulomb

$$dE_x = \frac{\tau dy \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\tau dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}},$$

$$dE_y = \frac{\tau dy \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\tau y dy}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + d^2)^{3/2}},$$

de donde

$$E_x = \frac{\tau d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}},$$

$$E_y = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(l-a)}^a \frac{y dy}{(y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Sustituyendo las variables  $y = d \tan \alpha$ ,  $dy = d \sec^2 \alpha$ ,  $1 + \tan^2 \alpha = 1/\cos^2 \alpha$  e integrando, obtenemos

$$E_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) = 1,27 \text{ V/m},$$

$$E_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = 0. \quad (15.24)$$

Para un hilo infinito ( $l \rightarrow \infty$ )  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$  y por eso  $E_y = 0$  y  $E_x = \tau/(2\pi\epsilon_0 d)$ .

**Ejemplo 15.2.** Aplicando el potencial, determinar la intensidad del campo en los puntos de la perpendicular al plano del disco si por éste se distribuye uniformemente una carga  $Q$ . El radio del disco es  $a$  (fig. 45).

Tomar:  $Q = 10^{-10}$  C;  $a = 10$  cm;  $h = 20$  cm (la distancia desde el plano del disco hasta el punto).

Según la fórmula (14.36) tenemos

$$\varphi(h) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma \, dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}, \quad \sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

Para calcular la integral pasemos a las coordenadas polares en el plano del disco:  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $dx \, dy = r \, dr \, d\alpha$ ,

$$\varphi(h) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} (\sqrt{a^2 + h^2} - h), \quad (15.25)$$

de donde

$$E_h = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right) = 18 \text{ V/m}. \quad (15.26)$$

La fórmula (15.26) coincide con (15.3).

**Ejemplo 15.13.** Hallar la intensidad del campo eléctrico que crea una carga superficial de la esfera de radio  $R$ . La carga total de la esfera es  $Q$  y la densidad superficial de la carga es  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ .

El potencial, originado por el elemento de la superficie cargada (fig. 46) en el punto que se caracteriza por  $r$ , es igual a

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\alpha}{\rho}, \quad (15.27)$$

donde  $R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\alpha$  es el elemento superficial de la esfera en coordenadas esféricas, cuyo eje polar coincide con el vector  $r$ ; el ángulo  $\alpha$  es axial. De la figura se ve que  $\rho = R - r$ . Después de elevar ambos miembros de la igualdad al cuadrado, hallamos que  $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$ . Tomando las diferenciales de los dos miembros de dicha igualdad, tenemos

$$2\rho \, d\rho = 2Rr \sin \theta \, d\theta,$$

de donde se deduce que  $R^2 \sin \theta \, d\theta = (\rho R/r) \, d\rho$ . Entonces [véase (15.27)]

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} \, d\rho \, d\alpha. \quad (15.28)$$

Integrando (15.28) por toda la superficie de la esfera, hallamos

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R}{r} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{|r-R|}^{r+R} d\rho = \frac{1}{2} \frac{\sigma R}{r} [\rho]_{|r-R|}^{r+R} = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & (r > R), \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & (r < R). \end{cases} \quad (15.29)$$

De aquí obtenemos la intensidad del campo eléctrico

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & (r > R), \\ 0 & (r < R), \end{cases}$$

o sea, fuera de una esfera cargada uniformemente la intensidad del campo es tal, como si toda la carga estuviese concentrada en su centro y dentro del volumen, limitado por la esfera, no hay campo.

## § 16. Campo electrostático en presencia de conductores

*Se examina la influencia de los conductores sobre un campo eléctrico. Se describen los fenómenos físicos fundamentales, determinados por la distribución de las cargas en la superficie del conductor (fuga de las cargas de la punta, etc.). Se discuten las características cuantitativas de las propiedades eléctricas de los conductores aislados y de sistemas de conductores. Se expone la esencia del método de representaciones.*

**Forma diferencial de la ley de Ohm.** Se llaman conductores a los cuerpos materiales, en los cuales, habiendo un campo eléctrico, surge el movimiento de las cargas, o sea, corriente eléctrica. La ley que une la intensidad de la corriente que circula por el conductor, y la diferencia de potencial, aplicada a sus extremos, fue descubierta experimentalmente en 1827 por G.S. Ohm (1787—1854) y tiene la forma

$$I = U/R, \quad (16.1)$$

donde  $R$  es una magnitud denominada resistencia del conductor. La ley de Ohm en forma diferencial se obtiene, escribiendo la relación (16.1) para la densidad de corriente. Examinemos un elemento infinitamente pequeño del conductor (fig. 47;  $\Delta l$  es la longitud;  $\Delta S$ , la sección transversal del conductor, a cuyos extremos se aplica la diferencia de potencial  $\Delta\varphi$ ). Sea  $\gamma$  la conductividad eléctrica de la substancia, que es la magnitud inversa a la resistividad eléctrica. La resistencia eléctrica del elemento del conductor y la intensidad de corriente que pasa por él, son iguales a

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}, \quad (16.2a)$$

$$I_\tau = j_\tau \Delta S, \quad (16.2b)$$

donde el índice  $\tau$  significa que se toma la componente de la densidad de corriente a lo largo del elemento del conductor. La ley de Ohm para este elemento del conductor se escribe así:

$$\Delta\varphi = j_\tau \Delta S \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}. \quad (16.3)$$

Tomando en consideración que  $(\Delta\varphi/\Delta l) = E_\tau$  es la componente de la intensidad del campo eléctrico en dirección del elemento en cuestión, de (16.3) obtenemos

$$j_\tau = \gamma E_\tau. \quad (16.4)$$

Esta relación es válida para cualquier orientación del elemento del conductor y, por lo tanto, puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (16.5)$$

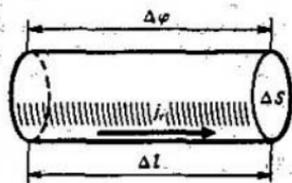


Fig. 47

Para la deducción de la forma diferencial de la ley de Ohm

**Clasificación de los materiales según su conductividad.** La conductividad eléctrica  $\gamma$  depende de las propiedades del material. Según el valor de ella, los materiales se dividen en tres clases: dieléctricos, semiconductores y conductores. Entre ellos no existe una brusca diferencia. Se considera la siguiente división de estos materiales según la conductividad:

a) dieléctricos. Substancias con pequeña conductividad eléctrica. Un dieléctrico ideal se caracteriza por la ausencia de conductividad. Pero ello puede realizarse sólo a 0 K. A temperatura diferente de 0 K, todos los materiales poseen cierta conductividad y, por lo tanto, no puede haber dieléctricos ideales; se acostumbra denominar dieléctrico al material, cuya conductividad eléctrica  $\gamma < 10^{-8}$  S/m;

b) los semiconductores poseen una conductividad eléctrica superior a  $10^{-3}$  S/m pero menor de  $10^3$  S/m;

c) los conductores se caracterizan por una conductividad eléctrica superior a  $10^3$  S/m. En su mayoría son metales. Entre ellos los mejores son el cobre y la plata, cuya conductividad eléctrica es del orden de  $10^7$  S/m.

**Ausencia de campo eléctrico dentro del conductor.** En la electrostática se examina el caso de cargas inmóviles cuando  $\mathbf{j} = 0$ . Entonces la igualdad (16.5) nos da

$$\mathbf{E} = 0, \quad (16.6)$$

es decir, *en el caso de equilibrio electrostático dentro del conductor no hay campo eléctrico.*

**Ausencia de cargas volumétricas en el conductor.** De la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (16.7)$$

para  $\mathbf{E} = 0$  se desprende que

$$\rho = 0, \quad (16.8)$$

o sea, *dentro del conductor no existen cargas volumétricas.* Eso significa que la carga del conductor se concentra en su superficie, en una capa de espesor atómico. Claro está, que *dentro del conductor existen tanto cargas positivas, como negativas, pero ellas se compensan mutuamente y en total las zonas internas del conductor son neutras.* [véase (16.8)].

El establecimiento de la neutralidad ocurre muy pronto. Supongamos que en cierto volumen dentro del conductor en el momento de tiempo  $t = 0$  la densidad de las cargas libres se diferencia de cero ( $\rho(0) \neq 0$ ). Entonces, teniendo en cuenta (16.5), la ecuación de continuidad (5.24) adquiere la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

donde  $\gamma = \text{const}$  (para un conductor homogéneo). Tomando en consideración (16.7), obtenemos de aquí la ecuación del cambio de  $\rho$  con el tiempo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho,$$

cuya solución es

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-(\gamma/\epsilon_0)t},$$

es decir, la densidad disminuye exponencialmente. Según la regla general, puede considerarse que la carga volumétrica que se formó, «desaparece» en el transcurso de un lapso  $\tau = \epsilon_0/\gamma$ , denominado tiempo de relajación. Para los metales éste es extremadamente pequeño. Por ejemplo, para el cobre ( $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ )  $\tau \approx 10^{-19} \text{ s}$ . Semejante lapso es muy pequeño incluso en las escalas de procesos interatómicos. Por eso en situaciones inestables, cuando los campos varían con el tiempo, a frecuencias no muy elevadas, puede considerarse con gran precisión que en el conductor las cargas libres están distribuidas por la superficie y están ausentes las cargas volumétricas. La conclusión dada permanece válida también al tener en cuenta la dependencia entre la conductividad  $\gamma$  y la frecuencia, aunque se obtiene entonces el aumento del tiempo de relajación en varios órdenes.

La instauración de la neutralidad está relacionada con las corrientes que, sin embargo, no crean cargas en las zonas donde circulan. Para comprender lo dicho, examinemos un ejemplo simple. Se tiene una esfera de radio  $a_2$ , cuya substancia se caracteriza por la constante dieléctrica  $\epsilon$  y la conductividad  $\gamma$ . En el momento inicial  $t = 0$  la zona esférica de radio  $a_1 < a_2$  está cargada uniformemente con una densidad de carga  $\rho_0$ . La capa esférica entre los radios  $a_1$  y  $a_2$  es neutra. Estudiemos el proceso de neutralización de la carga en el volumen de la esfera.

La variación de la densidad de la carga en diversos puntos de la esfera se da mediante la fórmula

$$\rho(r, t) = \begin{cases} \rho_0 e^{-t/\tau} & (r < a_1), \\ 0 & (r > a_1). \end{cases}$$

donde  $\tau = \epsilon/\gamma$ . La carga total de la esfera  $Q_0 = 4/3\pi a_1^3 \rho_0$  permanece constante, pero la carga de la región esférica de radio  $a_1$  disminuye según la ley

$$Q_1(t) = 4/3\pi a_1^3 \rho_0 e^{-t/\tau} = Q_0 e^{-t/\tau}.$$

Esta carga se traslada mediante la corriente de conducción a través de la capa esférica entre los radios  $a_1$  y  $a_2$  hacia la superficie de la esfera, donde se concentra en forma de carga superficial.

La distribución de la carga en cualquier momento de tiempo es esféricamente simétrica, por lo que, según el teorema de Gauss, obtenemos la siguiente expresión para la intensidad del campo eléctrico:

$$E_r = \begin{cases} \frac{Q_0 e^{-t/\tau_r}}{4\pi\epsilon a_1^2} & (0 < r < a_1), \\ \frac{Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\epsilon r^2} & (a_1 < r < a_2), \\ \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > a_2). \end{cases}$$

La carga superficial de la esfera crece. Ella puede calcularse aplicando el principio de conservación de la carga o partiendo de las condiciones de frontera. En el primer caso, obtenemos

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a_2^2} [Q_0 - Q_1(t)] = \frac{Q_0}{4\pi a_2^2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

En el segundo caso, tenemos

$$\sigma|_{r=a_2} = D_r|_{r=a_2+0} - D_r|_{r=a_2-0} = \epsilon_0 E_r|_{r=a_2+0} - \epsilon E_r|_{r=a_2-0} = \frac{Q_0}{4\pi a_2^2} (1 - e^{-t/\tau}),$$

donde los valores de la función con los argumentos  $r = a_2 + 0$  y  $r = a_2 - 0$  se toman de las partes exterior e interior, respectivamente, de la superficie de la esfera.

La densidad de la corriente de conducción es igual a

$$j_r = \gamma E_r = \begin{cases} \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau_r}}{4\pi\epsilon a_1^2} & (0 < r < a_1) \\ \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\epsilon r^2} & (a_1 < r < a_2) \\ 0 & (a_2 < r < \infty) \end{cases}$$

La intensidad de la corriente de conducción que circula por la superficie esférica de radio  $r$ , se determina mediante la fórmula

$$I_r = j_r 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{\epsilon} \frac{r^2}{a_1^2} & (0 < r < a_1) \\ \frac{\gamma Q_0 e^{-t/\tau}}{\epsilon} & (a_1 < r < a_2) \\ 0 & (a_2 < r < \infty) \end{cases}$$

Así, pues, la corriente total en la región  $0 < r < a_1$  crece al aumentar el radio. Eso se determina por el hecho de que cada punto de dicho volumen es una fuente de corriente de conducción. En la región  $a_1 < r < a_2$  no hay fuentes de la mencionada corriente y por eso la corriente total que atraviesa la superficie esférica no depende del radio.

**Inducción electrostática.** Si un conductor neutro se coloca en un campo eléctrico exterior, las cargas superficiales en el conductor se redistribuyen de

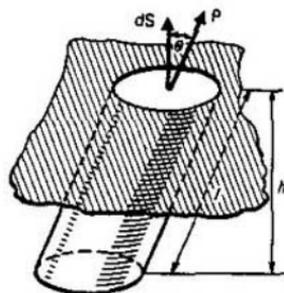


Fig. 48  
Para la deducción de la fórmula para la componente normal de la intensidad del campo eléctrico en las proximidades de la superficie del conductor

manera que el campo, originado por ellas dentro del conductor, compensa por completo el campo exterior. Como consecuencia, la intensidad sumatoria del campo dentro del conductor se anula. *El fenómeno de redistribución de las cargas superficiales en el conductor, al ubicarlo en un campo eléctrico exterior, se denomina inducción electrostática.* Si el conductor está cargado, bajo la influencia del campo exterior ocurre también la redistribución de la carga del conductor.

**Campo en las proximidades de la superficie del conductor.** Elijamos en la superficie del conductor un elemento superficial  $\Delta S$  y construyamos un cilindro recto de altura  $h$ , que interseca la superficie (fig. 48). Apliquemos a este cilindro el teorema de Gauss:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (16.9)$$

donde  $S$  es la superficie del cilindro;  $Q$ , la carga en el volumen del cilindro.

Dentro del cilindro la carga existe sólo en la superficie del conductor y se caracteriza por la densidad superficial  $\sigma$  y, por lo tanto,  $Q = \sigma S$ . Dentro del conductor el campo es nulo, por esta razón, el flujo de  $\mathbf{E}$  a través de una parte de la superficie del cilindro que se encuentra en el volumen del conductor, es igual a cero. El flujo a través de la parte del cilindro que está fuera del conductor, se compone de los flujos que atraviesan la base del cilindro y su superficie lateral. En el límite tomemos la altura  $h$  del cilindro tan pequeña como se quiera ( $h \rightarrow 0$ ), por lo tanto, también el área de la superficie lateral del cilindro y el flujo de  $\mathbf{E}$  a través de dicha superficie serán tan pequeñas como se desee. Por eso en el límite  $h \rightarrow 0$ , quedará sólo el flujo que atraviesa la base del cilindro:

$$\int_{\Delta S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_n \Delta S, \quad (16.10)$$

donde  $E_n$  es la componente normal de  $\mathbf{E}$ . Recordemos que en el teorema de Gauss por dirección positiva de la normal se toma la normal exterior respecto a la superficie cerrada. En el caso en cuestión ello significa que la normal positiva está orientada hacia el lado exterior de la superficie del conductor. Para  $h \rightarrow 0$ , teniendo en cuenta (16.10), la igualdad (16.9) toma el aspecto

$$E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0, \quad (16.11)$$

de donde

$$E_n = \sigma / \epsilon_0. \quad (16.12)$$

De esta manera, *la componente normal de la intensidad del campo en la superficie del conductor se determina unívocamente por la densidad superficial de las cargas.*

Ahora surge la cuestión de la componente tangencial de la intensidad del campo. Mostremos que debe ser nula, partiendo del hecho de que no puede existir el móvil perpetuo. Examinemos un contorno cerrado  $L$  que interseca la superficie del conductor, cuya parte superior va paralelamente a la superficie fuera del conductor y la inferior, dentro del conductor (fig. 49). Dentro del conductor la intensidad  $E$  del campo es nula y, por lo tanto, no existe la componente tangencial del campo. Supongamos que fuera del conductor la componente tangencial del campo no es igual a cero. Cojamos una carga positiva y desplacémosla por el contorno cerrado en la dirección indicada por las flechas en la fig.

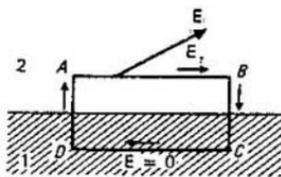


Fig. 49  
Para la demostración de la ausencia de la componente tangencial de la intensidad del campo eléctrico fuera del conductor

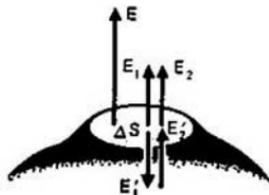


Fig. 50  
Mecanismo de formación del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor

49. En la sección  $AB$  el campo ejerce un trabajo positivo. La sección  $BC$  puede hacerse en el límite tan pequeña como quiera, ya que las secciones  $AB$  y  $CD$  se encuentran tan cerca como se quiera de la superficie del conductor. Por consiguiente, el desplazamiento por la sección  $BC$  está relacionado con el trabajo que puede hacerse tan pequeño como se desee. Para desplazar la carga en el segmento  $CD$  no se gasta trabajo alguno, puesto que el campo dentro del conductor está ausente. El trabajo, relacionado con el movimiento de la carga en la sección  $DA$ , lo mismo que en  $BC$ , puede hacerse tan pequeño como se quiera. De esta manera, como consecuencia de los desplazamientos de la carga por un contorno cerrado, el campo eléctrico efectúa un trabajo positivo y en el sistema no habrá ningunos cambios más. Puede repetirse este ciclo, obteniendo otra vez el mismo trabajo, etc. Así pues, se realiza el móvil perpetuo de primer género, lo que en principio, es imposible. Este móvil perpetuo efectúa el trabajo a cuenta de la componente tangencial de la intensidad del campo eléctrico en las inmediaciones de la superficie del conductor. Por lo tanto, esta componente debe ser nula. Con otras palabras, la igualdad de la componente tangencial del campo eléctrico a cero en la superficie del conductor es consecuencia del carácter potencial del campo electrostático y de la ausencia del campo dentro del conductor.

La igualdad

$$E_{\tau} = 0 \quad (16.13)$$

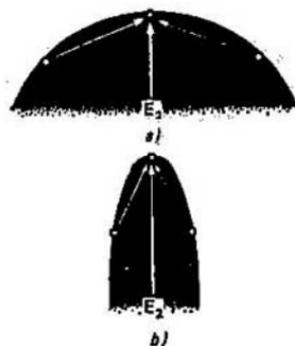


Fig. 51  
Dependencia entre la densidad superficial de la carga y la curvatura de la superficie

claro que las cargas del elemento superficial  $\Delta S$  originan un campo por las dos partes del elemento. Dado que las dos partes del elemento  $\Delta S$  son equivalentes, puede hacerse la conclusión de que los vectores  $E_1$  y  $E_1'$  tienen orientación contraria y son iguales por el módulo  $|E_1| = |E_1'|$ . El campo  $E_2$  se crea por todas las cargas que se encuentran fuera del elemento  $\Delta S$ . Es obvio que estas cargas generan no sólo la intensidad  $E_2$  fuera del conductor, sino que también la intensidad  $E_2'$  dentro del conductor. Puesto que esto es precisamente el campo eléctrico en el espacio sin las cargas que lo originan, él debe ser continuo y, por lo tanto,  $E_2 = E_2'$ . La intensidad del campo total dentro del conductor es igual a cero, es decir,  $E' = E_1' + E_2' = 0$ . De aquí se desprende que  $E_1' = -E_2'$ . Teniendo en cuenta también la igualdad  $|E_1| = |E_1'|$ ; sacamos la conclusión de que  $|E_1| = |E_2|$ .

De aquí se deduce que

$$E_1 = E_2 = 1/2 E, \quad (16.14)$$

es decir, *la intensidad del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor consta de dos partes iguales: una se origina por las cargas superficiales del elemento adyacente de la superficie y la otra, por todas las demás cargas que yacen fuera de dicho elemento de la superficie.*

**Dependencia entre la densidad superficial de las cargas y la curvatura de la superficie.** La carga se distribuye por la superficie del conductor de manera no uniforme, es decir, la densidad superficial de la carga depende de la curvatura de la superficie. Para cerciorarse de ello analicemos la distribución de la intensidad del campo en las proximidades de cierto elemento superficial (fig. 51). Siendo pequeña la curvatura de la superficie (fig. 51, a), las cargas que están fuera de  $dS$  crean cerca de este elemento una pequeña componente normal de intensidad  $E_2'$ . Como consecuencia, para compensarla las cargas del elemento su-

significa que *la intensidad del campo eléctrico en las proximidades de la superficie del conductor está dirigida por la perpendicular a la superficie y es igual a  $\sigma/\epsilon_0$*  [véase (16.12)].

**Mecanismo de formación del campo cerca de la superficie del conductor.** En la electrostática la única fuente de creación del campo eléctrico son las cargas. Por esta razón, el campo en las inmediaciones de la superficie del conductor se crea por todas las cargas superficiales del conductor dado y por todas las cargas que se encuentran fuera del conductor. Separemos un elemento infinitamente pequeño  $\Delta S$  de la superficie del conductor (fig. 50). La intensidad  $E$  del campo cerca de la superficie del conductor consta de dos partes: la intensidad  $E_1$  del campo, originado por las cargas que se encuentran en el elemento  $\Delta S$ , y la intensidad  $E_2$  del campo, creado por todas las demás cargas fuera del elemento  $\Delta S$ . Está

periférica deben originar una intensidad relativamente pequeña del campo  $E'_1 = -E_1$ . Conforme a las fórmulas (16.14) y (16.12), concluimos que en este elemento la densidad superficial de la carga debe ser relativamente pequeña e igual a  $\sigma = 2\epsilon_0 E'_1$ . Pero si la curvatura de la superficie en las inmediaciones del elemento en cuestión es grande, la intensidad  $E_1$ , creada por las cargas que se encuentran fuera del elemento superficial  $dS$ , es grande y, correspondientemente, debe ser mucho mayor la intensidad, originada por las cargas que yacen en el

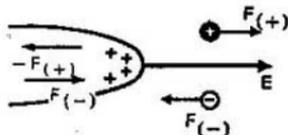


Fig. 52  
Fuga de las cargas de la punta

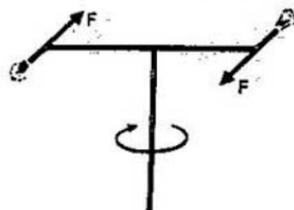


Fig. 53  
Rueda «Segner» eléctrica

elemento superficial. Pero ello significa que la densidad superficial de las cargas en dicho elemento debe ser mayor. Así pues, puede sacarse la conclusión de que *la densidad superficial de las cargas crece al aumentar la curvatura de la superficie, o sea, crece al disminuir el radio de curvatura.*

Mediante razonamientos análogos, puede uno cerciorarse de que *en la superficie, cóncava hacia dentro, del conductor la densidad de la carga disminuye.*

El aumento de la densidad superficial de la carga en superficies convexas se observa con evidencia en la fuga de la carga de una punta.

**Fuga de la carga de una punta.** Examinemos lo que ocurre en la cercanía de una punta del conductor cargado (fig. 52). La intensidad  $E$  en las proximidades de la punta es muy elevada. En el aire circundante existen cargas (iones, electrones) sobre las cuales en el campo con intensidad  $E$  actúa una fuerza. De acuerdo con la tercera ley de Newton, una fuerza igual, pero con dirección contraria, actúa sobre las cargas de la punta. Por eso como consecuencia de la interacción, las cargas en el aire cerca de la punta y la propia punta reciben los mismos impulsos, pero de orientación contraria. Las cargas en el aire, que se mueven hacia la punta, influidas por la fuerza que actúa sobre ellas, al caer sobre la punta, le transmiten su impulso y carga. Este impulso es de igual módulo que el impulso que recibió la punta a causa de la interacción con la carga correspondiente, pero de dirección contraria. Por lo tanto, debido a que las cargas caen sobre la punta, dichos impulsos se compensan mutuamente y el resultado total de la interacción es nulo.

Así pues, *la interacción de las cargas de la punta con las de signos contrarios del aire circundante no conduce a la aparición de fuerza alguna que actúe sobre la punta.*

Otra cosa es cuando se trata de cargas del mismo signo: la fuerza que actúa sobre las cargas de la punta, está dirigida todo el tiempo hacia el conductor (en

la fig. 52 esta fuerza se denota  $-E_{(+)}$ . Si la punta tiene carga positiva, las cargas negativas que llegan a la punta, como se muestra en la fig. 52, neutralizan las correspondientes cargas positivas. Eso parece como si las cargas positivas abandonasen la punta o, como se dice, se fugaran de la punta. La fuerza  $-E_{(+)}$  que actúa sobre la punta en este caso, equivale a la fuerza reactiva que surge como consecuencia de la fuga de las cargas de la punta. Si esta última posee carga negativa, los electrones la abandonan de hecho, o sea, en realidad se fugan de la punta. El mecanismo de la aparición de la «fuerza reactiva» aquí es completamente semejante al descrito anteriormente.

Esto significa que la «fuerza reactiva» aparece no sólo en el momento de «partida» de los electrones de la superficie del conductor, sino que en todos los momentos posteriores de tiempo cuando el electrón se acelera por el campo de las cargas que quedaron en la punta.

Una demostración eficaz de la presencia de la «fuerza reactiva» a causa de la fuga de la carga de una punta, es la rotación de la rueda «Segner» eléctrica (fig. 53). Las flechas punteadas muestran la dirección de la fuga de las cargas, merced a lo cual surge la «fuerza reactiva» y el segmento horizontal del conductor comienza a girar rápidamente alrededor de su eje vertical.

**Electroscopios y electrómetros.** El dispositivo más simple para descubrir las cargas eléctricas es una barra metálica vertical o una placa, al cual se fija por un extremo una lámina conductora ligera o una flecha (fig. 54). Al no haber carga alguna en la barra metálica y en la lámina (flecha), esta última pende verticalmente, de modo paralelo a la barra. Habiendo una carga, las fuerzas de repulsión entre las cargas de un mismo signo en la barra y lámina (flecha) desvían la lámina respecto a la posición vertical a cierto ángulo. De esta manera, el dispositivo puede servir de indicador para la presencia de carga, o sea, de electroscopio. El ángulo de desviación de la flecha respecto a la perpendicular es tanto mayor, cuanto mayor es la carga de la barra. Esto permite graduar el electroscopio y, basándose en el ángulo de desviación, definir la cantidad de electricidad en él. Semejante electroscopio, adaptado para las mediciones cuantitativas, se denomina electrómetro. La carga depende del potencial de la barra y la flecha. Por eso con ayuda del electrómetro puede medirse la diferencia de potencial. El electrómetro se ubica en un cuerpo (fig. 54).

La dependencia entre la densidad superficial de la carga y la curvatura de la superficie del conductor se muestra mediante el electrómetro de la siguiente manera. Con una bola conductora pequeña, fijada en un mango no conductor, se toca la sección correspondiente de la superficie del conductor (fig. 55). En la bola se crea una carga tanto mayor, cuanto mayor sea la densidad superficial de la carga en la parte del conductor con la que está en contacto la bola. Después de eso, la bola se aleja de la superficie del conductor y se pone en contacto con la barra del electrómetro. Este último recibe una carga tanto mayor, cuanto mayor sea la carga de la bola. Por esta razón, por la desviación de la aguja se puede juzgar sobre la densidad superficial de la carga de aquella sección de la superficie del conductor, de la que se tomó la carga, transmitida al electrómetro. Haciendo uso de las relaciones de los ángulos de desviación de la aguja, puede juzgarse sobre la relación de las densidades superficiales de la carga en las seccio-

nes correspondientes de la superficie del conductor. La densidad superficial de la carga varía considerablemente en función de la curvatura de la superficie.

**Pantalla metálica.** El mecanismo de aniquilación del campo dentro de un conductor por la distribución de las cargas en su superficie muestra que las partes interiores del conductor no tienen nada que ver con eso, por lo que se pueden eliminar. Como consecuencia de eso queda una envoltura cerrada conductora

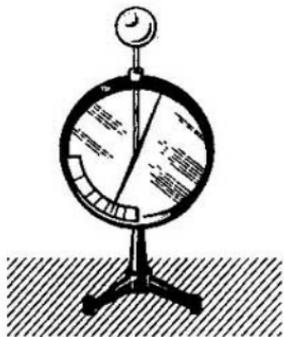


Fig. 54  
Esquema del electroscopio y electrómetro

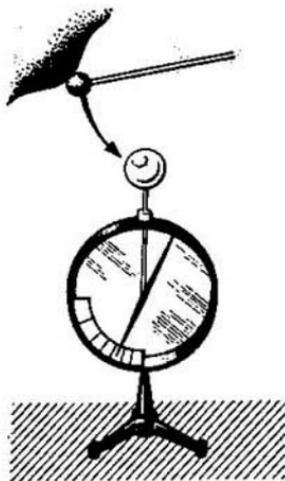


Fig. 55  
Demostración de la dependencia entre la densidad de la carga superficial en el conductor y la curvatura de la superficie con ayuda del electrómetro

(fig. 56). En el espacio, rodeado por la envoltura, el campo eléctrico es nulo. La envoltura cerrada se denomina **pantalla**. Esta apantalla el espacio interior contra los efectos del campo eléctrico exterior. Las pantallas se utilizan para proteger los dispositivos técnicos contra las influencias de los campos eléctricos exteriores. Por lo general, se confeccionan no de material conductor continuo, sino de una red con celdillas pequeñas. Como muestran la experiencia y el cálculo, la capacidad de blindaje de semejante red es algo inferior a la de la pantalla continua, pero se gasta mucho menos material y la estructura de la pantalla resulta más sencilla.

¿Apantalla una envoltura conductora cerrada el espacio exterior de las cargas que están dentro de la cavidad? O hablando de otra manera, ¿puede penetrar el campo de las cargas, que hay en el volumen, rodeado por una envoltu-

ra conductora cerrada, al espacio exterior? Sí, penetra. Para cerciorarse de ello es necesario analizar con más detalle la situación.

Supongamos que en el volumen  $V$  dentro de la cavidad está distribuida una carga

$$Q = \int_V \rho \, dV. \quad (16.15)$$

Según la ley de la inducción electrostática en la superficie interior de la envoltura se forma una carga de signo contrario (fig. 57). Para hallar su valor

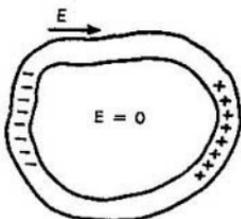


Fig. 56  
Pantalla metálica para los campos exteriores

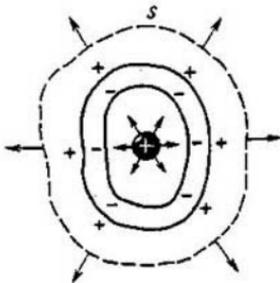


Fig. 57  
Carga, rodeada por una envoltura conductora cerrada

utilicemos el teorema de Gauss, aplicado al volumen dentro de la envoltura cerrada:

$$\int_{S_{int}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV, \quad (16.16)$$

donde  $S_{int}$  es la superficie interior de la envoltura.

Designando por  $\sigma$  la densidad superficial de la carga en la superficie interior, obtenemos para la intensidad  $\mathbf{E}$  del campo cerca de la superficie [(véase (16.12))]:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}, \quad (16.17)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal a la superficie interior de la envoltura, dirigida hacia dentro del volumen, limitado por la envoltura. Consideremos que  $d\mathbf{S}$  en (16.16) está orientado por la normal exterior al volumen  $V$ , es decir, de manera contraria a  $\mathbf{n}$ . Por lo tanto,

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = dS \cos(\mathbf{n}, d\mathbf{S}) = dS \cos \pi = -dS. \quad (16.18)$$

La integral en el primer miembro de (16.16), teniendo en cuenta (16.17) y (16.18), es igual a

$$\int_{S_{int}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_{int}} \sigma dS. \quad (16.19)$$

Entonces el teorema de Gauss (16.16) adquiere la forma

$$-\int_{S_{int}} \sigma dS = \int_V \rho dV = Q. \quad (16.20)$$

Por lo tanto, en la superficie interior de la envoltura se forma una carga de igual valor absoluto que la carga dentro de la cavidad, pero de signo contrario.

La intensidad del campo dentro de la envoltura es nula, ya que la envoltura es en sí un conductor. En la superficie exterior de la envoltura hay cierta carga, cuyo signo es contrario al de la carga en la envoltura interior, mientras que el valor absoluto de la carga, según el principio de conservación de la carga, es igual al de la carga en la superficie interior.

Para demostrar la existencia de un campo eléctrico en el espacio exterior haremos uso del teorema de Gauss. En la fig. 57 la curva a trazos muestra la superficie cerrada que rodea la envoltura. La carga total en el volumen, limitado por esta superficie cerrada, es igual a la carga dentro de la cavidad, limitada por la envoltura, ya que la carga de la envoltura es nula. Por consiguiente, el teorema de Gauss tiene el aspecto

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = Q/\epsilon_0 \neq 0, \quad (16.21)$$

es decir, la intensidad  $\mathbf{E}$  del campo en el espacio exterior que rodea la envoltura no es nula.

Ahora spongamos a tierra la envoltura, o sea, unámosla mediante un conductor con un cuerpo conductor muy grande alejado. Por lo general la Tierra sirve de ese cuerpo (fig. 58). Para simplificar el análisis representemos este cuerpo como un medio conductor infinito que ocupa todo el espacio fuera de la envoltura y que está en contacto con ella. Todas las cargas de la superficie exterior de la envoltura se alejarán al infinito, quedará sólo la carga dentro de la cavidad y la carga en la superficie interior de la envoltura. La intensidad del campo dentro del medio conductor que rodea la envoltura, es nula. En este caso el papel del medio se reduce sólo al hecho de que se asegure el alejamiento de la carga de la superficie exterior de la envoltura al infinito. Por esta razón, el papel de las zonas del medio a una distancia finita de la envoltura puede desempeñarlo un conductor fino de alambre que garantice la posibilidad del intercambio de cargas entre la envoltura y las zonas del medio suficientemente alejadas. Está claro que después de eliminar el medio conductor de la región que rodea la en-

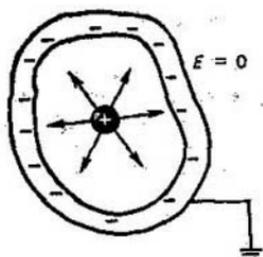


Fig. 58  
La envoltura cerrada puesta a tierra apantalla el espacio exterior contra las cargas dentro del volumen

voltura, la intensidad del campo en los puntos de la región es como siempre nula. Así pues, *la envoltura cerrada puesta a tierra apantalla el espacio exterior de las cargas que se encuentran en el volumen rodeado por esta envoltura. La envoltura no puesta a tierra no apantalla.*

**Potencial de un conductor.** De la igualdad a cero de la intensidad  $E$  del campo dentro del conductor, se desprende que en todos los puntos del conductor el potencial tiene un mismo valor, es decir, la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 del conductor [véase (14.28)] es igual a

$$\varphi(2) - \varphi(1) = \int_{(1)}^{(2)} E \cdot dl = 0. \quad (16.22)$$

*El valor del potencial, igual en todos los puntos del conductor, se denomina potencial del conductor.*

Supongamos que existe un conductor cargado aislado. En el espacio que rodea el conductor hay un campo eléctrico, creado por la carga del conductor. Normalicemos el potencial a cero en el infinito. Entonces [véase (14.29)] el potencial del conductor puede expresarse mediante la fórmula

$$\varphi = \int_{(\text{superficie del conductor})}^{\infty} E \cdot dl. \quad (16.23)$$

En la fórmula (16.23) el camino de integración comienza en cualquier punto del conductor y termina en el infinito.

**Capacidad de un conductor aislado.** ¿De qué depende el potencial de un conductor aislado? De la fórmula (16.23) se ve que según el principio de superposición, el potencial debe ser directamente proporcional a la carga, ya que  $E$  en el integrando de (16.23) es directamente proporcional a la carga. A continuación queda evidente que el potencial depende de las dimensiones y la forma del conductor, las cuales se tienen en cuenta por su capacidad.

Se llama **capacidad** del conductor a la relación entre la carga  $Q$  del conductor aislado y su potencial  $\varphi$ :

$$C = Q/\varphi. \quad (16.24)$$

La capacidad del conductor se expresa en faradios (F). De (16.24) hallamos:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}. \quad (16.25)$$

En el sistema de unidades electrostáticas la capacidad se expresa en centímetros. La fórmula para la capacidad coincide con (16.24). Dado que  $1 \text{ V} = (1/300)$  de unidades del sistema cegesimal,  $1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9$  unidades del sistema cegesimal, de (16.24) se desprende que  $1 \text{ F} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$ .

El faradio es una unidad muy grande. Calculemos, por ejemplo, la capacidad de una esfera, cuyo radio es  $R$  y la carga  $Q$ . Puesto que la intensidad del campo de semejante esfera en el espacio que la rodea es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (16.27)$$

el potencial y la capacidad se expresan por las fórmulas:

$$\varphi = \int_R^{\infty} E \, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad (16.28)$$

$$C = Q/\varphi = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (16.29)$$

Para el radio de la esfera de 1 cm hallamos

$$C = 10^{-2}/(9 \cdot 10^9) \approx 10^{-12} \text{F}. \quad (16.30)$$

Por esta razón, para la capacidad se suelen emplear los submúltiplos del faradio: microfaradio ( $\mu\text{F}$ ), nanofaradio ( $\text{nF}$ ) y picofaradio ( $\text{pF}$ ).

**Sistema de conductores.** Si hay varios conductores, el potencial de cada uno de ellos depende no sólo de la carga del conductor, sino que también de las intensidades de los campos, creados por otros conductores, o, con otras palabras, es función de las cargas de los otros conductores, con la particularidad de que, según el principio de superposición, es directamente proporcional a esas cargas.

Para mayor definición examinemos dos conductores (fig. 59). Basándose en lo dicho, puede escribirse

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2, \quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2, \quad (16.31)$$

dónde  $\alpha_{ij}$  son los coeficientes potenciales que dependen de la forma y las dimensiones de los conductores, asimismo de su disposición mutua. El cálculo teórico de dichos coeficientes resulta ser un problema matemático muy complejo. Por lo general, se determinan por vía experimental.

Los coeficientes potenciales no son mutuamente independientes, de los que uno puede cerciorarse de la siguiente manera. Sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las densidades superficiales de las cargas;  $r_{11}$ , la distancia entre el elemento de integración  $dS_1$  en la superficie del primer conductor hasta cierto punto fijo dentro de él;  $r_{12}$ , la distancia entre el elemento de la superficie  $dS_2$  del segundo conductor hasta el mismo punto. Entonces los potenciales de los conductores primero y segundo son respectivamente iguales a

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1 \, dS_1}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2 \, dS_2}{r_{12}}, \quad (16.32)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \frac{\sigma_2 \, dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \frac{\sigma_1 \, dS_1}{r_{21}}, \quad (16.33)$$

(el sentido de  $r_{22}$  y  $r_{21}$  es el mismo que el de  $r_{11}$  y  $r_{12}$ ).

Las cargas de los conductores son iguales a:

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 \, dS_1, \quad Q_2 = \int_{S_2} \sigma_2 \, dS_2. \quad (16.34)$$

Supongamos que las cargas de los conductores han variado:

$$Q'_1 = \int_{S_1} \sigma'_1 \, dS_1, \quad Q'_2 = \int_{S_2} \sigma'_2 \, dS_2. \quad (16.35)$$

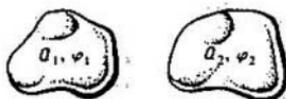


Fig. 59  
Sistema de conductores

Multipliquemos ambos miembros de (16.32) por  $Q'_1$  y (16.33) por  $Q'_2$ , y sumemos miembro a miembro las igualdades obtenidas:

$$\begin{aligned}
 Q'_1\varphi_1 + Q'_2\varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma'_1 dS_1 \int_{S_1} \frac{\sigma_2 dS_{11}}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma'_1 dS_1 \int_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{r_{12}} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma'_2 dS_2 \int_{S_2} \frac{\sigma_1 dS_2}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma'_2 dS_2 \int_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{r_{21}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 \int_{S_1} \frac{\sigma'_1 dS_{11}}{r_{11}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 \int_{S_1} \frac{\sigma'_1 dS_1}{r_{12}} + \\
 &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_2} \sigma_2 dS_2 \int_{S_2} \frac{\sigma'_2 dS_{22}}{r_{22}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 \int_{S_2} \frac{\sigma'_2 dS_2}{r_{21}} = Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2, \quad (16.36)
 \end{aligned}$$

donde el orden de integración se ha cambiado, ya que la integración se efectúa con relación a diferentes variables independientes. Las magnitudes  $\varphi'_1$  y  $\varphi'_2$  son potenciales de los conductores cuando sus cargas son iguales a  $Q'_1$  y  $Q'_2$ . La relación, obtenida en (16.36)

$$\boxed{Q'_1\varphi_1 + Q'_2\varphi_2 = Q_1\varphi'_1 + Q_2\varphi'_2} \quad (16.37)$$

se denomina **teorema de la reciprocidad**. Partiendo de él, se obtiene la condición a que satisfacen los coeficientes potenciales  $\alpha_{ij}$ .

Si la carga del segundo conductor es nula ( $Q_2=0$ ,  $Q_1 \neq 0$ ), entonces 0 [véase (16.31)]

$$\varphi_1 = \alpha_{11}Q_1, \quad \varphi_2 = \alpha_{21}Q_1. \quad (16.38)$$

Si la carga del primer conductor es nula ( $Q_1=0$ ,  $Q_2 \neq 0$ ), [véase (16.31)]

$$\varphi'_1 = \alpha_{12}Q'_2, \quad \varphi'_2 = \alpha_{22}Q'_2 \quad (16.39)$$

El teorema de la reciprocidad (16.37) para estos dos casos adquiere la forma

$$Q'_2\varphi_2 = Q_1\varphi'_1. \quad (16.40)$$

Sustituyendo en (16.40) las expresiones para  $\varphi_2$  y  $\varphi'_1$  [véase (16.38) y (16.39)] y reduciendo ambos miembros de la igualdad obtenida por el factor común  $Q'_1Q_1$ , hallamos

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad (16.41)$$

es decir, *los coeficientes potenciales son simétricos respecto a sus índices*.

No es difícil realizar todos los cálculos para cualquier número de conductores, escribiendo las relaciones iniciales (16.31) para  $n$  conductores en la forma

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}Q_j. \quad (16.42)$$

Todos los cálculos posteriores son análogos a los hechos desde (16.32) hasta (16.37) y en lugar de (16.37) conducen a la siguiente fórmula, que expresa el teorema de la reciprocidad para el caso general:

$$\sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i = \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i. \quad (16.43)$$

De (16.43) en vez de (16.41) se obtiene la condición general de simetría de los coeficientes potenciales

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}. \quad (16.44)$$

El sistema de ecuaciones (16.42) puede resolverse con respecto a  $Q_i$ :

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_j. \quad (16.45)$$

Aquí  $C_{ij} = A_{ij}/D$ , donde  $D$  es el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones (16.24),  $A_{ij}$  es el complemento del elemento  $\alpha_{ij}$  en este determinante. Basándose en (16.44), sacamos la conclusión de que los coeficientes  $C_{ij}$  satisfacen la condición

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad (16.46)$$

donde  $C_{ij}$  son los coeficientes de capacidad,  $C_{ii}$  el coeficiente de capacidad del  $i$ -ésimo conductor y  $C_{ij}$ , el coeficiente de capacidad entre los conductores  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo. El coeficiente de capacidad de un conductor aislado se denomina simplemente capacidad del conductor.

Dado que la carga positiva en el conductor aislado origina un potencial positivo, puede deducirse que *todos los coeficientes de capacidad con los mismos índices* ( $C_{11}, C_{22}, \dots$ ) *son positivos*. Para cerciorarse de ello, pongamos a tierra todos los conductores, a excepción del  $i$ -ésimo, en el que dejamos una carga positiva, o sea, consideraremos que  $Q_i > 0$ . Entonces es obvio que  $\varphi_i > 0$  y  $\varphi_j = 0$  para  $j \neq i$ . Por lo tanto, la ecuación (16.45) para  $Q$  toma la forma

$$Q_i = C_{ii} \varphi_i. \quad (16.47)$$

Puesto que  $\varphi_i > 0$  y  $Q_i > 0$ ,  $C_{ii} > 0$ , lo que se necesitaba demostrar.

De la misma manera puede demostrarse que *los coeficientes de capacidad con diversos índices no pueden ser positivos: pueden ser negativos o bien nulos*. Por ejemplo, examinemos dos conductores, uno de los cuales está puesto a tierra y el otro está aislado y con carga positiva. Esta carga positiva induce una carga negativa en el conductor conectado a tierra, como consecuencia del fenómeno de inducción electrostática. La fórmula (16.45) para la carga en el segundo conductor adquiere el aspecto

$$Q_2 = C_{21} \varphi_1. \quad (16.48)$$

Ya que  $Q_2 < 0$ ,  $\varphi_1 > 0$ ,  $C_{21} < 0$ . Esta deducción no excluye la posibilidad de que el coeficiente pueda ser nulo, pero no puede, sin duda alguna, ser positivo.

Examinemos tres esferas conductoras (fig. 60). Sus potenciales y cargas se denotarán por  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  y  $Q_1, Q_2, Q_3$ , respectivamente. Para definir  $C_{ij}$  tenemos las ecuaciones (16.45) que en este caso toman la forma:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3, \\ Q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + C_{23}\varphi_3, \\ Q_3 &= C_{31}\varphi_1 + C_{32}\varphi_2 + C_{33}\varphi_3. \end{aligned} \quad (16.49)$$

Para determinar los coeficientes  $C_{ij}$  es necesario tener una cantidad suficiente de ecuaciones (16.49) con  $Q_i$  y  $\varphi_i$  conocidos, de las cuales se calcula  $C_{ij}$ .

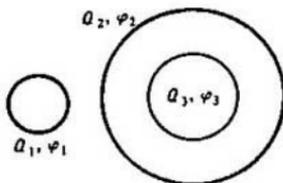


Fig. 60  
Para hallar los coeficientes de capacidad en el caso de dos esferas

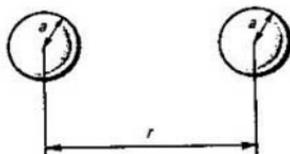


Fig. 61  
Para el cálculo de los coeficientes de capacidad de dos esferas conductoras

Supongamos que  $Q_3 = 0$  y la segunda esfera está puesta a tierra. Entonces  $\varphi_3 = \varphi_2 = 0$  y las ecuaciones (16.49) se escriben como:

$$Q_1 = C_{11}\varphi_1, \quad Q_2 = C_{21}\varphi_1, \quad 0 = C_{31}\varphi_1. \quad (16.50)$$

Entonces,  $C_{31} = C_{13} = 0$ , es decir, el coeficiente de capacidad entre los conductores apantallados es nulo.

Supongamos que la primera y segunda esferas están puestas a tierra, o sea,  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ , pero la carga  $Q_3 \neq 0$ . En este caso las ecuaciones (16.49) toman la forma:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = C_{23}\varphi_3, \quad Q_3 = C_{33}\varphi_3. \quad (16.51)$$

Como ya se mostró, en la superficie interior de la envoltura conductora, puesta a tierra, se induce una carga de igual valor absoluto que la carga en la cavidad limitada por la envoltura, pero de signo contrario, es decir,  $Q_2 = -Q_3$ . De la ecuación (16.51) obtenemos

$$C_{23} = -C_{33}. \quad (16.52)$$

De esta manera, el coeficiente de capacidad entre dos conductores, uno de los cuales rodea totalmente al otro, es igual al coeficiente de capacidad del conductor interior, tomado con signo contrario. Esto desempeña un papel importante para los condensadores.

Supongamos que existen dos esferas, situadas a una distancia  $r$ , mucho mayor en comparación con sus radios  $a$  (fig. 61). Designemos por  $a$  los radios de las

esferas y por  $r$  la distancia entre sus centros. Dado que  $a \ll r$ , para calcular la intensidad del campo a gran distancia de las esferas puede menospreciarse la redistribución de las cargas en las esferas a causa de su inducción electrostática mutua. Entonces las fórmulas para los potenciales de las esferas adquieren el aspecto:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{r} \right), \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{a} \right), \quad (16.53)$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son las cargas de las esferas primera y segunda. Las ecuaciones (16.53) pueden resolverse respecto a  $Q_1$  y  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 4\pi\epsilon_0 \frac{ar^2}{r^2 - a^2} \varphi_1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{a^2 r}{r^2 - a^2} \varphi_2, \\ Q_2 &= -4\pi\epsilon_0 \frac{ra^2}{r^2 - a^2} \varphi_1 + 4\pi\epsilon_0 \frac{r^2 a}{r^2 - a^2} \varphi_2. \end{aligned} \quad (16.54)$$

Entonces,

$$C_{11} = C_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ar^2}{r^2 - a^2} = C > 0, \quad (16.55)$$

$$C_{12} = C_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{ra^2}{r^2 - a^2} = \gamma < 0. \quad (16.56)$$

Tomando en consideración (16.55) y (16.56), representemos (16.54) como:

$$Q_1 = C\varphi_1 + \gamma\varphi_2, \quad Q_2 = \gamma\varphi_1 + C\varphi_2. \quad (16.57)$$

Para  $r \rightarrow \infty$  obtenemos  $C_{11} = C_{22} = 4\pi\epsilon_0 a$ ,  $C_{12} = C_{21} = 0$ , o sea, el enlace eléctrico entre las esferas cesa y cada una de ellas se comporta como un conductor aislado, y el coeficiente de capacidad de cada esfera se convierte simplemente en la capacidad de una esfera aislada.

Examinemos ahora un problema típico.

Recordemos que siendo la configuración de los conductores y la posición mutua de ellos invariables, los coeficientes de capacidad son constantes independientemente de la variación de sus cargas y potenciales. Por esta razón, hay que estudiar tantas situaciones diferentes, cuantos coeficientes de capacidad incógnitos existen, y resolver el sistema de ecuaciones.

Sea que a las esferas se les comunican ciertas cargas, como consecuencia de lo cual sus potenciales serán  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Después de ello, la segunda esfera se pone a tierra. ¿Cuáles son las cargas y los potenciales de las esferas después de poner éstas a tierra?

Antes de la puesta a tierra las cargas y los potenciales de las esferas estaban relacionados entre sí mediante las ecuaciones (16.57). Ya que los potenciales son conocidos, las cargas pueden calcularse valiéndose de estas fórmulas. Una vez puesta a tierra la segunda esfera, su potencial se anula ( $\varphi_2' = 0$ ) y la carga  $Q_2'$  es desconocida. La carga de la primera esfera es como siempre igual a  $Q_1' = Q_1$ , ya que ella está aislada. El potencial  $\varphi_1'$  es desconocido. Escribamos las ecuaciones (16.57) para el caso cuando la segunda esfera está puesta a tierra:

$$Q_1' = C\varphi_1'; \quad Q_2' = \gamma\varphi_1'; \quad Q_1' = Q_1. \quad (16.58)$$

La solución de estas ecuaciones es:

$$\varphi_1' = \frac{Q_1}{C} = \frac{C\varphi_1 + \gamma\varphi_2}{C} = \varphi_1 + \frac{\gamma}{C} \varphi_2. \quad (16.59)$$

$$Q_2' = \gamma \frac{Q_1}{C}.$$

De (16.55) y (16.56) se desprende que

$$\gamma/C = -a/r, \quad (16.60)$$

por lo que las expresiones (16.59) toman el aspecto

$$\varphi_1' = \varphi_1 - (a/r) \varphi_2, \quad Q_2' = - (a/r) Q_1. \quad (16.61)$$

es decir, después de poner la segunda esfera a tierra, el potencial de la primera esfera cambia en una  $a/r$  parte del potencial de la segunda esfera y en esta última queda la carga inducida, igual a una  $a/r$  parte de la carga de la primera esfera y con el signo contrario al de la carga de la primera esfera.

Interrumpamos la puesta a tierra de la segunda esfera, luego conectamos a tierra la primera esfera y determinemos el potencial de la segunda esfera y la carga de la primera.

Es obvio que después de que la primera esfera se pone a tierra, su potencial es nulo ( $\varphi_1' = 0$ ) y la carga  $Q_1'$  es desconocida. Puesto que la segunda esfera está aislada, su carga no cambia al poner a tierra la primera esfera ( $Q_2' = Q_2'$ ). Una vez puesta a tierra la primera esfera, las ecuaciones (16.57) son:

$$Q_1' = \gamma\varphi_2', \quad Q_2' = C\varphi_2', \quad Q_2' = Q_2', \quad (16.62)$$

de donde

$$\begin{aligned} \varphi_2' &= \frac{Q_2'}{C} = -\frac{a}{rC} Q_1' = -\frac{a}{r} \varphi_1' + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \varphi_2', \\ Q_1' &= \frac{\gamma}{C} Q_2' = -\left(\frac{a}{r}\right)^2 Q_1'. \end{aligned} \quad (16.63)$$

Estos ejemplos muestran los métodos para calcular los coeficientes de capacidad, las cargas y los potenciales, habiendo varios conductores en un campo electrostático.

**Condensadores.** Se llama condensador al conjunto de dos cualesquiera conductores con cargas de igual valor absoluto, pero de signo contrario. *Los conductores se denominan armaduras del condensador.* Haciendo en (16.34)  $Q_1 = +Q$ ,  $Q_2 = -Q$ , obtenemos  $\varphi_1 = Q(\alpha_{11} - \alpha_{12})$ ,  $\varphi_2 = Q(\alpha_{21} - \alpha_{22})$ . Entonces la diferencia de potencial entre los conductores es

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = Q(\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} - \alpha_{21}). \quad (16.64a)$$

Esto significa que la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador es proporcional a la carga en la armadura y, por lo tanto, el condensador se caracteriza por un parámetro, denominado capacidad. La capacidad del con-

densador se determina por la relación

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi}, \quad (16.64b)$$

con la particularidad de que según la definición, la capacidad se considera una magnitud positiva, o sea, en (16.64) tanto  $Q$ , como  $\Delta\varphi$  deben tener el mismo signo. La comparación de (16.64b) y (16.64a) muestra que la capacidad del condensador se expresa a través de los coeficientes potenciales mediante la fórmula

$$C = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12})^{-1}, \quad (16.64c)$$

donde  $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ . Dado que  $\alpha_{12}$  y  $\alpha_{21}$  son negativos, la capacidad  $C$  en (16.64c) es siempre positiva [véase (16.64b)]. Tomando en consideración el sentido de los

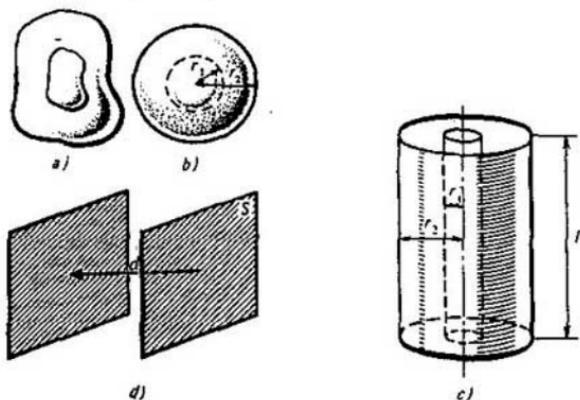


Fig. 62  
Condensadores: caso general (a), esférico (b), cilíndrico (c) y plano (d)

coeficientes potenciales de (16.64c), deducimos que la capacidad del condensador depende sólo de las características geométricas de las armaduras del condensador y de su disposición mutua.

Partiendo de (16.45) y haciendo uso de la definición (16.64b), obtenemos la expresión para la capacidad del condensador por medio de los coeficientes de capacidad:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}. \quad (16.64d)$$

En la mayoría de los casos la forma de las armaduras del condensador y su disposición mutua se eligen de manera que los campos exteriores no ejerzan una

influencia esencial sobre el campo eléctrico entre ellos y las líneas de fuerza, que comienzan en una de las armaduras, terminen sin falta en la otra. Merced a ello, en las armaduras siempre se asegura la igualdad de los valores absolutos de las cargas.

El condensador puede representarse como un conductor, colocado en cierta cavidad, rodeada por una envoltura cerrada (fig. 62, a). Si el conductor interior es una esfera o bola y la envoltura cerrada, una esfera concéntrica a él, el condensador se denomina esférico (fig. 62, b). Si el conductor interior es un cilindro continuo recto y la envoltura es un cilindro recto vacío, coaxial al interior, el condensador recibe el nombre de cilíndrico (fig. 62, c). El conjunto de dos placas conductoras planas y paralelas es un condensador plano (fig. 62, d).

El cálculo de la capacidad del condensador se reduce a la definición de la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, siendo la carga en las armaduras conocida. Por ejemplo, si en la armadura interior de un condensador esférico hay una carga  $Q$ , la intensidad del campo entre las armaduras exterior e interior es igual a  $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$  y está dirigida por el radio. Por esta razón, la diferencia de potencial entre las armaduras es

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (16.65)$$

De aquí, aplicando la fórmula (16.64b), obtenemos que la capacidad del condensador esférico es

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_1 r_2 / (r_2 - r_1). \quad (16.66)$$

De la misma manera hallamos las capacidades de los condensadores cilíndrico y plano:

$$C = 2\pi\epsilon_0 l / \ln(r_2/r_1), \quad C = \epsilon_0 S/d.$$

Determinemos la capacidad de un condensador plano, cuya área de las armaduras es  $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$  y la distancia entre las armaduras  $d = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ :

$$C = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{10^{-4}}{10^{-3}} \text{ F} \approx 10^{-2} \text{ F} = 1 \text{ pF}. \quad (16.67)$$

Los condensadores pueden acoplarse en serie (fig. 63, a) y en paralelo (fig. 63, b). *Para el acoplamiento en serie las diferencias de potencial se suman, mientras que para el acoplamiento en paralelo, se suman las cargas en las armaduras.*

Para el acoplamiento en serie

$$U = U_1 + U_2, \quad U = Q/C, \quad U_1 = Q/C_1, \quad U_2 = Q/C_2, \quad (16.68)$$

donde  $U$  es la diferencia de potencial entre las armaduras extremas de los condensadores;  $U_1$  y  $U_2$  son las diferencias de potencial entre las armaduras de cada uno de los condensadores;  $Q$ , el módulo de la carga en cada armadura de los condensadores (los módulos de la carga en todas las armaduras de los condensadores son iguales);  $C$ , la capacidad de dos condensadores;  $C_1$  y  $C_2$ , las capacida-

des de cada uno de los condensadores. De (16.68) se desprende que

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad (16.69)$$

Así, pues, para el acoplamiento en serie se suman los valores inversos de las capacidades.

Para el acoplamiento en paralelo

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad Q = UC, \quad Q_1 = UC_1, \quad Q_2 = UC_2. \quad (16.70)$$

Entonces,

$$\boxed{C = C_1 + C_2} \quad (16.71)$$

o sea, para el acoplamiento en paralelo se suman las capacidades de los condensadores.

**Esfera conductora en un campo homogéneo.** La intensidad del campo, que surge como resultado de la introducción de una esfera conductora en campo eléctrico homogéneo exterior, puede hallarse por métodos elementales.

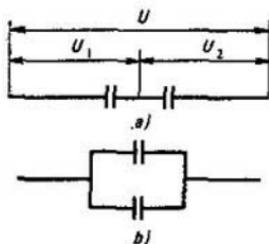


Fig. 63  
Conexiones en serie (a) y en paralelo (b) de los condensadores

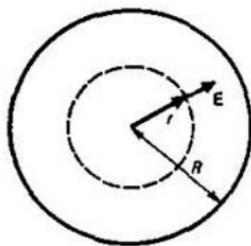


Fig. 64  
Campo dentro de una esfera con carga homogénea

Determinemos ante todo la intensidad dentro de una esfera cargada homogéneamente de radio  $R$  (fig. 64) que, claro está, no es conductora. Sea  $\rho$  la densidad volumétrica de la carga dentro de la esfera. Entonces en el volumen esférico de radio  $r < R$  hay una carga  $Q_r = 4/3\pi r^3 \rho$ . Aplicando el teorema de Gauss al volumen esférico, obtenemos ( $\epsilon_0$  es la constante dieléctrica del material de la esfera):

$$E(r) 4\pi r^2 = Q_r / \epsilon_0 = 4\pi r^3 \rho / (3\epsilon_0) \quad (16.72)$$

y, por lo tanto, la intensidad del campo dentro de una esfera con carga homogénea en el punto que se caracteriza por el radio vector  $\mathbf{r}$ , es igual a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = [(\rho / (3\epsilon_0)) \mathbf{r}], \quad (16.73)$$

con la particularidad de que como punto de referencia del radio vector sirve el centro de la esfera.

Ahora imaginémosnos que hay dos esferas del mismo radio y con la misma densidad volumétrica de la carga de signos diferentes (fig. 65). Supongamos que la esfera con carga negativa está desplazada hacia la izquierda. Designemos por

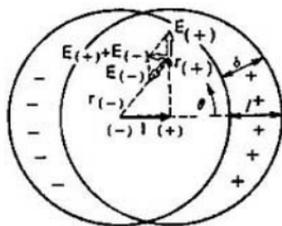


Fig. 65  
Para el cálculo de la intensidad del campo de las esferas, desplazadas una con respecto a otra

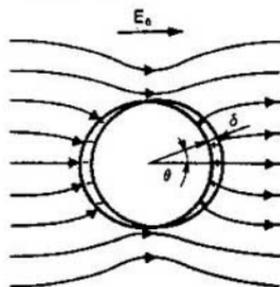


Fig. 66  
Esfera conductora en un campo eléctrico homogéneo

l el vector, trazado desde su centro al centro de la otra esfera. Hallemos la intensidad del campo en los puntos interiores de las esferas. Las intensidades, creadas por la carga de cada esfera, son:

$$E_{(+)} = [ |\rho| / (3\epsilon_0) ] r_{(+)}, \quad E_{(-)} = - [ |\rho| / (3\epsilon_0) ] r_{(-)}, \quad (16.74)$$

donde  $E_{(+)}$  y  $E_{(-)}$  son las intensidades originadas por las cargas de las esferas del signo correspondiente y  $r_{(+)}$  y  $r_{(-)}$ , los radios vectores trazados al punto en cuestión desde los centros de las esferas con cargas del signo correspondiente. La intensidad sumaria es

$$E = E_{(+)} + E_{(-)} = [ |\rho| / (3\epsilon_0) ] (r_{(+)} - r_{(-)}) = - [ |\rho| / (3\epsilon_0) ] l, \quad (16.75)$$

donde

$$r_{(-)} = l + r_{(+)} \quad (16.76)$$

(véase la fig. 65). Así pues, dentro de las esferas la intensidad del campo es constante y está dirigida a lo largo de la línea que une sus centros.

En los puntos de intersección de los volúmenes de las esferas la densidad de la carga es nula, ya que las densidades negativa y positiva de la carga se compensan mutuamente. Sólo las partes de las esferas falciformes que no se intersecan permanecen cargadas (véase la fig. 65). La anchura máxima de esas esferas falciformes, igual a  $l$ , puede ser tan pequeña como se quiera.

Imaginémosnos ahora que una esfera conductora se ubica en un campo homogéneo exterior con intensidad  $E_0$ . La inducción electrostática conducirá a la aparición de cargas superficiales. Los signos de dichas cargas y la dirección

de la intensidad del campo exterior se dan en la fig. 66. Dentro de la esfera el campo debe ser nulo, es decir, la distribución de las cargas superficiales será la misma que en la fig. 65 y el campo que surge en este caso dentro de las esferas compensa el campo exterior. Entonces, [véase (16.75)]

$$(|\rho|/3\epsilon_0)l = E_0. \quad (16.77)$$

De esta manera, los centros de las esferas cargadas imaginarias están desplazados uno respecto al otro por la línea de intensidad del campo exterior. Dado que  $l$  en (16.77) coincide con  $E_0$  según la dirección, para las magnitudes escalares puede escribirse

$$|\rho|l = 3\epsilon_0 E_0.$$

Es evidente que el desplazamiento  $l$  de los centros de las esferas puede ser tan pequeño como se quiera si  $|\rho|$  es suficientemente grande. Por eso las cargas que surgen en este caso pueden considerarse, en efecto, superficiales con una densidad superficial variable.

Hallemos la distribución de la densidad superficial de la carga en función del ángulo  $\theta$ . La distancia entre las superficies de las esferas en dirección del ángulo  $\theta$  es igual a  $\delta = l \cos \theta$  (fig. 65). Si la carga volumétrica entre las superficies de las esferas se interpreta como superficial y se designa por la densidad superficial  $\sigma$ , entonces

$$\sigma \Delta S = \rho \Delta S \delta, \quad (16.78)$$

donde el primer miembro contiene la expresión para la carga, que corresponde al elemento superficial  $\Delta S$ , por medio de la densidad superficial, y el segundo miembro, mediante la densidad volumétrica. Por lo tanto [véase (16.78)],

$$\sigma = \rho \delta = \rho l \cos \theta = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta, \quad (16.79)$$

donde  $\delta = l \cos \theta$ .

Ahora se puede hallar la intensidad del campo en la superficie de la esfera conductora:

$$E_n = \sigma/\epsilon_0 = 3E_0 \cos \theta, \quad (16.80)$$

de donde se ve que ella varía desde cero hasta el valor triplicado de la intensidad del campo homogéneo. Claro está que en todos los puntos de la superficie de la esfera la intensidad está orientada por la normal a la superficie.

Fuera de la esfera, a una distancia finita de su superficie, dicha intensidad es igual a la suma de las intensidades del campo exterior y de los campos, creados por las esferas cargadas, desplazadas mutuamente, o, lo que es lo mismo, por las correspondientes cargas superficiales. El campo fuera de la esfera uniformemente cargada es tal como si toda su carga estuviese concentrada en el centro. Así pues, es necesario hallar la intensidad del campo de dos cargas puntuales, de signos contrarios con igual valor absoluto, que se encuentran a una distancia pequeña la una de la otra. Semejante conjunto de cargas de denomina dipolo (fig. 67). El vector  $l$ , trazado desde la carga negativa a la positiva, se

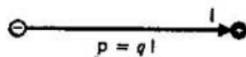


Fig. 67  
Dipolo

denomina brazo del dipolo. El vector

$$p = ql \quad (16.81)$$

se llama **momento del dipolo**. En la fórmula (16.81)  $q$  es el valor absoluto de cada una de las cargas del dipolo. Para determinar la intensidad del campo fuera de la esfera conductora es necesario hallar la intensidad del campo del dipolo, cuyas cargas están concentradas en los centros de las esferas desplazadas. De (16.77) se desprende que el momento del dipolo es

$$p = \frac{4}{3}\pi R_1 \rho l = 4\pi \epsilon_0 R^3 E_0, \quad (16.82)$$

donde  $R$  es el radio de la esfera.

**Campo de un dipolo.** La intensidad del campo del dipolo está formada por las intensidades de las componentes de las cargas que forman el dipolo. El

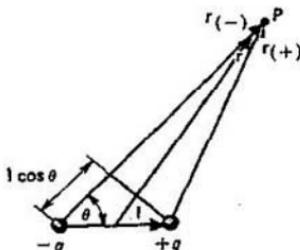


Fig. 68  
Para el cálculo del campo del dipolo

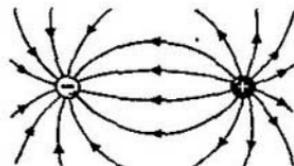


Fig. 69  
Líneas de fuerza en las proximidades del dipolo

brazo del dipolo es tan pequeño como se quiera, por lo cual se puede considerar mucho más pequeño que la distancia hasta los puntos en los cuales se calcula la intensidad. Hallemos el potencial del dipolo. En el punto  $P$  (fig. 68) el potencial se expresa, por lo visto, mediante la fórmula

$$\varphi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(+)}r_{(-)}} \right). \quad (16.83)$$

Puesto que  $l \ll r$ , puede considerarse que  $r_{(-)} - r_{(+)} \approx l \cos \theta$ ,  $r_{(-)} r_{(+)} \approx r^2$  y caracterizar la posición del punto  $P$  por el radio vector  $r$  con origen en cualquier punto del dipolo, ya que este último posee dimensiones geométricas tan pequeñas cuanto se quiera.

Entonces [véase (16.83)]

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}, \quad (16.84)$$

donde  $q l \cos \theta = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/r$ , de donde

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \quad (16.85)$$

La intensidad del campo del dipolo decrece inversamente proporcional al tercer grado de la distancia, o sea, con mayor rapidez que la intensidad del campo coulombiano de la carga. Las líneas de fuerza del campo del dipolo se muestran en la fig. 69.

La fórmula (16.85) permite trazar las líneas de la intensidad del campo, cuando, la esfera conductora se ubica en un campo homogéneo exterior. En cada punto la intensidad es igual a la suma de la intensidad  $E_0$  del campo homogéneo exterior y la intensidad  $E$ , originada por las cargas inducidas en la superficie de la esfera conductora. Las líneas de intensidad de ese campo se dan en la fig. 66.

**Método de representaciones.** Al resolver el problema sobre la esfera conductora en un campo homogéneo exterior, se hizo una suposición cuya validez no se demostró, a saber: fue construido cierto campo que satisfacía todas las condiciones del problema, considerando que no existe otro campo que pudiese satisfacer las mismas condiciones del problema, es decir, se supuso que la solución del problema es única. De no ser así, la solución concreta hallada no sería obligatoriamente la solución que se realiza de hecho. En la teoría de la electricidad y el magnetismo se demostró que la solución de los problemas que satisfacen todas las condiciones necesarias, es única. En adelante se examinará sobre cuáles todas condiciones se trata y de qué manera, en rasgos generales, se lleva a cabo la demostración de esta confirmación. Mientras tanto, por ahora tomemos su validez sin demostración. Esto permite hallar la solución del problema con ayuda de ciertas conjeturas o construcciones y, basándose en el teorema de unicidad, sacar la conclusión de que el campo, hallado de esta manera, proporciona la solución del problema. La solución, estudiada más arriba, de la esfera conductora en un campo eléctrico homogéneo exterior es un ejemplo de una suposición acertada.

Existe un método directo de construcción de un campo que satisface las condiciones del problema, denominado método de representaciones. Su esencia consiste en lo siguiente. El campo de una carga puntual es bien conocido. Se trata de elegir un sistema de cargas puntuales, cuyo campo sumario satisfaga todas las condiciones del problema. Partiendo del teorema de unicidad de la solución, deducimos que este campo nos da la solución buscada. El problema matemático se reduce a la búsqueda del potencial que satisface las condiciones del problema. La intensidad  $E$  está orientada perpendicularmente a las superficies equipotenciales y se calcula como el gradiente con signo contrario del potencial. En principio, es fácil recibir la forma de las superficies equipotenciales para el sistema de cargas puntuales. Examinemos, por ejemplo, el campo de dos cargas puntuales positivas  $q$ , situadas a la distancia  $2d$  la una de la otra (fig. 70). Puesto que el potencial de la carga puntual a la distancia  $r$  de ella es igual a  $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 r)$ , el potencial del sistema de dos cargas puntuales iguales (véase

la fig. 70) en el punto  $(x, y, z)$  se define mediante la expresión

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (16.86)$$

De (16.86) obtenemos la ecuación de las superficies equipotenciales:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} = \text{const.} \quad (16.87)$$

Cada una de ellas se caracteriza por el potencial correspondiente  $\varphi_1 = \text{const.}$ ,  $\varphi_2 = \text{const.}$

La fig. 70 muestra las líneas de intersección del plano  $XY$  con superficies equipotenciales. Estas últimas se obtienen como consecuencia de la rotación del cuadro, dado en la fig. 70, alrededor del eje  $X$ .

Sea que una superficie aislada conductora coincide con una de las superficies equipotenciales, cuyo potencial es  $\varphi_0$ . Si se toma que sobre esa superficie

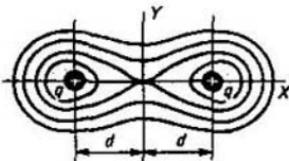


Fig. 70  
Superficies equipotenciales de dos cargas puntuales iguales

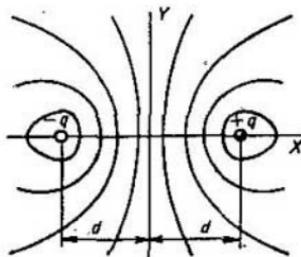


Fig. 71  
Superficies equipotenciales de dos cargas puntuales de signos contrarios y distinto valor absoluto

hay una carga  $2q$  y su potencial es igual a  $\varphi_0$ , el sistema de superficies equipotenciales y el campo, correspondiente a él, satisfacen totalmente las condiciones del problema acerca del campo de una superficie cargada. En todos los puntos exteriores respecto a la superficie, el potencial se define por la fórmula (16.86). De esta manera, la determinación de las características del campo, creado por el conductor con carga, se reduce a la determinación de las características del campo de dos cargas puntuales iguales del mismo signo. Esta es la esencia del método de representaciones. El origen del nombre de dicho método quedará claro de los ejemplos que se examinan a continuación.

El potencial de dos cargas puntuales de signos contrarios se determina de la misma manera que (16.86):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (16.88)$$

La fig. 71 da para este caso la forma de las superficies equipotenciales. El potencial a lo largo del eje  $Y$  es nulo y, por lo tanto, es nulo en el plano  $X = 0$ .

Imaginémonos que todo el semiespacio infinito  $X < 0$  está lleno de conductor, cuya frontera es el plano  $YX$  y hay una carga  $+q$  en el lugar, mostrado en la fig. 71. Está claro que mediante la inducción electrostática, esta carga inducirá una carga  $-q$  en la superficie del conductor. El potencial del conductor en este caso debe ser  $\varphi = 0$  y las líneas de fuerza en cada punto de la superficie deben ser normales a ella. Es obvio, que el cuadro de las líneas de fuerza en el semiespacio  $X > 0$ , mostrado en la fig. 71, satisface totalmente estas condiciones. Como consecuencia la tarea de definir las características del campo de una carga puntual  $+q$  que está a una distancia  $d$  de la superficie plana del conductor que llena el semiespacio  $X < 0$ , se reduce a encontrar las características de los campos de dos cargas puntuales  $q$  y  $-q$ . La carga  $-q$  se sitúa en el punto que es la representación de la posición de la carga puntual  $q$  si el plano  $X = 0$  fuese un espejo. De aquí proviene el nombre del método de representaciones. En lugar de un cuerpo conductor, que ocupa el semiespacio  $X < 0$ , puede cogerse una placa conductora, puesta a tierra, paralela al plano  $X = 0$ . El método de cómputo y el campo permanecen invariables. Si la placa no está puesta a tierra, en la parte de la placa, vuelta hacia los valores negativos del eje  $X$ , se inducen cargas positivas superficiales que cambian por completo el carácter del campo: el campo en este caso no es la superposición de los campos de la carga  $q$  y su representación.

Determinemos la intensidad del campo de la carga  $q$ , situada en el punto  $x = d$ , habiendo un plano conductor puesto a tierra,  $X = 0$ . El potencial del campo en todos los puntos  $x > 0$  se da mediante la fórmula (16.88). La intensidad del campo eléctrico en el plano  $Z = 0$  es igual a

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{x-d}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}, \quad (16.89)$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{y}{[(x-d)^2 + y^2]^{3/2}} - \frac{y}{[(x+d)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}. \quad (16.90)$$

En el plano  $X = 0$  la componente  $E_y$  desaparece, mientras que

$$E_x = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{(z^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (16.91)$$

La densidad superficial de la carga en el plano  $X = 0$  [véase (16.12)] es igual a

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(z^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (16.92)$$

La carga superficial total en el plano  $X = 0$  se da mediante la fórmula

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \sigma dz dy = -\frac{qd}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dz dy}{(z^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = -q, \quad (16.93)$$

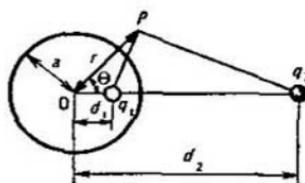


Fig. 72  
Para la determinación de las superficies equipotenciales de dos cargas puntuales de diferente magnitud

Examinemos el cuadro de las superficies equipotenciales, creadas por dos cargas de distinto módulo. Para mayor comodidad, introduzcamos un sistema de coordenadas polar con origen en el punto  $O$  (fig. 72). El eje polar atraviesa la posición de las cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$ . Las coordenadas polares  $r_1$  y  $r_2$  son iguales a  $\theta_1 = 0$ ,  $r_1 = d_1$  y  $\theta_2 = 0$ ,  $r_2 = d_2$ , respectivamente. El potencial en el punto  $P$  se expresa mediante la fórmula

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta}} + \frac{q_2}{\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2rd_2 \cos \theta}} \right). \quad (16.95)$$

Si  $d_1 = a^2/d_2$  ( $a < d_2$ ) y  $q_2 = -aq_1/d_2$ ,  $\varphi(a, \theta) = 0$ , es decir, el potencial en la esfera de radio  $a$  es nulo. Como consecuencia, semejante esfera es una superficie equipotencial con valor nulo del potencial. Si en su lugar se coloca una esfera conductora real puesta a tierra, el campo no varía. Así pues, si existe una esfera conductora puesta a tierra de radio  $a$  y una carga puntual  $q_2$  fuera de ella a la distancia  $d_2$  del centro de la esfera, el campo fuera de la esfera es el mismo que el creado por la carga  $q_2$  y su «imagen», la carga  $q_1 = -aq_2/d_2$ , colocada en el punto con las coordenadas  $d_1 = a^2/d_2$ ,  $\theta = 0$  dentro de la esfera. La fuerza de interacción entre la carga  $q_2$  y la esfera es igual a

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 (d_2 - d_1)^2} = - \frac{d_2 a q_2^2}{4\pi\epsilon_0 (d_2^2 - a^2)^2}. \quad (16.96)$$

En la electrostática dentro de un conductor no hay campo alguno y las cargas volumétricas están ausentes. En las proximidades de la superficie del conductor la intensidad del campo eléctrico está orientada por la normal a la superficie y es proporcional a la densidad superficial de la carga.

En la superficie convexa del conductor la densidad superficial de las cargas y la intensidad del campo aumentan al crecer la curvatura de la superficie, es decir, al disminuir el radio de curvatura. En la superficie cóncava del conductor la densidad superficial de la carga disminuye.

La ley de Ohm en forma diferencial es válida no sólo para la conductibilidad eléctrica constante, sino también para la variable, independientemente de las causas y el carácter de su variación.

es decir, la carga inducida en el conductor es igual a la carga que induce, pero con signo contrario [véase (16.20)].

La fuerza de interacción de la carga puntual  $q$  con la carga en la superficie  $x = 0$  es igual a la fuerza de interacción de  $q$  con su representación:

$$F = -q^2 / (16\pi\epsilon_0 d^2). \quad (16.94)$$

El signo menos indica que la carga puntual se atrae hacia la superficie conductora puesta a tierra.

El método de representaciones no se reduce, claro está, en todos los casos en el sentido literal a la búsqueda de la imagen especular de las cargas.

¿La consecuencia de qué propiedad del campo electrostático es la ausencia de la componente tangencial de la intensidad del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor?

La capacidad de un conductor aislado depende sólo de su forma y dimensiones. Los coeficientes potenciales y de capacidad dependen sólo de las características geométricas de los conductores y de su disposición mutua.

Los coeficientes de capacidad con iguales índices son siempre positivos y con diferentes, son o bien nulos, o bien negativos.

**Ejemplo 16.1.** Hallar la fuerza de interacción entre una esfera conductora de radio  $a$  y la carga puntual  $q_2$  que está a una distancia  $d_2$  del centro de la esfera, si la carga  $Q$  está distribuida por la esfera.

La fig. 72 muestra el esquema de disposición de la esfera y la carga. La carga  $q_2$  induce en la esfera conductora su imagen en forma de carga  $q_1 = -q_2 a/d_2$  a la distancia  $d_1 = a^2/d_2$  del centro de la esfera. En cambio, ahora la interacción no se reduce a la fuerza de atracción entre la carga  $q_2$  y su representación, ya que, según la condición, la esfera posee una carga  $Q$  y no  $q_1$ . Por lo tanto, para describir la interacción es necesario añadir otra «representación» de la carga que crea en la esfera un potencial constante y junto con  $q_1$  forma la carga  $Q$ . Por eso, es necesario colocar en el centro de la esfera la carga  $Q - q_1 = Q + q_2 a/d_2$ . La interacción de la carga  $q_2$  con la esfera con una carga  $Q$ , se compone de la interacción de  $q_2$  con las «imágenes»  $q_1$  y  $Q + q_2 a/d_2$ . Así pues, la fuerza de interacción es

$$F = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q + q_2 a/d_2}{d_2^2} - \frac{q_2 a}{d_2(d_2 - d_1)^2} \right]. \quad (16.97)$$

**Ejemplo 16.2.** Hallar la fuerza de interacción entre la esfera conductora de radio  $a$  que se mantiene a un potencial constante  $\varphi_0$ , y una carga puntual  $q_2$  que se encuentra a la distancia  $d_2$  del centro de la esfera.

El esquema de disposición de la esfera y la carga se da en la fig. 72. La carga  $q_2$  y su imagen  $q_1$  crean un potencial nulo de la esfera. Para que éste sea igual a  $\varphi_0$ , es necesario colocar en el centro de la esfera una «imagen»  $Q = 4\pi\epsilon_0 a\varphi_0$ . La fuerza de interacción entre la carga puntual  $q_2$  y la esfera que se mantiene a un potencial  $\varphi_0$ , es igual a

$$F = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{d_2^2} - \frac{q_2 a}{d_2(d_2 - d_1)^2} \right]. \quad (16.98)$$

**Ejemplo 16.3.** Dos placas planas conductoras forman un ángulo  $\alpha_0$  (fig. 73). La longitud de las placas, perpendiculares al plano de la figura, es infinita. Entre las placas se mantiene una diferencia de potencial constante  $U_0$ . Hallar la intensidad del campo entre las placas y la capacidad que corresponde a la longitud  $l$ . La anchura de la placa es  $b - a$ . Se acepta que las placas no hacen contacto en el punto  $O$ , pero convergen bastante cerca, por lo cual puede prescindirse de los efectos de borde.

El campo es axialmente simétrico. Por eso es cómodo utilizar el sistema de coordenadas cilíndrico, cuyo eje  $Z$  está dirigido perpendicularmente al plano de la figura. Designemos: por  $\alpha$  el ángulo axial y por  $r$ , la distancia hasta el eje. Entonces la ecuación de Laplace tiene la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (16.99)$$

donde se tiene en cuenta que  $\partial^2 \varphi / \partial z^2 = 0$  a causa de la simetría cilíndrica del campo. La solución se busca como

$$\varphi(r, \alpha) = R(r) \Phi(\alpha). \quad (16.100)$$

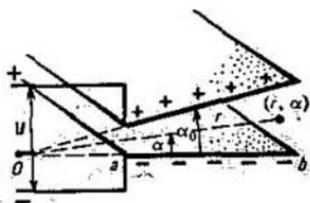


Fig. 73  
Para la definición del campo de un condensador con placas no paralelas

Sustituyendo (16.100) en (16.99), hallamos que  $\frac{\Phi}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = 0$ . Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por  $r^2/R\Phi$ , obtenemos

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}. \quad (16.101)$$

Los miembros primero y segundo de (16.101) son funciones de diferentes variables independientes. Por lo tanto, la igualdad puede satisfacerse sólo cuando los miembros primero y segundo sean iguales por separado a una misma constante. Por eso suponemos que:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = n^2, \quad (16.103)$$

donde  $n^2$  es una constante. La solución de la ecuación para  $\Phi$  es obvia:

$$\Phi = \begin{cases} B_1\alpha + B_2 & \text{para } n=0, \\ A_1 \operatorname{sen} n\alpha + A_2 \cos n\alpha & \text{para } n \neq 0. \end{cases} \quad (16.103)$$

La solución de la ecuación para  $R$  la buscamos en forma de  $R = Ar$  ( $\beta \neq 0$ ).

Sustituyendo esta expresión en la primera de las ecuaciones (16.102), obtenemos la igualdad

$$\beta^2 = n^2, \quad (16.104)$$

de la cual se desprende que  $\beta = \pm n$ . Para  $n = 0$  la primera de las ecuaciones (16.102) se simplifica:

$$r \frac{dR}{dr} = \text{const}$$

y puede satisfacerse mediante la función

$$R = D_1 \ln r + D_2.$$

Por lo tanto, la solución definitiva de la ecuación (16.102) puede representarse como

$$R = \begin{cases} D_1 \ln r + D_2 & \text{para } n=0, \\ C_1 r^n + C_2 r^{-n} & \text{para } n \neq 0 \end{cases} \quad (16.105)$$

Intentemos hallar la solución del problema que no dependa de  $r$ , es decir, para  $n = 0$   $D_1 = 0$ , entonces [véase (16.103)]  $\varphi(\alpha) = B_1\alpha + B_2$ . Las condiciones límites para  $\varphi$  tienen el aspecto:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\alpha_0) = U_0$ , o sea,  $0 = B_2$ ,  $U_0 = B_1\alpha_0$ . Como consecuencia

$$\varphi(\alpha) = U_0\alpha/\alpha_0. \quad (16.106)$$

La intensidad del campo eléctrico es

$$E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -U_0/(r\alpha_0). \quad (16.107a)$$

La densidad superficial de las cargas en las placas

$$\sigma_1 = \varepsilon E_\alpha(\alpha=0) = -\varepsilon U_0/(r\alpha_0), \quad \sigma_2 = -\varepsilon E_\alpha(\alpha=\alpha_0) = \varepsilon U_0/(r\alpha_0). \quad (16.107b)$$

La carga de cada una de las placas (por el módulo) en la longitud  $l$  se expresa por la fórmula

$$Q = l \int_a^b \sigma dr = (l\varepsilon U_0/\alpha_0) \ln(b/a). \quad (16.108)$$

La capacidad, correspondiente a la longitud  $l$ , es igual a

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{l\varepsilon_0 \ln(b/a)}{\alpha_0}. \quad (16.109)$$

## § 17. Campo electrostático en presencia de dieléctricos

*Se examinan la influencia del dieléctrico sobre el campo eléctrico y diversos mecanismos de la polarización. Se deduce la relación entre las densidades de las cargas ligadas superficiales y volumétricas y la polarización. Se discuten los fenómenos en la superficie de separación de los dieléctricos.*

**Momento dipolar de la distribución continua de las cargas.** Faraday investigó y descubrió experimentalmente la influencia de la substancia sobre los campos eléctricos y magnéticos. Los resultados de estos trabajos condujeron al científico a la idea de la acción a corta distancia y la concepción del campo. En 1837 descubrió la inducción electrostática. En ese mismo año Faraday introdujo en la ciencia los términos «dieléctrico» y «constante dieléctrica».

Supongamos que en cierto volumen  $V$  (fig. 74) haya una carga distribuida continuamente con una densidad volumétrica  $\rho$ , con la particularidad de que en total el volumen es neutro desde el punto de vista eléctrico. No obstante, eso no significa que en cada punto dentro del volumen las cargas positiva y negativa se compensan mutuamente. Si las cargas positivas y negativas están distribuidas en el volumen por leyes distintas, en unos puntos del volumen la densidad sumaria  $\rho$  de la carga es positiva y en otros, negativa. Desde el punto de vista matemático, la condición de neutralidad del volumen  $V$  tiene la forma

$$\int_V \rho \, dV = 0. \quad (17.1)$$

Si en todos los puntos del volumen  $\rho = 0$ , el sistema material en el volumen  $V$  es eléctricamente neutro: sobre él no actúa ningún campo eléctrico exterior y el propio sistema no genera campo eléctrico alguno. Sin embargo, si la densidad  $\rho$  de la carga es en unas partes del volumen  $V$  positiva y en otras, negativa, entonces, a pesar de que la carga en total en el volumen es nula, el sistema posee propiedades eléctricas: sobre él actúa un campo eléctrico exterior y el propio sistema origina un campo eléctrico. En primera aproximación las propiedades de un sistema neutro se caracterizan por su momento dipolar. Para dos cargas puntuales la definición de momento dipolar se da mediante la fórmula (16.81). Para una distribución continua de las cargas el momento dipolar (fig. 74) se determina por la fórmula

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r} \, dV.$$

(17.2)

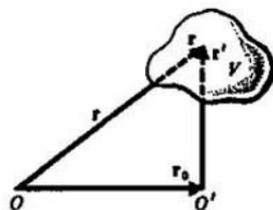


Fig. 74  
Para la definición del momento dipolar de una distribución continua de las cargas

El radio vector  $\mathbf{r}$  en (17.2) se cuenta desde cualquier punto  $O$  que se toma como punto de referencia. Es evidente que (17.2) no depende de qué punto se ha elegido como origen del sistema de referencia. Para demostrar eso tomemos como punto de referencia el punto  $O'$ , cuya posición respecto al punto  $O$  se caracteriza por el radio vector  $\mathbf{r}_0$  (véase la fig. 74). La fórmula (17.2) tiene con respecto al punto  $O'$  el aspecto

$$\mathbf{p}' = \int_V \rho \mathbf{r}' dV. \quad (17.3)$$

Transformemos (17.3):

$$\mathbf{p}' = \int_V \rho (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \int_V \rho \mathbf{r} dV - \int_V \mathbf{r}_0 \rho dV = \int_V \rho \mathbf{r} dV = \mathbf{p}, \quad (17.4)$$

lo que se requería demostrar. Aquí  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$  y [véase (17.1)]

$$\int_V \mathbf{r}_0 \rho dV = \mathbf{r}_0 \int_V \rho dV = 0. \quad (17.5)$$

Apliquemos la fórmula (17.2) para calcular el momento dipolar de dos cargas puntuales que pueden considerarse como cargas que están en los volúmenes

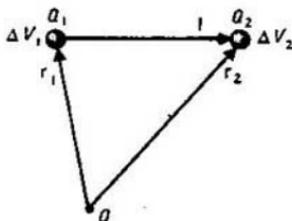


Fig. 75.  
Para el cálculo del momento dipolar de dos cargas puntuales, aplicando la fórmula para la distribución continua de las cargas

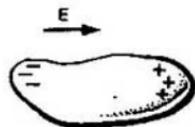


Fig. 76  
Polarización de los dieléctricos neutros en el campo eléctrico

$\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$ , tan pequeños como se quiera, (fig. 75):

$$\mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{r} dV = \int_{\Delta V_1} \rho \mathbf{r}_1 dV + \int_{\Delta V_2} \rho \mathbf{r}_2 dV = \mathbf{r}_1 \int_{\Delta V_1} \rho dV + \mathbf{r}_2 \int_{\Delta V_2} \rho dV = \mathbf{r}_1 Q_1 + \mathbf{r}_2 Q_2, \quad (17.6)$$

donde  $Q_1$ ,  $Q_2$  son las cargas en los volúmenes  $\Delta V_1$  y  $\Delta V_2$ , respectivamente y  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  son los radios vectores de dichos volúmenes. Por ejemplo, sea que en el volumen  $\Delta V_2$  haya una carga positiva  $Q_2 = Q$ . Entonces, como consecuencia de la neutralidad eléctrica del sistema,  $Q_1 = -Q$  y la fórmula (17.6) adquiere

la forma

$$p = Q(r_2 - r_1) = Ql, \quad (17.7)$$

análoga a (16.81).

La intensidad del campo de un sistema neutro con un momento dipolar  $p$  se determina por las fórmulas (16.84) y (16.85).

**Polarización de los dieléctricos.** Se llaman dieléctricos a las sustancias, en las cuales bajo la acción de un campo eléctrico, no surge el desplazamiento de cargas como, por ejemplo, en los conductores. *En cambio, eso no significa que en los dieléctricos, bajo el efecto del campo eléctrico, las cargas no se mueven en general. Ellas se desplazan, pero no a distancias grandes.*

Examinemos un volumen eléctricamente neutro del dieléctrico (fig. 76). El campo eléctrico exterior tiende a desplazar las cargas positivas en dirección de la intensidad del campo y las negativas, en dirección opuesta. Por esta razón, en dirección de la intensidad en el dieléctrico se forma un exceso de carga positiva, mientras que en dirección contraria, deficiencia. El dieléctrico adquiere momento dipolar. El mencionado proceso recibe el nombre de **polarización**.

El grado de polarización del dieléctrico se caracteriza por la polarización dieléctrica que se determina como la razón entre el momento dipolar  $\Delta p$  del elemento del dieléctrico y su volumen  $\Delta V$ :

$$P = \frac{\Delta p}{\Delta V}. \quad (17.8)$$

**Cuadro molecular de la polarización.** El dieléctrico consta de átomos y moléculas, con la particularidad de que cualquiera de sus elementos físicos infinitesimales de volumen es eléctricamente neutro. La carga positiva está concentrada en los núcleos de los átomos, mientras que la negativa, en las capas electrónicas de los átomos y moléculas. Las cargas positivas y negativas se encuentran en diversos puntos del espacio y, por lo tanto, los átomos y moléculas pueden poseer momentos dipolares eléctricos que varían con la frecuencia de las oscilaciones de los electrones en los átomos del orden  $\approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$ .

Si al no haber campo eléctrico exterior, en el átomo la *nube electrónica está distribuida con simetría esférica respecto al núcleo, el átomo no posee momento dipolar eléctrico. De la misma manera, en las moléculas las cargas positivas y negativas pueden poseer una simetría de distribución cuando en ellas no surge momento dipolar.* Semejantes moléculas y átomos se denominan **no polares**, por ejemplo, el átomo de helio, las moléculas biatómicas que constan de los mismos átomos ( $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ , ...), las moléculas poliatómicas simétricas, tales como  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ , etc. Al no haber campo exterior, semejante dieléctrico no está polarizado.

Las moléculas y los átomos que, al no haber campo exterior, poseen momento dipolar eléctrico, se denominan **polares**, por ejemplo,  $\text{CO}$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{SO}_2$ , etc. El momento dipolar constante de éstos tiene el orden de  $10^{-29} \dots 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . Eso corresponde a un dipolo que consta de dos cargas elementales de  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , la distancia entre las cuales es de  $10^{-10} \text{ m}$ , o sea, del orden de las dimensiones atómicas.

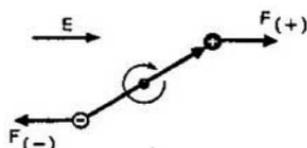


Fig. 77  
Polarización de los dieléctricos polares en el campo eléctrico

En ausencia de campo eléctrico exterior, los momentos dipolares permanentes de las moléculas aisladas están en desorden. Por lo tanto, su suma en un volumen físico infinitésimo es nula, es decir, el dieléctrico no está polarizado.

En un campo eléctrico exterior las cargas positivas tienden a desplazarse en dirección de la intensidad del campo, mientras que las negativas, en sentido contrario. *En definitiva, las moléculas no polares adquieren momento dipolar y el dieléctrico se polariza.* Las moléculas polares

también adquieren un momento dipolar complementario, inducido por el campo exterior, y merced a ello, se polariza también, pero esta polarización desempeña un papel insignificante para ellas. El mecanismo principal de polarización para ellas es otro: *en un campo eléctrico exterior sobre los momentos dipolares de las moléculas actúan momentos de fuerzas [fig. 77; véase (19.7)], que tienden a orientar los momentos dipolares en sentido de la intensidad del campo. Como consecuencia, las moléculas se reorientan de tal manera, que los elementos físicos infinitésimos del volumen del dieléctrico adquieren momentos dipolares, es decir, el dieléctrico se polariza.* La polarización a causa de la reorientación de las moléculas es mucho mayor que cuando surge como consecuencia de la formación de momentos dipolares complementarios, inducidos por el campo exterior.

A la par con esos mecanismos de polarización, existe otro más. *Influídos por el campo eléctrico exterior, los iones positivos de los cristales iónicos se desplazan en dirección de la intensidad del campo, mientras que los negativos, en sentido contrario.* En definitiva, sucede cierta deformación de la red cristalina o un desplazamiento relativo de las subredes, lo que conduce a que en el dieléctrico aparezcan momentos dipolares, o sea, surge la polarización del dieléctrico. Semejante polarización se denomina *polarización iónica de red.*

En todos los casos la polarización se caracteriza cuantitativamente por la polarización dieléctrica  $P$ . El mecanismo de la polarización se manifiesta sólo al estudiar la dependencia entre  $P$  y la intensidad del campo exterior y otros factores (véase el cap. 3). En este caso la fórmula que enlaza entre sí la intensidad del campo eléctrico, el desplazamiento eléctrico y la polarización dieléctrica, permanece invariable [véase (17.29)].

La polarización dieléctrica de las moléculas no polares es

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_i = N p_0, \quad (17.9)$$

donde  $\Delta V$  bajo el símbolo de la suma indica que la adición se extiende a todas las moléculas en el volumen  $\Delta V$ ;  $N$  es la concentración de moléculas;  $p_0$ , el momento dipolar inducido (el mismo para todas las moléculas) que coincide, en dirección, con la intensidad  $E$  del campo eléctrico exterior. En ausencia del campo exterior  $p_0 = 0$  y, por lo tanto,  $P = 0$ , es decir, no hay polarización.

El mecanismo principal de la polarización de las moléculas polares es la

reorientación de las direcciones de los momentos dipolares permanentes, influidos por el campo exterior. La fórmula para la polarización dieléctrica es

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_i = N \langle p \rangle, \quad (17.10)$$

donde  $\langle p \rangle$  es el valor medio de los momentos dipolares, iguales por el valor absoluto, pero de distinta orientación en el espacio. En los dieléctricos isotropos los momentos dipolares medios coinciden en dirección con la intensidad del campo eléctrico exterior. En los dieléctricos anisotropos, o sea, en los que las propiedades eléctricas son diferentes en distintas direcciones, no se observa semejante coincidencia. En ellos el enlace entre la polarización dieléctrica y la intensidad es más complejo (véase el cap. 3). La aportación de los momentos dipolares inducidos de los dieléctricos polares en la polarización dieléctrica es mucho menor que la de la reorientación de los momentos dipolares permanentes y, por lo general, no se tiene en cuenta. Al haber necesidad de considerarlos, hay que añadir el segundo miembro de la igualdad (17.9) al segundo miembro de la fórmula (17.10).

La polarización iónica de red se describe mediante la fórmula (17.10), en la que bajo  $\langle p \rangle$  es necesario tomar el valor medio de los momentos dipolares en el volumen  $\Delta V$  que surgen como consecuencia del desplazamiento de los iones en los nudos de la red cristalina. En la mayoría aplastante de los casos dicha polarización es anisótropa.

**Dependencia entre la polarización dieléctrica y la intensidad del campo eléctrico.** La polarización de los electretos y las sustancias ferroeléctricas puede ser diferente de cero estando ausente el campo eléctrico ( $E = 0$ ,  $P \neq 0$ ). Los demás dieléctricos, al no haber campo eléctrico, poseen polarización nula. La dependencia de esta última respecto a la intensidad puede representarse en el caso general de la siguiente forma

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j + \epsilon_0 \sum_{j,k} \kappa_{ijk} E_j E_k + \dots,$$

donde los índices  $i, j, k, \dots$  numeran las componentes de las magnitudes por los ejes del sistema cartesiano de coordenadas ( $i = x, y, z; j = x, y, z, \dots$ ). Por eso, la polarización en el caso general depende no sólo del primer grado de la intensidad del campo eléctrico, sino que también de los grados superiores. *Si la dependencia de los grados superiores es esencial, el dieléctrico recibe el nombre de dieléctrico no lineal.* Semejante no linealidad se manifiesta, por lo general, sólo en los campos eléctricos muy fuertes, aunque hay ciertos materiales especiales en los que se observa la no linealidad para campos relativamente débiles.

Si la no linealidad no es grande, la polarización se expresa mediante los primeros grados de las componentes del campo:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \kappa_{ij} E_j.$$

Semejante dieléctrico se llama **lineal**. Si las propiedades de dicho dieléctrico son diferentes respecto a las direcciones, el dieléctrico se denomina **anisó-**

tropo. El conjunto de las nueve magnitudes  $\kappa_{ij}$  se denomina **tensor de la susceptibilidad dieléctrica**. Caracteriza totalmente las propiedades eléctricas del dieléctrico. Si las propiedades del dieléctrico son las mismas por todas las direcciones, éste se denomina **isótropo lineal**. Sus propiedades dieléctricas se caracterizan por una magnitud escalar: la susceptibilidad dieléctrica.

Para un dieléctrico isótropo lineal

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (17.11)$$

donde  $\kappa$  es la susceptibilidad dieléctrica. En el sistema absoluto de unidades de Gauss la susceptibilidad dieléctrica  $\kappa'$  es un magnitud  $4\pi$  veces inferior a  $\kappa$  en la fórmula (17.11):

$$\kappa' = \kappa / (4\pi). \quad (17.12)$$

La susceptibilidad dieléctrica de la mayoría de los dieléctricos sólidos y líquidos se expresa por números del orden de varias unidades. La susceptibilidad dieléctrica de la mayoría de los gases constituye diezmilésimas partes de la unidad y en la mayor parte de los casos prácticamente puede no tomarse en consideración. En cambio, existen dieléctricos, cuya susceptibilidad alcanza grandes valores. Por ejemplo, el agua tiene  $\kappa = 80$ , el alcohol,  $\kappa = 25 \dots 30$  y las substanciales ferroeléctricas (sal de Seignette o de Rochelle, titanatos de bario, etc.) tienen una susceptibilidad dieléctrica que alcanza varios miles de unidades.

**Influencia de la polarización sobre el campo eléctrico.** El momento dipolar del elemento del volumen  $dV$ , conforme a la fórmula (17.8), es igual a

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} dV, \quad (17.13)$$

es decir, coincide en dirección con la intensidad  $\mathbf{E}$ , ya que  $\kappa > 0$ . Por eso, la intensidad del campo, creado por el momento dipolar, está orientada de manera contraria a la intensidad del campo exterior y lo debilita (fig. 78). Así pues, *como consecuencia de la polarización, la intensidad en el dieléctrico se debilita*. El papel de la polarización en este caso se reduce sólo a la división de las cargas positivas y negativas, merced a lo cual en el volumen del dieléctrico, como también en su superficie, se forman cargas, denominadas **de polarización** o **ligadas**, ya que, ellas como si estuviesen amarradas a distintos lugares del dieléctrico, no pueden desplazarse libremente por su volumen o superficie. *Las cargas ligadas originan un campo eléctrico de la misma manera que lo hacen las cargas libres, y en este sentido no se diferencian en nada de ellas*. Así pues, la presencia del dieléctrico se tiene en cuenta tomando en consideración el campo eléctrico, creado por las cargas ligadas que surgen a causa de la polarización. Por esta razón, es necesario hallar la expresión para las cargas ligadas.

**Densidades superficial y volumétrica de las cargas ligadas.** Examinemos un elemento  $dS$  de la superficie (fig. 79), trazada dentro de un dieléctrico no polarizado. Durante la polarización, las cargas eléctricas comienzan a moverse a través de este elemento superficial. Calculemos la carga que interseca el elemento  $dS$  al surgir la polarización  $\mathbf{P}$ . Para simplificar las fórmulas, considera-

remos que se mueven sólo las cargas positivas. Designemos por  $q$  la carga del dipolo; por  $l$  el brazo del dipolo, correspondiente a la polarización  $\mathbf{P}$  y por  $N$ , la concentración de cargas. Al aparecer la polarización  $\mathbf{P}$ , el área  $dS$  (véase la fig. 79) la intersecan todas las cargas positivas que antes del movimiento, determinado por la polarización, estaban en el volumen  $dV = dSh = dSl \cos \theta$  de un cilindro oblicuo con base  $dS$ . Por lo tanto,

$$dQ = Ngl \cos \theta dS = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (17.14)$$

Examinemos ahora cierto volumen  $V$  (fig. 80). Como consecuencia de la polarización, la superficie  $S$ , que limita el volumen  $V$ , se interseca por las cargas. En función del balance de las cargas que llegan y salen del volumen, en

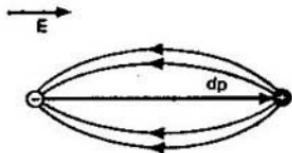


Fig. 78  
Mecanismo de debilitamiento del campo durante la polarización

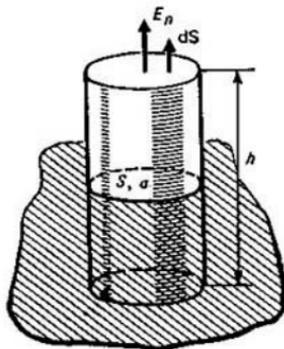


Fig. 79  
Cálculo de la carga que atraviesa el elemento superficial durante la polarización

ésto se forma una carga ligada, cuya densidad volumétrica es  $\rho_{lig}$ . Teniendo en cuenta (17.14), escribamos el principio de conservación de la carga en el volumen  $V$  como

$$\int_V \rho_{lig} dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} \quad (17.15)$$

El signo menos indica que en el volumen surge una carga, de signo contrario a la que sale de la superficie que limita el volumen. Escribamos de nuevo la igualdad (17.15), aplicando a su segundo miembro el teorema de Gauss—Ostrogradski:

$$\int_V (\rho_{lig} - \text{div } \mathbf{P}) dV = 0 \quad (17.16)$$

Si la igualdad (17.16) se cumple idénticamente para cualesquiera  $V$ , el integrando será idénticamente igual a cero. Por lo tanto,

$$\rho_{lig} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (17.17)$$

De esta manera, las cargas ligadas volumétricas surgen sólo cuando la polarización  $\mathbf{P}$  varía de un punto a otro. Esto queda claro también sin cálculo alguno,

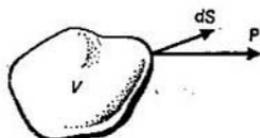


Fig. 80  
Para la búsqueda de la expresión para la carga volumétrica ligada

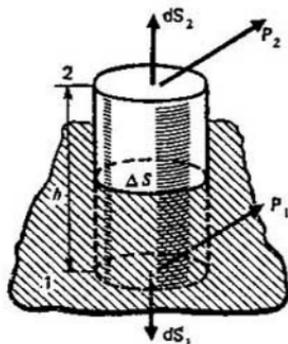


Fig. 81  
Para la deducción de la expresión para la densidad superficial de las cargas ligadas

ya que para la polarización homogénea las cargas pasan a un nuevo lugar, ocupando los sitios de la misma cantidad de cargas que marcharon. Como consecuencia, las correspondientes partes del volumen del dieléctrico permanecen eléctricamente neutras.

En la superficie de separación de dos dieléctricos diferentes surgen cargas superficiales. Eso queda obvio de las siguientes consideraciones. Siendo la intensidad del campo eléctrico la misma en distintos dieléctricos, la polarización es diferente. Por lo tanto, la superficie de separación se interseca por distinta cantidad de cargas de polarización por parte de cada uno de los dieléctricos. Como resultado, en las inmediaciones de la superficie de separación se acumula cierta carga ligada, denominada carga ligada superficial. Designemos por  $\sigma_{lig}$  su densidad superficial. Para hallarla lo más sencillo es partir de la fórmula (17.17). Construyamos en la superficie de separación entre los dieléctricos un cilindro recto, cuya área de la base es  $\Delta S$  y su altura  $h$  (fig. 81) e integremos los dos miembros de la ecuación (17.17) respecto al volumen de dicho cilindro:

$$\int_V \rho_{lig} dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV. \quad (17.18)$$

En el primer miembro de (17.18) está la carga total dentro del volumen, o sea, la carga superficial  $\sigma_{11g} \Delta S$ . El segundo miembro de la igualdad se transforma, aplicando el teorema de Gauss—Ostrogradski, en una integral respecto a la superficie:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \int_{S_1} \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{S}_1, \quad (17.19)$$

donde los índices 1 y 2 indican las magnitudes, referentes al primero y segundo dieléctricos por las dos partes diferentes de la superficie de separación. El flujo de polarización del vector  $\mathbf{P}$  se compone de los flujos que atraviesan las bases y las superficies laterales del cilindro. Los flujos a través de las superficies laterales se suponen iguales a cero. Elijamos a título de normal positiva a la superficie de separación la que está orientada del primer dieléctrico al segundo. Por lo tanto,  $d\mathbf{S}_2$  está dirigida por la orientación positiva de la normal y  $d\mathbf{S}_1$ , por la negativa. Por eso

$$\int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = P_{2n} \Delta S - P_{1n} \Delta S. \quad (17.20)$$

Recordemos que la integral por la superficie lateral no se toma en consideración. Teniendo en cuenta el valor de la integral en el primer miembro de la ecuación (17.18), obtenemos definitivamente

$$\sigma_{11g} = -(P_{2n} - P_{1n}). \quad (17.21a)$$

Por esta razón, denotando el versor de la normal, dirigido hacia el segundo medio por  $\mathbf{n}_2$ , la fórmula (17.21a) puede presentarse como

$$\sigma_{11g} = -\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1). \quad (17.21b)$$

Es útil señalar que el vacío puede también considerarse como un dieléctrico, cuya polarización es nula. La fórmula (17.21a) puede aplicarse a la superficie de separación entre el dieléctrico y el vacío. Tomando la normal exterior al dieléctrico como normal positiva, [es decir, considerando el dieléctrico a título de medio 1 en la fórmula (17.21a)], hagamos  $P_{2n} = 0$ . Por lo tanto, [véase (17.21)],

$$\sigma_{11g} = P_n, \quad (17.22)$$

donde  $P_n$  es la componente normal de la polarización del dieléctrico en su superficie de separación con el vacío.

Las fórmulas (17.17) y (17.21) permiten totalmente tener en cuenta la influencia del dieléctrico sobre el campo eléctrico. La intensidad del campo, creada por las cargas ligadas, se calcula mediante las mismas fórmulas, por las que se determina la intensidad en el vacío, la cual se origina por las cargas libres. En particular, el potencial  $\varphi_d$ , creado por las cargas ligadas del dieléctrico, se da por las fórmulas (14.35) y (14.36), sustituyendo en ellas las cargas libres por

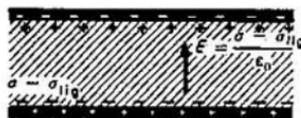


Fig. 82  
Campo en el condensador en presencia del dieléctrico

las ligadas:

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{11g} dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_{11g} dS}{r} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\text{div } \mathbf{P} dV}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{P_{11n} - P_{21n}}{r} dS. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Este potencial se compone con el potencial, creado por las cargas libres.

Ahora es útil enunciar otra vez más en forma explícita la idea principal para considerar la influencia de la substancia sobre el campo, que se siguió en el ejemplo de los conductores y dieléctricos: *en presencia de un campo eléctrico exterior la substancia que se convierte por sí misma en una fuente del campo eléctrico, como consecuencia de lo cual el campo exterior varía.*

Estudieemos este proceso en el ejemplo de la formación del campo en un condensador plano, cuyo espacio entre las armaduras está lleno de dieléctrico (fig. 82). Consideremos que en las armaduras del condensador hay una carga con densidad superficial  $\sigma$ . Si entre las armaduras del condensador existe vacío,  $E' = \sigma/\epsilon_0$  [véase (16.12)]. A causa de la polarización del dieléctrico, la intensidad del campo disminuye. Determinemos la polarización del dieléctrico por la fórmula (17.11), teniendo en cuenta que  $E \neq \sigma/\epsilon_0$ . Como consecuencia de la homogeneidad del dieléctrico y del campo entre las placas cargadas paralelas, sacamos la conclusión que la polarización del dieléctrico es homogénea, o sea, las cargas ligadas volumétricas están ausentes. Sólo existen las cargas superficiales ligadas, cuya densidad superficial es [véase (17.22)]

$$\sigma_{11g} = \kappa\epsilon_0 E, \quad (17.24)$$

donde  $E$  es la proyección de la intensidad por la normal exterior del dieléctrico. Se sabe que la intensidad está dirigida desde la placa con carga positiva del condensador hacia la que tiene carga negativa. Por eso de (17.24) se desprende que la densidad superficial de la carga ligada en la superficie de separación con la placa con carga positiva es negativa y en la superficie de separación con la placa con carga negativa es positiva. Por esta razón, la intensidad del campo en el dieléctrico entre las placas del condensador es igual a la intensidad del campo en el vacío entre las mismas placas, pero siendo la densidad superficial de la carga  $\sigma - \sigma_{11g}$ . Basándose en esto, puede escribirse la ecuación para definir la magnitud incógnita

$$E = (\sigma - \sigma_{11g})/\epsilon_0 = (\sigma - \kappa\epsilon_0 E)/\epsilon_0. \quad (17.25)$$

La solución de esta ecuación tiene el aspecto

$$E = \sigma/[\epsilon_0(1 + \kappa)]. \quad (17.26)$$

**Desplazamiento eléctrico.** La ecuación (13.19), teniendo en cuenta las cargas ligadas como fuentes del campo, puede escribirse; evidentemente, de la

siguiente manera:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 + \rho_{\text{lig}}/\epsilon_0. \quad (17.27)$$

Sustituyendo en (17.27)  $\rho_{\text{lig}}$  por la expresión de (17.17), obtenemos

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (17.28)$$

El vector

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}} \quad (17.29)$$

se denomina **vector del desplazamiento**. Él no es un vector puramente de campo, ya que tiene en cuenta la polarización del medio. Escribamos con su ayuda la ecuación (17.28) como

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.} \quad (17.30)$$

Acordándonos del sentido de la divergencia del vector, de (17.30) puede deducirse sobre las ventajas del empleo de  $\mathbf{D}$ . Se ve que la única fuente de  $\mathbf{D}$  son las cargas libres, en las cuales este vector comienza y finaliza. En los puntos sin cargas libres es continuo, incluyendo los puntos con cargas ligadas. Las variaciones de la intensidad del campo, determinadas por las cargas libres, ya se han tenido en cuenta en el propio vector  $\mathbf{D}$  [véase (17.29)].

Expresando  $\mathbf{P}$  en (17.29) por la fórmula (17.11), hallamos

$$\mathbf{D} = (\epsilon_0 + \kappa \epsilon_0) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = (1 + \kappa) \epsilon_0, \quad (17.31)$$

donde  $\epsilon$  es la constante dieléctrica. La aplicación de  $\mathbf{D}$  simplifica considerablemente el análisis del campo en presencia del dieléctrico. A la par con  $\epsilon$  es cómodo utilizar también la magnitud adimensional

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0, \quad (17.32)$$

denominada **permitividad relativa**.

**Teorema electrostático de Gauss en presencia de dieléctricos.** Al multiplicar los dos miembros de (17.30) por  $dV$  e integrar respecto al volumen  $V$ , obtenemos

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV. \quad (17.33)$$

En el segundo miembro de (17.33) se halla la carga total  $Q$  dentro del volumen y el primer miembro se transforma en la integral por la superficie con ayuda del teorema de Gauss—Ostrogradski. En definitiva encontramos la fórmula

$$\boxed{\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,} \quad (17.34)$$

llamada **teorema electrostático de Gauss en presencia de dieléctricos**. Es válido para cualquier posición de los dieléctricos y las superficies de separación: una

parte del volumen o todo puede llenarse de diversos dieléctricos, y la superficie  $S$  puede pasar tanto en el vacío, como también intersectar los dieléctricos.

Al aplicar la fórmula (17.34) a una carga puntual  $q$  que se encuentra en un medio dieléctrico homogéneo ilimitado, y al tomar en calidad de superficie de integración una esfera de radio  $r$  con centro en el punto en que se encuentra la carga puntual, obtendremos la ley de Coulomb en el medio dieléctrico homogéneo:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \frac{r}{r}. \quad (17.35)$$

La intensidad del campo en el medio es  $\epsilon_r$  veces inferior a la del vacío. Tantas veces menor es también el potencial de la carga puntual. La fórmula (17.26) muestra que la intensidad del campo entre las armaduras del condensador en presencia del dieléctrico disminuye también  $\epsilon_r$  veces en comparación con la intensidad del campo en el vacío. La capacidad del condensador aumenta  $\epsilon_r$  veces.

**Condiciones de frontera.** Se denominan condiciones de frontera el enlace entre los vectores del campo por las diferentes partes de la superficie que separa las dos zonas. Dicha superficie puede dividir substancias con distintas propiedades, ser separadora del cuerpo en el vacío y, hablando en general, puede ser simplemente una superficie imaginaria en un medio homogéneo. En todos los casos las condiciones de frontera permiten determinar la variación de los vectores del campo al atravesar el límite. Dichas condiciones se deducen con ayuda de las ecuaciones del campo.

**Condiciones de frontera para la componente normal del vector  $D$ .** Deduzcamos esta condición de la misma manera que se recibió la condición límite (17.21). Pero ahora hay que partir de la ecuación (17.30) y no de (17.17):

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}, \quad \boxed{n_2 \cdot (D_2 - D_1) = \sigma}, \quad (17.36)$$

donde  $\sigma$  es la densidad superficial de la carga en el límite. La normal  $n_2$  está orientada hacia el medio 2. De (17.36) puede obtenerse, por ejemplo, la intensidad del campo en la superficie de un conductor cargado. Considerando como positiva la normal exterior respecto al conductor, debemos considerar en la fórmula (17.36) que el vacío es el medio 2 y el conductor, el medio 1. La intensidad  $E$  del campo en el conductor es nula, es decir,  $D_{1n} = 0$ . Por lo tanto,

$$D_n = \sigma \quad (17.37)$$

o bien

$$E_n = \sigma/\epsilon. \quad (17.38)$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (16.12) para el vacío, pero sustituyendo  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ , o sea, la intensidad del campo en la superficie del conductor en presencia del dieléctrico disminuye  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  veces.

La fórmula (17.38) da también la solución directa del problema sobre el campo en un condensador plano que se expresa por la relación (17.26). En este caso desaparece la necesidad de tener en cuenta en forma explícita las cargas li-

gadas superficiales en el dieléctrico entre las placas del condensador, como se hizo al deducir (17.26).

**Condiciones de frontera para la componente tangencial del vector  $E$ .** Construyamos cerca de la superficie de separación de los dieléctricos 1 y 2 un contorno cerrado (fig. 83). A causa del carácter potencial del campo eléctrico, la circulación  $E$  por el contorno cerrado es nula:

$$\oint_{AB\bar{C}D\bar{A}} E \cdot dl = 0. \quad (17.39)$$

Las integrales por las secciones  $BC$  y  $DA$  son tan pequeñas como se quiera, ya que  $AB$  y  $CD$  se encuentran extremadamente cerca a la superficie de separación.

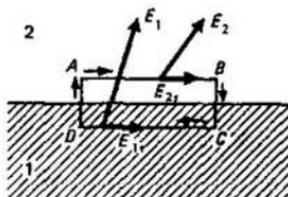


Fig. 83  
Para la deducción de la condición de frontera para la componente tangencial del vector  $E$

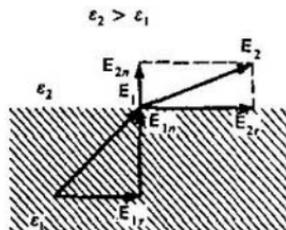


Fig. 84  
Refracción de las líneas de fuerza en la superficie de separación de los dieléctricos

ción. Los signos de las integrales por  $AB$  y  $CD$  son contrarios, debido a que las vías de integración transcurren en direcciones contrarias. Por eso [véase (17.39)]

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (17.40)$$

**Refracción de las líneas de fuerza en la superficie de separación de los dieléctricos.** Supongamos que en la superficie de separación de los dieléctricos no haya cargas libres. Entonces,

$$\epsilon_1 \epsilon_{1n} = \epsilon_2 \epsilon_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (17.41)$$

Si  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ,  $E_{2n} < E_{1n}$  y, por lo tanto, las líneas de fuerza se comportan como se muestra en la fig. 84, o sea, las líneas de fuerza se alejan de la normal, penetrando en el dieléctrico con una constante dieléctrica mayor.

**Signos de las cargas ligadas en la superficie de separación de los dieléctricos.** Examinemos las componentes normales de la intensidad del campo y de la polarización en la superficie de separación de los dieléctricos. Escribamos la fórmula (17.11), teniendo en cuenta (17.31) para los dieléctricos por las partes di-

ferentes de la separadora, en forma de (fig. 85):

$$P_{2n} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_{2n}, \quad P_{1n} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_{1n}, \quad (17.42)$$

Transformemos la fórmula (17.21) para la densidad superficial de la carga, tomando en consideración (17.32):

$$\sigma_{lig} = P_{1n} - P_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \quad (17.43)$$

De no haber cargas libres en la superficie,  $\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = 0$  y la fórmula (17.43) se simplifica:

$$\sigma_{lig} = -\epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}). \quad (17.44)$$

Para mayor precisión consideraremos como siempre que  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  y  $E$  está dirigida desde el primer medio al segundo. Recordemos que a título de normal

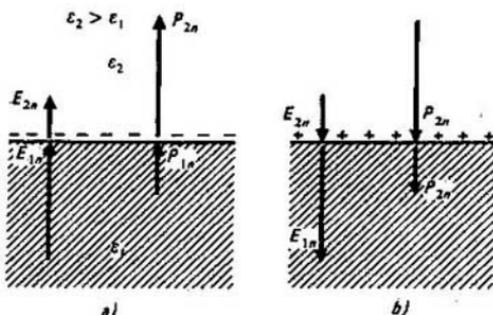


Fig. 85

Signo de la carga superficial y comportamiento de las componentes normales de la intensidad del campo y la polarización al intersecar las superficies de separación en distintas direcciones

positiva se elige la orientada hacia el segundo medio. Entonces en la fórmula (17.44)  $E_{1n}$  y  $E_{2n}$  son positivas, con la particularidad de que  $E_{1n} > E_{2n}$ . Por eso la carga ligada en la superficie de separación es negativa (fig. 85, a). Las magnitudes  $P_{1n}$  y  $P_{2n}$  son también positivas y, por lo tanto,  $P_{2n} > P_{1n}$ , como se ve de (17.43) para  $\sigma_{lig} < 0$  (fig. 85, a).

Con ayuda de semejantes razonamientos puede estudiarse la variación de las componentes normales de la intensidad del campo, la polarización y el signo de la densidad superficial de la carga cuando la intensidad del campo está orientada hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica (fig. 85, b).

**Método de representaciones.** La idea del método aplicado a los dieléctricos es la misma que al emplearlo para los conductores (véase el § 16).

Supongamos que se tienen dos medios dieléctricos infinitos (con permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ ) con superficie de separación plana. En el primer medio a la distan-

cia  $d$  de la superficie de separación se encuentra una carga puntual  $q$ . Se afirma que el potencial en el primer medio es el mismo que el debido a la carga  $q$  y su imagen  $q' = q(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ , situada en el segundo medio a la distancia  $d$  de la superficie de separación (fig. 86, a), con la particularidad de que el cálculo se lleva a cabo de tal manera, como si la constante dieléctrica de los medios fuese  $\epsilon_1$ . El potencial del segundo medio es igual al potencial, creado por la carga  $q'' = 2\epsilon_2 q/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ , que se encuentra en el lugar de la carga  $q$  en el primer

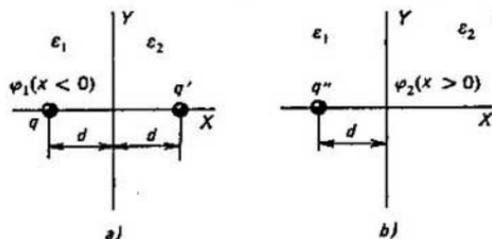


Fig. 86  
Método de representaciones en aplicación de a los dieléctricos

medio (fig. 86, b), con la particularidad de que el cálculo se efectúa de tal manera, como si la constante dieléctrica de los medios fuese  $\epsilon_2$ . Así pues, los potenciales de los medios primero y segundo son iguales a:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} \right\}, \quad (17.45)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}}.$$

No es difícil comprobar que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  satisfacen la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (17.46)$$

que expresa la continuidad de las componentes normales de  $D$  y de las componentes tangenciales de  $E$ . Además, se satisfacen también la exigencia de que el potencial sea finito:

$$\varphi_1 |_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \varphi_2 |_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (17.47)$$

Según el teorema de unicidad, las fórmulas (17.45) son la solución buscada. La fuerza que actúa sobre la carga  $q$  es igual a la fuerza de interacción de esta carga con la imagen  $(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2) q$ , situada a la distancia  $2d$  de la

carga  $q$ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{q^2}{4a^2}. \quad (17.48)$$

Para  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  el valor de  $F$  es negativo, es decir,  $q$  se atrae a la superficie de separación de los dieléctricos. Pero si  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ,  $F$  es positiva y, por lo tanto,  $q$  se repele de la frontera.

**Esfera dieléctrica en un campo homogéneo.** Con ayuda de la ecuación de Laplace hallemos la intensidad del campo eléctrico al introducir una esfera dieléctrica en el campo eléctrico inicialmente homogéneo. Si las dimensiones lineales de las armaduras de un condensador plano son bastante grandes, incluso para una distancia relativamente grande entre ellas, el campo en las zonas inter-

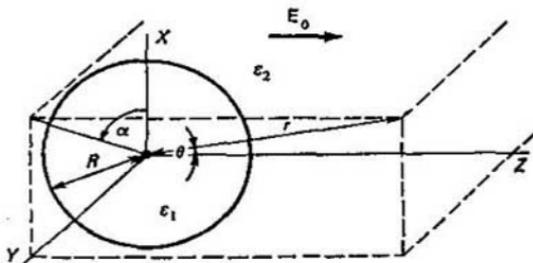


Fig. 87  
Orientación del sistema de coordenadas para una esfera dieléctrica en un campo homogéneo

nas lejos de los extremos es homogéneo con elevada precisión. Si las dimensiones de las armaduras aumentan hasta el infinito, creciendo al mismo tiempo hasta el infinito la distancia entre ellas, para una densidad superficial de las cargas en las armaduras constantes, en todo el espacio se crea un campo eléctrico homogéneo. Coloquemos en este campo una esfera dieléctrica conductora. Está claro que a causa de la polarización la intensidad del campo en las proximidades de la esfera varía, permaneciendo constante en el infinito. Determinemos la intensidad del campo eléctrico en todo el espacio, incluyendo la zona dentro de la esfera dieléctrica.

Supongamos que la esfera de radio  $R$  consta de un dieléctrico, cuya constante dieléctrica es  $\epsilon_1$ , y el medio que la rodea está lleno de dieléctrico con la constante dieléctrica  $\epsilon_2$  (fig. 87). La intensidad del campo homogéneo está dirigida paralelamente al eje  $Z$ . Como consecuencia de la simetría axial del problema, es cómodo hacer uso del sistema esférico de coordenadas con el eje polar orientado por el eje  $Z$ .

Para un dieléctrico homogéneo con constante dieléctrica  $\epsilon$  la ecuación de Poisson (15.14) tiene el aspecto

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon, \quad (17.49)$$

lo que es obvio, al comparar la ecuación (15.10) para el vacío con la ecuación (17.30) que para el dieléctrico homogéneo tiene el aspecto

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon. \quad (17.50)$$

En el sistema esférico de coordenadas la ecuación de Poisson se escribe así:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (17.51)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo axial. En dicho problema no hay cargas libres ( $\rho = 0$ ), y, como consecuencia de la simetría axial,  $\partial \varphi / \partial \alpha = 0$ . Por eso la tarea se reduce a la solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (17.52)$$

en todo el espacio, observando las siguientes condiciones:

- 1) en todas las partes el potencial  $\varphi$  es continuo y finito;
- 2) las componentes normales del vector  $\mathbf{D} = -\epsilon \operatorname{grad} \varphi$  son continuas en las superficies de separación de los medios, o sea, en la superficie de la esfera;
- 3) las componentes tangenciales del vector  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  son continuas en la superficie de la esfera.

Designemos las magnitudes, referentes a la zona interior de la esfera por el índice 1 y a la zona exterior, por el índice 2. En las matemáticas se conoce la solución general de la ecuación (17.52). En el caso dado todo se simplifica considerablemente. Mediante la verificación directa, puede uno cerciorarse de que las funciones

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta, \\ \varphi_2 &= -E_0 r \cos \theta + B_2 r^{-2} \cos \theta \end{aligned} \quad (17.53a)$$

satisfacen la ecuación (17.52), donde  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_2$  son constantes y  $E_0$  es el módulo de la intensidad del campo homogéneo (en el infinito).

Dado que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  satisfacen la ecuación (17.52), son el potencial si satisfacen todas las exigencias del problema. El potencial  $\varphi_1$  pertenece a la zona interior de la esfera y  $\varphi_2$ , a la exterior. De (17.53a) se ve que  $\varphi_1 \rightarrow \infty$  para  $r \rightarrow 0$ . Por eso es necesario considerar que  $A_2 = 0$ . La condición de continuidad de  $\varphi$  en la superficie de separación tiene el aspecto

$$A_1 R \cos \theta = -E_0 R \cos \theta + B_2 R^{-2} \cos \theta, \quad (17.53b)$$

de donde

$$A_1 = B_2 R^{-3} - E_0. \quad (17.54)$$

La componente tangencial del vector  $\mathbf{E}$  en la superficie de la esfera es igual a

$$E_\tau = E_\theta = - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{r=R}. \quad (17.55)$$

La condición  $E_1 \theta = E_2 \theta$  se satisface si se cumple la condición (17.53b), es decir, entre  $A_1$  y  $B_2$  existe la relación (17.54).

Las componentes normales del vector de intensidad son:

$$\begin{aligned} E_{1n} = E_{1r} &= -(\partial\varphi_1/\partial r)_{r=R} = -A_1 \cos \theta, \\ E_{2n} = E_{2r} &= -(\partial\varphi_2/\partial r)_{r=R} = E_0 \cos \theta + 2B_2 R^{-3} \cos \theta. \end{aligned} \quad (17.56)$$

Partiendo de la condición  $\varepsilon_1 E_{1r} = \varepsilon_2 E_{2r}$ , se desprende que

$$A_1 = -(\varepsilon_2/\varepsilon_1)(E_0 + 2B_2 R^{-3}). \quad (17.57)$$

La solución del sistema de (17.54) y (17.57) es:

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0, \quad B_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} R^3 E_0. \quad (17.58)$$

Los potenciales dentro de la esfera y fuera de ella son iguales a:

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 r \cos \theta, \quad (17.59)$$

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right) E_0 r \cos \theta. \quad (17.60)$$

Evidentemente, dentro de la esfera la intensidad del campo es constante y paralela al eje Z:

$$E_{1z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial(r \cos \theta)} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0. \quad (17.61)$$

Esta es la suma de las intensidades del campo exterior y del campo creado por las cargas ligadas que surgen en la superficie de la esfera. Por lo tanto, la

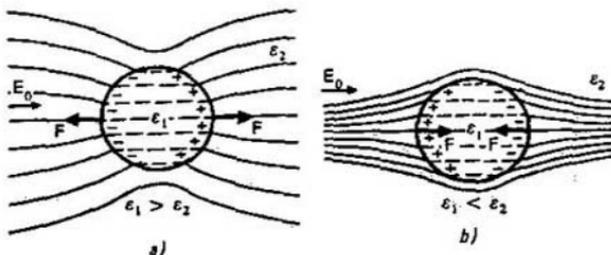


Fig. 88  
Líneas del vector de desplazamiento  $D$  para una esfera dieléctrica en un campo homogéneo exterior

intensidad del campo, formado dentro de la esfera por las cargas ligadas es igual a

$$E_{1lg} = E_{1z} - E_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_0/(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2). \quad (17.62)$$

Esta es constante y está dirigida por el eje Z. La distribución de las cargas en la superficie de la esfera que conduce a una intensidad constante dentro de la esfera, se determina por la fórmula (16.75). Por eso puede concluirse que la intensi-

dad de (17.62) se crea por las cargas ligadas en la superficie de la esfera, cuya densidad varía con el ángulo  $\theta$  como en la fórmula (16.79), es decir,  $\sigma \sim \cos \theta$ .

De (17.62) se ve que para  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  la intensidad  $E_{\text{lig}}$  está orientada en sentido contrario a  $E_0$  y, por lo tanto, la intensidad dentro de la esfera es inferior a la del campo homogéneo inicial. Para  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  la intensidad  $E_{\text{lig}}$  coincide en dirección con  $E_0$  y amplifica ésta dentro de la esfera. La fig. 88 muestra las líneas del vector  $D$  para los casos  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  (a) y  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  (b) y los signos de las cargas ligadas que en este caso se forman en la superficie de la esfera. Señalemos que en la fig. 88 se muestran las líneas del vector  $D$  y no de  $E$ , ya que precisamente el vector  $D$  es continuo al no haber cargas libres. Al trazar las líneas del vector  $E$ , es necesario cambiar su densidad en la superficie de la esfera donde existen cargas ligadas.

Las cargas polarizadas (o ligadas) surgen donde cambia la polarización.

Habiendo campo eléctrico exterior, los cuerpos materiales se convierten ellos mismos en fuentes del campo eléctrico, como consecuencia de lo cual, el campo que se observa, varía. En este caso los campos eléctricos se comportan con respecto a sus fuentes como si todo ocurriese en el vacío y no hubiese cuerpos materiales algunos.

Se llama polarización al proceso de formación de momentos dipolares en los volúmenes macroscópicos del dieléctrico.

La componente normal de la intensidad del campo eléctrico sufre una discontinuidad en la superficie de separación de diversos dieléctricos y por eso las líneas de fuerza se refractan.

**Ejemplo 17.1.** Hallar las cargas ligadas, la polarización y la intensidad del campo, inducido por la carga puntual  $q$  colocada en el centro de dos esferas concéntricas con radios  $a_1$  y  $a_2$ . La capa esférica está llena de una substancia, cuya constante dieléctrica es  $\epsilon$  (fig. 89).

El campo es esféricamente simétrico. Eligiendo como  $S$  la superficie de la esfera con radio  $r$  y centro en el punto en que está la carga  $q$ , determinamos, por la fórmula de Gauss

$$\int_S D \cdot dS = D_r 4\pi r^2 = q, \text{ el desplazamiento eléctrico}$$

$$D_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2},$$

que es constante en todo el espacio. La intensidad del campo eléctrico

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ para } r < a_1,$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \text{ para } a_1 < r < a_2,$$

$$E_r = \frac{D_r}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ para } a_2 < r$$

sufre una discontinuidad en la superficie de la capa esférica para  $r = a_1$  y  $r = a_2$ .

La polarización se da mediante las expresiones

$$P_r = D_r - \epsilon_0 E_r = \begin{cases} 0 & \text{para } r < a_1 \\ \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q}{4\pi\epsilon r^2} & \text{para } a_1 < r < a_2, \\ 0 & \text{para } a_2 < r \end{cases} \quad (17.64)$$

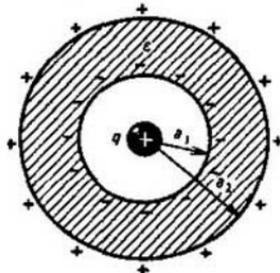


Fig. 89  
Carga puntual, rodeada por una capa dieléctrica, concéntrica con ella

y, por lo tanto, la densidad superficial de las cargas ligadas es

$$\sigma_{11g.1} = -P_r(r = a_1) = -(\epsilon - \epsilon_0) q / (4\pi\epsilon a_1^2), \quad (17.65)$$

$$\sigma_{11g.2} = P_r(r = a_2) = (\epsilon - \epsilon_0) q / (4\pi\epsilon a_2^2).$$

Las cargas ligadas en la superficie de la capa esférica se calculan por las fórmulas:

$$q_{11g.1} = 4\pi a_1^2 \sigma_{11g.1} = -(\epsilon - \epsilon_0) q / \epsilon,$$

$$q_{11g.2} = 4\pi a_2^2 \sigma_{11g.2} = (\epsilon - \epsilon_0) q / \epsilon.$$

Son iguales por el valor absoluto y contrarias según el signo.

La densidad volumétrica de las cargas ligadas es por todas las partes nula, ya que

$$\rho_{11g} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = 0. \quad (17.66)$$

El campo dentro de la capa esférica se crea por la carga puntual  $q$  y la carga ligada  $q_{11g.1}$  que se encuentra en la superficie interior de la capa. La carga ligada situada en la superficie exterior de la capa esférica no forma campo eléctrico en el volumen que limita. Por esta razón, la intensidad del campo de una carga puntual  $q$  dentro de la capa esférica disminuye en el valor de la intensidad, creada por la carga ligada  $q_{11g.1} = -(\epsilon - \epsilon_0) q / \epsilon$ . Para  $a_1 \rightarrow 0$  deducimos que la carga puntual  $q$  en el dieléctrico actúa como una carga puntual efectiva

$$q_{\text{ef}} = q + q_{11g.1} = \epsilon_0 q / \epsilon. \quad (17.67)$$

Esto conduce al debilitamiento de la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico.

## § 18. Energía del campo electrostático

*Se examinan la energía de interacción y energía propia de las cargas y su relación con la densidad de energía del campo eléctrico. Se deducen las fórmulas para la energía de los conductores cargados y la energía de un cuerpo dieléctrico en un campo exterior.*

**Energía de interacción de las cargas discretas.** Supongamos que haya esferas cargadas de diámetro muy pequeño, que es inferior a la distancia entre los centros de las esferas. La distribución de la carga en las esferas es esféricamente simétrica. El sentido físico de la fórmula (14.32) permite deducir que la magnitud

$$W' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad (18.1)$$

es igual al trabajo que se efectúa al alejar las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  desde la distancia  $r$  entre ellas hasta el infinito. Este trabajo es positivo cuando las cargas son del mismo signo y entre ellas actúan fuerzas de repulsión. Entre las cargas de signos contrarios actúan fuerzas de atracción y el trabajo es negativo. En el último caso el trabajo tiene que ejercerse a cuenta de las fuentes exteriores de energía. Por eso, conforme a la definición general, (18.1) es la energía de interacción entre las esferas cargadas. Dado que ambas cargas participan en la fórmula (18.1)

es más conveniente escribirla como

$$W' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} Q_2 \right) = \frac{1}{2} (\varphi_1' Q_1 + \varphi_2' Q_2), \quad (18.2)$$

donde  $\varphi_1'$  es el potencial, creado por la segunda carga en el centro de la primera esfera y  $\varphi_2'$  el potencial, que forma la primera carga en el centro de la segunda esfera.

La fórmula (18.2) se generaliza fácilmente para el caso de varias esferas cargadas con cargas  $Q_i$ :

$$W' = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i' Q_i. \quad (18.3)$$

Esta fórmula nos ofrece la energía de interacción del sistema de cargas.

**Energía de interacción durante la distribución continua de las cargas.** Sea que en el elemento de volumen  $dV$  se encuentre una carga  $dQ = \rho dV$ . Para definir la energía de interacción de los elementos de la carga  $dQ$  puede aplicarse la fórmula (18.3), pasando en ella de la suma a la integral:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV, \quad (18.4)$$

donde  $\varphi$  es el potencial en el punto del elemento de volumen  $dV$ .

**Energía propia.** A primera vista la fórmula (18.4) parece ser análoga a (18.3). En cambio, entre ellas existe una diferencia de principio. La fórmula (18.3) tiene en cuenta sólo la energía de interacción entre las esferas cargadas sin considerar la energía de interacción de los elementos de la carga de cada esfera entre sí. Mientras que la fórmula (18.4) toma en consideración tanto la energía de interacción entre las esferas, como también la energía de interacción de los elementos de carga de cada esfera entre sí, denominada energía propia de la esfera cargada. Al calcular la energía de interacción de las esferas cargadas, (18.4) se reduce a las integrales respecto a los volúmenes  $V_i$  de las esferas:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV = \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i \rho dV. \quad (18.5)$$

En cualquier punto del volumen de la  $i$ -ésima esfera  $\varphi_i$  se compone de dos partes:  $\varphi_i^{(1)}$ , creado por las cargas de las otras esferas y  $\varphi_i^{(pr)}$ , formado por las cargas de la  $i$ -ésima esfera:

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(pr)}. \quad (18.6)$$

Entonces [véase (18.5)]

$$W = \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(1)} \rho dV + \sum_i \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_i^{(pr)} \rho dV. \quad (18.7)$$

Puesto que las cargas en las esferas se distribuyen de manera esféricamente simétrica,

$$\int_{V_i} \varphi_i^{(v)} \rho \, dV = \varphi_i Q_i, \quad (18.8)$$

donde  $\varphi_i$  es el potencial en el centro de la esfera y  $Q_i = \int_{V_i} \rho \, dV$ , la carga total de la esfera.

La demostración de (18.8) en principio es semejante a la de la equivalencia del campo eléctrico, engendrado por la distribución esféricamente simétrica de la carga en la esfera y por la correspondiente carga puntual, situada en el centro de la esfera (para la zona fuera de la esfera). Ahora (18.7) puede escribirse como

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i + \frac{1}{2} \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^{(pr)} \rho \, dV = W' + \sum_i W_i^{(pr)}, \quad (18.9)$$

donde  $W_i$  se da por la fórmula (18.3).

Las energías propias  $W_i^{(pr)}$  de las esferas dependen de las leyes de distribución de la carga en las esferas y los valores de las cargas. Por ejemplo, sea que por la superficie de la esfera esté distribuida uniformemente una carga  $Q$ . En este caso el potencial se determina por la fórmula (16.28) y, por lo tanto,

$$W^{(pr)} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (18.10)$$

Para  $R \rightarrow 0$  la magnitud  $W^{pr} \rightarrow \infty$ . Eso significa que la energía propia de la carga puntual es infinita. Ello conduce a serias dificultades al utilizar el concepto de cargas puntuales.

Así pues, la fórmula (18.3) puede emplearse para analizar la interacción de las cargas puntuales, ya que ella no contiene sus energías propias infinitas. La fórmula (18.4) para la distribución continua de la carga tiene en cuenta toda la energía de interacción, mientras que la (18.3) sólo parte de ella. Por esta razón, (18.4) es una fórmula más completa y con mayor contenido que la (18.3).

**Densidad de la energía del campo.** Haciendo uso de la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (18.11)$$

escribamos (18.4) en la forma

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV. \quad (18.12)$$

Tomando en consideración la fórmula del análisis vectorial

$$\varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}), \quad (18.13)$$

representemos (18.12) como la suma de dos integrales:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV + \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} (\varphi \mathbf{D}) \, dV, \quad (18.14)$$

donde  $E = -\text{grad } \varphi$ . La segunda integral en (18.14), según el teorema de Gauss—Ostrogradski, es igual a

$$\int_V \text{div}(\varphi D) dV = \int_S \varphi D \cdot dS, \quad (18.15)$$

donde  $S$  es una superficie cerrada que abarca el volumen  $V$ . Se supone que todas las cargas están en una zona finita del espacio. A distancias  $r$  lejanas de las cargas  $\varphi \sim 1/r$ ,  $D \sim 1/r^2$ , o sea,  $\varphi D \sim 1/r^3$ . El área  $S$  de la superficie crece directamente proporcional a  $r^2$ . Por lo tanto, la integral (18.15) tiene el orden de  $\varphi SD \sim 1/r$  y al alejar la superficie de integración al infinito, tiende a cero. Por eso para todo el espacio la fórmula (18.14) adquiere la forma

$$W = \frac{1}{2} \int E \cdot D \, dv. \quad (18.16)$$

Las energías  $W$ , calculadas por las fórmulas (18.16) y (18.4) son iguales, pero el contenido físico de estas fórmulas es totalmente diferente. Imaginemos que las cargas estén en unas capas superficiales finas de las esferas. En este caso la integral (18.4) se reduce a la suma de las integrales por las capas superficiales de las esferas, mientras que en el espacio entre las cargas es nula. La integral en (18.16) se reduce a la integral respecto al espacio entre las esferas donde hay un campo  $E$ . Por consiguiente, en (18.4) como portador de la energía sirven las cargas, y la energía se presenta localizada en las cargas. En (18.16) el campo eléctrico se considera portador de la energía y la energía se imagina localizada en todo el espacio donde existe campo eléctrico. La densidad de la energía eléctrica [véase (18.16)] es igual a

$$w = 1/2 E \cdot D. \quad (18.17)$$

De esta manera, la densidad de la energía en (18.17) es positiva, ya que  $E \cdot D = \epsilon E^2 > 0$ . Por lo tanto, la energía total en (18.16) y (18.4) es también positiva. En cambio, la energía de interacción en (18.3) entre las cargas discretas puede ser tanto positiva, como negativa. La causa de esto se desprende de la igualdad (18.9), la que es útil representar como

$$W' = W - \sum_i W_i^{(pr)}. \quad (18.18)$$

Así pues, *la energía de interacción entre las cargas discretas es positiva cuando su energía propia (que siempre es positiva) es inferior a la energía total del campo, y negativa, cuando su energía propia es mayor que la energía total del campo.*

Supongamos que todas las cargas estén fijas en sus lugares, a excepción de una de ellas. Entonces la energía de interacción de la carga separada con las otras se denomina energía potencial. Basándose en lo dicho, ésta es simplemente una parte de la energía del campo eléctrico. La variación de la energía potencial está relacionada con el cambio de la energía del campo. *El principio de conserva-*

*ción de la energía para una partícula en un campo de potencial que afirma la constancia de la suma de su energía cinética y potencial significa que la disminución de la energía cinética de la partícula va acompañada del aumento correspondiente de la energía del campo, y viceversa.*

La expresión (18.17) está enunciada en forma local y determina la densidad de la energía como función de la intensidad del campo eléctrico y las propiedades del medio en el punto dado, consideradas por el desplazamiento  $D$ . Está claro que la validez de esta fórmula no puede depender del modo que se creó el campo eléctrico en el punto dado. Por eso la expresión (18.17) es justa no sólo para los campos continuos, sino que también para los variables. Con otras palabras, esta fórmula expresa la densidad de la energía del campo eléctrico y no sólo del electrostático.

**Energía del campo de las cargas superficiales.** Dado que la fórmula (18.17) no depende de qué cargas son las fuentes del campo, ella es válida también habiendo cargas superficiales. La fórmula (18.16) da también la energía total del campo independientemente de cuáles son las cargas que engendran el campo. Por lo tanto, la fórmula (18.16) tiene en cuenta correctamente no sólo las cargas volumétricas, sino que las superficiales.

En presencia de cargas superficiales la fórmula (18.4) varía en cierto grado. Sin embargo, este cambio es evidente. El integrando en (18.4) es igual a  $\varphi \rho dV = \varphi dq$  y tiene el sentido de energía potencial que posee un elemento de carga  $dq$ , encontrándose en el punto con potencial  $\varphi$ . Esta energía potencial no depende del hecho de si es  $dq$  un elemento de la carga volumétrica o superficial. Por esta razón, la expresión (18.4) es aplicable también para las cargas superficiales, pero entonces  $dq = \sigma dS$  y es necesario integrar respecto a todas las superficies  $S$  en las que haya cargas. Por consiguiente, teniendo en cuenta las cargas superficiales, la fórmula (18.4) adquiere el aspecto

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS. \quad (18.19)$$

Todo lo dicho sobre la energía de interacción y la energía propia es válido también para las cargas superficiales. Sólo es necesario tomar en consideración su aportación tanto en la energía total, como en la propia. Esta circunstancia ya fue utilizada al deducir la energía propia [véase (18.10)].

**Energía de los conductores con carga.** Puesto que en los conductores existen sólo cargas superficiales y el potencial en los distintos puntos del conductor tiene un mismo valor constante, la fórmula (18.18) toma el aspecto

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} \varphi_i \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \int_{S_i} \sigma_i dS_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i. \quad (18.20a)$$

Poniendo en esta fórmula la expresión (16.42), obtenemos la relación

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} Q_i Q_j. \quad (18.20b)$$

Transformemos (18.20a) con ayuda de (16.45) a la forma

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \varphi_i \varphi_j. \quad (18.20c)$$

De (18.20a) tenemos

$$W = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}, \quad (18.19d)$$

donde  $C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2)$  es la capacidad del condensador y  $Q$ , la carga en una de sus armaduras.

**Energía del dipolo en un campo exterior.** Esta energía es igual a la suma de energías de las cargas del dipolo (véase la fig. 77):

$$W = q [\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \varphi(\mathbf{r})]. \quad (18.21)$$

Desarrollemos  $\varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l})$  en serie respecto a  $l$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{l}) &= \varphi(\mathbf{r}) + l_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + l_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + l_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \dots = \\ &= \varphi(\mathbf{r}) - (l_x E_x + l_y E_y + l_z E_z) = \varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (18.12)$$

donde debido a la extremada pequeñez de  $l$  se conservan sólo los términos del primer orden respecto a  $l$ . La fórmula (18.21) adquiere la forma

$$\boxed{W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}. \quad (18.23)$$

**Energía de un cuerpo dieléctrico en un campo exterior.** El momento dipolar del elemento de volumen  $dV$  del cuerpo es igual a  $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV$ . La energía de este elemento en un campo exterior con intensidad  $\mathbf{E}$  es [véase (18.23)]  $dW = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dV$ . Parece como si la energía del cuerpo dieléctrico fuese igual a la integral de  $dW$  respecto al volumen del cuerpo. Pero eso es erróneo. Es que cada elemento polarizado del volumen  $dV$  del cuerpo dieléctrico se convierte en fuente del campo eléctrico, merced a lo cual participa dos veces en el cálculo de la energía: una vez como el momento dipolar que se encuentra en el campo exterior, y otra vez, como fuente del campo en el que se hallan los demás momentos dipolares.

Por esta razón, para definir su energía es cómodo partir de la energía total del campo. Además, supongamos que el dieléctrico es homogéneo y ocupa todo el espacio, lo que simplifica considerablemente los cálculos matemáticos.

Sea que el campo electrostático se cree mediante cierta distribución de las cargas en el espacio libre. Como siempre, las cargas se consideran situadas en una zona finita del espacio. Designemos por  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$  los vectores del campo, originado por la distribución de la carga en el espacio libre. La energía total del campo [véase (18.16)] es

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 dV, \quad (18.24)$$

donde la integral se extiende a todo el espacio. Ahora supongamos que todo el espacio se llena de un medio dieléctrico, permaneciendo constantes las cargas como fuentes de campo. El campo en todo el espacio varía. Designemos por  $\epsilon$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  la constante dieléctrica y los vectores del campo en el medio, respectivamente. La energía total después de llenar el espacio con dieléctrico, es igual a

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV. \quad (18.25)$$

Por lo tanto, la energía del dieléctrico, colocado en un campo exterior con intensidad  $\mathbf{E}_0$ , es

$$W_d = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0) dV. \quad (18.26)$$

Al llenar todo el espacio con dieléctrico homogéneo con permitividad  $\epsilon$ , la intensidad en todos los puntos del campo disminuye en  $\epsilon/\epsilon_0$  veces. Por lo tanto

$$\mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 / \epsilon. \quad (18.27)$$

Por eso, el integrando en (18.26) puede transformarse como

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0 = \epsilon E^2 - \rho_0 E_0^2 = -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0^2 = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad (18.28)$$

donde

$$(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{E}_0 = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \mathbf{P}. \quad (18.29)$$

Entonces [véase (18.26)]

$$W_d = -\frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dV. \quad (18.30)$$

Puede mostrarse que la fórmula (18.30) es válida también para la energía del dieléctrico de dimensiones finitas en un campo exterior  $\mathbf{E}_0$ .

De (18.20) puede obtenerse la energía del cuerpo dieléctrico con permitividad  $\epsilon_2$  que se encuentra en un medio con la constante dieléctrica  $\epsilon_1$ . Escribamos a fórmula (18.30) para la energía del cuerpo dieléctrico con la constante dieléctrica  $\epsilon_1$ :

$$W_{d1} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_1 - \epsilon_0) \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_0 dV, \quad (18.31)$$

donde  $\mathbf{E}_1$  es la intensidad del campo en el cuerpo. Para simplificar los cálculos consideramos, como siempre, que el dieléctrico llena todo el espacio. La energía del dieléctrico con la permitividad  $\epsilon_2$  es semejante a la expresión (18.31) e igual a

$$W_{d2} = -\frac{1}{2} \int (\epsilon_2 - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_0 dV. \quad (18.32)$$

De aquí se desprende que la diferencia de las energías del dieléctrico con la constante dieléctrica  $\epsilon_2$  y del dieléctrico con la constante dieléctrica  $\epsilon_1$

es igual a

$$W_{d21} = W_{d2} - W_{d1} = -\frac{1}{2} \int [(e_2 - e_0) E_2 \cdot E_0 - (e_1 - e_0) E_1 \cdot E_0] dV. \quad (18.32a)$$

Transformando el integrando con auxilio de las fórmulas

$$E_2 = e_0 E_0 / e_2, \quad E_1 = e_1 E_1 / e_1, \quad (18.33)$$

hallamos

$$\begin{aligned} (e_2 - e_0) E_2 \cdot E_0 - (e_1 - e_0) E_1 \cdot E_0 &= \left[ \frac{e_0}{e_2} (e_2 - e_0) - \frac{e_0}{e_1} (e_1 - e_0) \right] E_0^2 = \\ &= (e_2 - e_1) \frac{e_0^2}{e_1 e_2} E_0^2 = (e_2 - e_1) E_2 \cdot E_1. \end{aligned} \quad (18.34)$$

Entonces (18.32) toma la forma

$$W_{d21} = -\frac{1}{2} \int (e_2 - e_1) E_2 \cdot E_1 dV, \quad (18.35)$$

donde  $W_{d21}$  es la energía del dieléctrico con la constante dieléctrica  $e_2$ , colocado en un medio, cuya constante dieléctrica es  $e_1$  y en el que el campo  $E_1$  se origina por las cargas libres fijadas en el medio. Puede mostrarse que esa fórmula es válida también para un dieléctrico finito si en (18.35) se toma la integración por el volumen del dieléctrico. En este caso:  $E_1$  es la intensidad del campo que existiría en el volumen del dieléctrico si su constante dieléctrica fuese igual a  $e_1$  del medio ambiente;  $E_2$ , la intensidad del campo en el volumen del dieléctrico después de introducirlo en el campo, siendo las cargas que crean el campo fijas. La fórmula (18.35) resulta importante para comprender las fuerzas que actúan sobre los dieléctricos.

De la fórmula (18.35) se desprende una confirmación muy importante: *el aumento de la constante dieléctrica del medio conduce a la disminución de la energía total del campo*. La demostración se lleva a cabo de la siguiente manera. Sea la intensidad del campo inicial  $E_1 = E$  y la constante dieléctrica del medio  $e_1$ . Al aumentar la constante dieléctrica del medio en  $\delta e = e_2 - e_1$ , la intensidad es  $E_2 = E + \delta E$  y, por lo tanto, la variación de la energía se da mediante la fórmula

$$\delta W = -\frac{1}{2} \int \delta e E^2 dV \quad (18.36)$$

(el término  $\delta e \delta E \cdot E$  del orden superior de infinitud se omite). La fórmula (18.36) demuestra la afirmación enunciada.

La energía propia de la carga es la energía de interacción de distintos elementos de la carga entre sí. La energía propia de la carga puntual es infinita.

La energía de interacción de las cargas discretas es la energía total del campo, descontando la energía propia de las cargas. Esta es positiva cuando su energía propia (que siempre es positiva) es inferior a la energía total del campo, y es negativa, cuando supera a la total.

El principio de conservación de la energía para la partícula en un campo potencial que confirma la constancia de la suma de sus energías cinética y potencial, significa que la disminución de la energía cinética de la partícula va acompañada por el correspondiente crecimiento de la energía del campo y viceversa. El aumento de la constante dieléctrica del medio conduce a la disminución de la energía total del campo.



¿Qué es lo que determina la diferencia de los factores en las fórmulas para la energía del dipolo [véase (18.23)] y la energía del cuerpo dieléctrico [véase (18.30)]?

**Ejemplo 18.1.** Hallar la energía, acumulada en un condensador cilíndrico de dos capas en la longitud  $l$ . Los datos sobre el condensador se citan en la fig. 90.

Considerando que en la armadura interior del condensador en la longitud  $l$  se encuentra una carga  $Q$ , y aplicando el teorema de Gauss a la superficie cilíndrica de radio  $r$ , coaxial con el eje del condensador, hallamos para la componente radial de la intensidad del campo la expresión

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{2\pi l \epsilon_1} \frac{Q}{r} & \text{para } r_1 < r < a, \\ \frac{1}{2\pi l \epsilon_2} \frac{Q}{r} & \text{para } a < r < r_2, \\ 0 & \text{para } r_2 < r < \infty. \end{cases}$$

Fig. 90  
Condensador esférico o cilíndrico de dos capas

La energía del campo se encuentra por la fórmula

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dV,$$

que en este caso adquiere la forma

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^l dl \int_{r_1}^a \left( \frac{Q}{2\pi l} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{r^2} 2\pi r \, dr + \frac{1}{2} \int_0^l dl \int_a^{r_2} \left( \frac{Q}{2\pi l} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r \, dr = \\ &= \frac{Q^2}{4\pi l} \left( \frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{a}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_2}{a} \right). \end{aligned}$$

## § 19. Fuerzas en el campo eléctrico

*Se examinan las fuerzas que actúan en el campo eléctrico sobre las cargas, conductores y dieléctricos. Se analiza la aparición de las fuerzas superficiales y volumétricas.*

**Naturaleza de las fuerzas.** Todas las fuerzas que surgen en el campo electrostático son, a fin de cuentas, fuerzas que actúan sobre la carga.

**Fuerza que actúa sobre una carga puntual.** Esta es igual a

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (19.1)$$

**Fuerza que actúa sobre una carga continuamente distribuida.** Esta es igual a

$$d\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} \, dV. \quad (19.2)$$

Por lo tanto, la densidad volumétrica de las fuerzas es

$$\mathbf{f} = \frac{dF}{dV} = \rho E = -\rho \text{ grad } F. \quad (19.3)$$

**Fuerza que actúa sobre el dipolo.** Esta fuerza es igual a la suma de las fuerzas aplicadas a las cargas del dipolo (fig. 91):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{(+)} + \mathbf{F}_{(-)} = q [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})]. \quad (19.4)$$

Aquí  $\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l})$  puede representarse como una serie respecto a  $l_x, l_y, l_z$  y limitarse con los términos lineales:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) + l_x \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial x} + l_y \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial y} + \\ &+ l_z \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial z} + \dots = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (19.5)$$

donde  $(\mathbf{l} \cdot \nabla) = l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z}$ . Teniendo en cuenta (19.5), la fórmula (19.4) adquiere el aspecto

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (19.6)$$

En un campo homogéneo, la fuerza que actúa sobre el dipolo es igual a cero, ya que a las cargas del dipolo se les aplican fuerzas, de igual módulo, pero de dirección contraria.

**Momento de fuerzas que actúa sobre el dipolo.** Las fuerzas, aplicadas a las cargas del dipolo (véase la fig. 91) forman un par de fuerzas, cuyo momento es

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (19.7)$$

**Fuerzas volumétricas que actúan sobre el dieléctrico.** La fuerza que se aplica al elemento del volumen  $dV$  del dieléctrico es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre los dipolos elementales dentro de este volumen. Por eso la fórmula (19.6) toma la forma

$$dP = \sum_{\Delta V} \mathbf{F}_i = \sum_{\Delta V} (\mathbf{p}_i \cdot \nabla) \mathbf{E}_i, \quad (19.8)$$

donde  $\Delta V$  significa que la adición se lleva a cabo por todos los dipolos elementales en el volumen  $\Delta V$ . En el cuadro macroscópico la intensidad  $\mathbf{E}$  se considera una magnitud que varía lentamente. Por esta razón, en la suma de (19.8)  $\mathbf{E}_i$  puede sustituirse por la intensidad  $\mathbf{E}$ , igual para todos los términos de la suma. Entonces la adición en (19.8) se reduce al cálculo de

$$\sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i = \mathbf{P} \Delta V. \quad (19.9)$$

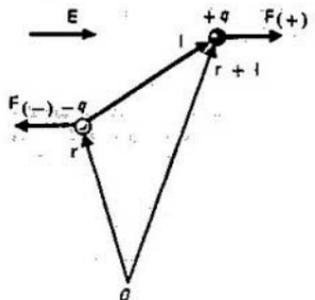


Fig. 91  
Fuerza y momento de fuerzas que actúan sobre el dipolo

Por eso para la densidad volumétrica de la fuerza que actúa en el dieléctrico de (19.8) obtenemos

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{\Delta V} = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (19.10)$$

Tomemos en consideración que  $\mathbf{P} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}$ , y utilicemos la identidad, conocida del análisis vectorial,

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} = 1/2 \text{ grad } E^2 - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}, \quad (19.11)$$

en la cual  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ , ya que el campo electrostático es potencial. Entonces [véase (19.10)]

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2} \text{ grad } E^2. \quad (19.12)$$

*Esta fórmula es válida tanto para los dieléctricos absolutamente rígidos, como para los comprimidos a condición de que su polarización depende linealmente de la densidad de la masa o, con otras palabras, a condición de que los momentos dipolares de las moléculas y átomos individuales no varían, al comprimirse y dilatarse el elemento del volumen, mientras que los momentos dipolares, determinados por el desplazamiento de los iones, o están ausentes, o su aportación en la polarización puede considerarse insignificante. Estas condiciones se realizan en los gases y, en la mayoría de los casos, en los líquidos.*

Esta fórmula es muy evidente, ya que muestra que sobre los volúmenes elementales del dieléctrico actúan fuerzas que tienden a desplazar estos volúmenes en dirección de la velocidad máxima del aumento del módulo de intensidad del campo eléctrico. A veces eso se expresa en forma de una confirmación de que el elemento de volumen del dieléctrico se arrastra en dirección del aumento del módulo de intensidad.

La fórmula para la densidad volumétrica de las fuerzas, válida para los dieléctricos isótropos comprimidos, tiene el aspecto [véase (19.41)]

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{ grad } \varepsilon + \frac{1}{2} \text{ grad } \left[ \rho_m \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right)_T E^2 \right], \quad (19.13)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de la masa del dieléctrico. Esta fórmula es válida cuando  $\varepsilon \neq \text{const}$ . Si  $\mathbf{P}$  es función lineal de  $\rho_m$ ,  $\varepsilon = D/E = \varepsilon_{0+1} P/E$ ,  $P \sim \rho_m$ , de donde  $\rho_m (\partial \varepsilon / \partial \rho_m) = \varepsilon - \varepsilon_0$  y la fórmula (19.13) pasa a (19.12). Si dentro del dieléctrico hay cargas libres y presión hidrostática, en (19.13) se añade la densidad volumétrica  $\rho \mathbf{E}$  de las fuerzas que actúan sobre las cargas libres, y la presión hidrostática.

Apliquemos estas fórmulas para determinar las fuerzas que actúan sobre una esfera dieléctrica en un campo homogéneo (véase la fig. 88). Para poder utilizar la fórmula (19.12) es necesario considerar que el paso de la zona exterior con la constante dieléctrica  $\varepsilon_2$  a la interior con la constante dieléctrica  $\varepsilon_1$  se efectúa en la superficie de la esfera no a salto, sino continuamente en una capa

esférica fina. En esta capa la intensidad  $E$  varía continuamente desde su valor fuera de la esfera hasta el valor dentro de la esfera. En cada uno de los puntos de la capa esférica, para calcular la fuerza puede hacerse uso de la fórmula (19.12).

Para  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  la intensidad del campo dentro de la esfera es inferior a la de fuera de la esfera. Por eso la fuerza en cada punto de la capa está dirigida hacia la parte exterior de la esfera. Como consecuencia de la simetría, las resultantes de estas fuerzas por diferentes partes de la esfera tienden a estirar la esfera por la línea de la intensidad del campo exterior (véase la fig. 88, a), no obstante, la resultante de todas las fuerzas es nula y la esfera como todo entero permanece en reposo. Para  $\epsilon_1 < \epsilon_2$  las fuerzas en la capa esférica transitoria están orientadas hacia dentro de la esfera y sus resultantes por las diferentes partes de la esfera tienden a aplastarla por la línea de la intensidad del campo exterior. La resultante que actúa sobre la esfera en total es, lo mismo que antes, nula (fig. 88, b).

En cambio, si el campo exterior es heterogéneo, la resultante que actúa sobre la esfera en total no es igual a cero. Es fácil ver que para  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  ella está dirigida hacia el aumento de la intensidad del campo en el medio. Ello explica el hecho de que los objetos dieléctricos ligeros se atraen a los cuerpos electrizados, ya que para el aire  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  y la condición  $\epsilon_1 > \epsilon_0$  siempre se observa. Pero si  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , la resultante está dirigida en sentido contrario, es decir, hacia la disminución de la intensidad del campo en el medio. Por eso en un medio que posee una constante dieléctrica suficientemente grande los objetos dieléctricos con menor constante dieléctrica se repelen de los cuerpos electrizados.

Al investigar el comportamiento de la intensidad del campo eléctrico en la superficie de separación de dos dieléctricos (véanse las figs. 84 y 85) se notó que  $E^2$  siempre aumenta hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica. Por esta razón, con ayuda de razonamientos, análogos a los utilizados para la esfera dieléctrica, de la fórmula (19.12) llegamos a la conclusión de que en la superficie de separación sin carga de dos dieléctricos la fuerza está siempre orientada hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica. Lo dicho explica muchos fenómenos. Por ejemplo, los cuerpos dieléctricos, pedacitos de papel, etc. se atraen a la carga. Claro está que en cualesquiera partes de la superficie del cuerpo, del pedazo de papel, etc. las fuerzas están dirigidas hacia la parte exterior, no obstante, estas fuerzas son mayores en las partes de la superficie que se encuentran más cerca de la carga. Como resultado, surge una fuerza sumaria de atracción (fig. 92).

Semejante comportamiento de los dieléctricos puede comprenderse, partiendo de la expresión (18.35) para la energía del dieléctrico con la constante dieléctrica  $\epsilon_2$  que se encuentra en un medio, cuya constante dieléctrica es  $\epsilon_1$ . Es obvio que para  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  esta energía es negativa. Ella disminuye a causa del aumento de  $\epsilon_2$  y  $E_1$  y la disminución de  $\epsilon_1$ . Puesto que el sistema tiende al mínimo de energía, para  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  el cuerpo se arrastrará a las zonas de mayor intensidad del campo o menor constante dieléctrica  $\epsilon_1$ . Pero si  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ , el dieléctrico con  $\epsilon_2$  se expulsará de la zona con mayor intensidad a la que posee menor intensidad.

Supongamos que el cuerpo dieléctrico en forma de un elipsoide alargado se coloca en el campo mostrado en la fig. 93. Ya que en todos los puntos de la superficie del elipsoide las fuerzas que actúan hacia la parte exterior, son mayores allí donde es mayor el gradiente del cuadrado de la intensidad, surge un momento de fuerzas que tiende a poner el elipsoide con su eje mayor a lo largo de las líneas de fuerza. Eso queda sobre todo claro si se recuerda que todas las partes del dieléctrico se arrastran a la zona de mayor intensidad.

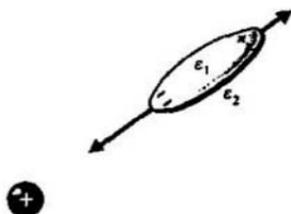


Fig. 92  
Mecanismo de aparición de la fuerza de atracción por parte de la carga sobre los cuerpos dieléctricos neutros



Fig. 93  
Cuerpo dieléctrico en forma de un elipsoide alargado, cuyo eje mayor se encuentra a lo largo del campo

Si la constante dieléctrica del cuerpo es inferior a la del medio, las fuerzas en la capa superficial del cuerpo se dirigen hacia la parte exterior. Por eso la dirección de la resultante varía. Los cuerpos dieléctricos, los pedacitos de papel, etc. en vez de atraerse hacia el cuerpo electrizado, se repelen. La fig. 94 muestra el cuadro de las fuerzas para el caso mencionado. El elipsoide dieléctrico alargado en un medio, cuya constante dieléctrica supera la del elipsoide, se sitúa con su eje mayor no en dirección de las líneas de fuerza, sino que perpendicularmente a su orientación (fig. 95). Entonces, las partes del dieléctrico se expulsan de la zona con mayor intensidad a las zonas con menor intensidad.

Fuerzas que actúan sobre un conductor. Sobre la carga  $dq = \sigma dS$  que se encuentra en el elemento superficial  $dS$  del conductor actúa sólo la mitad de la intensidad del campo que existe en la superficie del conductor, ya que la otra mitad se crea por la propia carga del elemento superficial, por lo que no puede influenciar sobre él (véase el § 16, fig. 39). Como consecuencia, la densidad superficial de la fuerza es

$$f_{\text{sup}} = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma F}{2} \frac{\sigma^2}{2\epsilon} n. \quad (19.14)$$

donde  $n$  es el versor de la normal exterior a la superficie del conductor y  $\epsilon$ , la constante dieléctrica del medio, con el que limita el conductor [véase (17.28)]. Así pues, sobre la superficie del conductor la fuerza siempre actúa en dirección de la normal exterior y como si tendiera a aumentar su volumen.

La resultante que actúa sobre el conductor en total [véase (18.24)], es igual a

$$F = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\epsilon} \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{\sigma^2}{\epsilon} dS, \quad (19.15)$$

donde  $S$  es la superficie del conductor.

La expresión (19.15) permite calcular inmediatamente la fuerza, correspondiente a la sección de área  $S$  de la armadura de un condensador plano lleno de dieléctrico:

$$F = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} S, \quad (19.16)$$

ya que en este caso el campo es homogéneo, es decir,  $\sigma$  y  $\epsilon$  en el integrando (19.15) son constantes. Dicha fuerza está dirigida hacia el condensador.

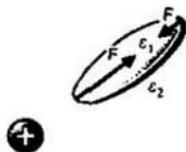


Fig. 94  
Mecanismo de aparición de la fuerza de repulsión por parte de la carga sobre un cuerpo dieléctrico neutro, colocado en un medio dieléctrico, cuya constante dieléctrica supera la del cuerpo



Fig. 95  
Elipsoide alargado en un medio, cuya constante dieléctrica es mayor que la de él. Se sitúa con su eje mayor transversalmente al campo

**Fuerzas superficiales que actúan sobre un dieléctrico.** Las fuerzas volumétricas de origen electrostático en estado de equilibrio no ponen en movimiento los elementos correspondientes del volumen. *Ellas provocan la deformación del medio, como consecuencia de la cual surgen fuerzas volumétricas de elasticidad que equilibran totalmente las fuerzas electrostáticas volumétricas.* Semejante equilibrio aparece en el volumen de un líquido que se encuentra en el campo de gravedad. Sobre cada elemento del volumen actúa la fuerza de gravedad del líquido que se encuentra en el elemento de volumen, pero ella se equilibra por la fuerza que surge debido a la presión de las secciones vecinas del líquido sobre la superficie del elemento de volumen. Las fuerzas eléctricas volumétricas ponen en movimiento los volúmenes elementales sólo en el caso de variaciones suficientemente rápidas de los campos cuando las fuerzas elásticas no compensan las fuerzas eléctricas en cada momento de tiempo. La resultante de todas las fuerzas volumétricas está aplicada al dieléctrico en total y puede provocar su movimiento sólo si no se equilibra por cualquier otra fuerza.

A la par con las fuerzas volumétricas, los dieléctricos poseen también *fuerzas superficiales que surgen en la capa superficial del dieléctrico.* Actúan jun-

to con las fuerzas volumétricas. Durante su deducción partiremos del primer principio de la termodinámica.

En los procesos isotérmicos en calidad de potencial termodinámico sirve la energía libre  $F$ , relacionada con el trabajo mediante la expresión

$$dA = -dF. \quad (19.17)$$

Puesto que las relaciones termodinámicas, al no haber campo eléctrico, fueron estudiadas en la física molecular, nos limitaremos sólo a tener en cuenta las magnitudes que dependen del campo eléctrico. Por esta razón, en (19.17) se examinan sólo el trabajo y el cambio de la energía libre, determinados por el campo eléctrico. El trabajo y el cambio de la energía libre, determinados por

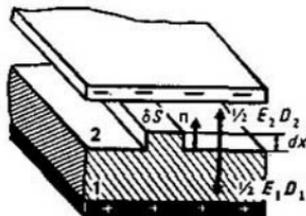


Fig. 96  
Aparición de las tensiones de Maxwell

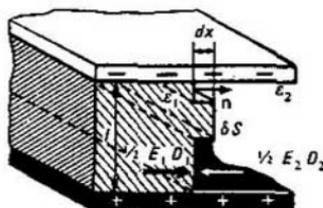


Fig. 97  
Aparición de las presiones de Maxwell

las deformaciones y las fuerzas de elasticidad, no los tomaremos en consideración, o sea, consideraremos que el dieléctrico no puede deformarse. Además, nos limitaremos a estudiar los dieléctricos isotrópicos.

La parte de la energía interna que no está enlazada en el sistema y es accesible para obtener trabajo, es la energía libre. Su valor depende de las condiciones de existencia del proceso.

Examinemos una superficie de separación plana entre los dieléctricos con constantes dieléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . A título de modelo concreto de un sistema físico puede cogerse un condensador plano, cuyo espacio entre las armaduras está lleno con dieléctrico líquido con superficie de separación plana. Esta última puede pasar bien paralelamente a las armaduras, o bien perpendicularmente a ellas. Con ayuda de este modelo pueden obtenerse las expresiones para la densidad superficial de las fuerzas que actúan en la superficie de separación de los dieléctricos. Ya que las relaciones que se obtendrán tienen carácter local, no dependen de la forma concreta del modelo no local, en los márgenes del cual se han obtenido, es decir, su carácter es general.

Estudiemos una superficie de separación plana, paralela a las armaduras del condensador (fig. 96). La intensidad  $E$  del campo es perpendicular a la superficie de separación. En calidad de normal positiva elijamos la que está orientada al segundo dieléctrico. Siendo el desplazamiento de la frontera infinitamente pequeño, el trabajo se realiza a cuenta de la variación de la energía libre.

Después de calcular independientemente el trabajo y la variación de la energía libre, hallamos de (19.17) la densidad superficial de las fuerzas. Claro está que el desplazamiento  $dx$  debe ser considerado como virtual, es decir, que en realidad no tiene que efectuarse obligatoriamente.

El trabajo para desplazar el elemento superficial  $\Delta S$  a  $dx$  por la normal es

$$dA = \Delta S f_{\text{sup}} dx, \quad (19.18)$$

donde  $f_{\text{sup}}$  es la densidad superficial de la fuerza.

Al calcular  $dF$  tenemos en cuenta que en la superficie de separación de los dieléctricos  $D_2 = D_1$  o sea, el desplazamiento de la frontera transcurre para  $D = \text{const.}$  Esto corresponde a la condición de constancia de la carga en las armaduras del condensador ya que  $D = \sigma$ . Por lo tanto, es necesario calcular  $dF$  para la carga constante  $q$  de las armaduras, es decir,  $(dF)_{T,q}$ . Al desplazar la frontera a  $dx$  el volumen  $\Delta S dx$ , llenado inicialmente por la energía eléctrica de densidad  $E_2 D_2 / 2$ , quedará lleno de energía con una densidad  $E_1 D_1 / 2$ . No existen otros factores energéticos que participen en el proceso de realización del trabajo. Como consecuencia, la diferencia de energías en el volumen  $\Delta S dx$  después de desplazarse la frontera y antes de su desplazamiento constituye precisamente la variación de la energía libre:

$$(dF)_{T,q} = \left( \frac{1}{2} D_{1n} E_{1n} - \frac{1}{2} D_{2n} E_{2n} \right) \Delta S dx, \quad (19.19)$$

donde el índice  $n$  significa que se examinan las componentes normales de  $D$  y  $E$ .

Teniendo en cuenta (19.18) y (19.19), la relación (19.17) adquiere la forma

$$f_{\text{sup}} = 1/2 E_{2n} D_{2n} - 1/2 E_{1n} D_{1n}. \quad (19.20)$$

La densidad superficial de la fuerza está orientada por la normal a la superficie de separación. De (19.20) se ve que la densidad superficial de la fuerza  $f_{\text{sup}}$  se compone de dos partes:

1) la densidad superficial de la fuerza

$$f_{2\text{sup}} = 1/2 E_{2n} D_{2n}, \quad (19.21)$$

que surge bajo la influencia del campo eléctrico del segundo medio y está dirigida hacia el segundo medio;

2) la densidad superficial de la fuerza

$$f_{1\text{sup}} = -1/2 E_{1n} D_{1n}, \quad (19.22)$$

que surge bajo la influencia del campo eléctrico del primer medio y está orientada hacia este medio.

Así pues, en el caso dado los campos eléctricos que se encuentran por distintas partes de la superficie de separación, como si atrajesen hacia sí la superficie de separación con densidad superficial de la fuerza, igual a la densidad volumétrica de la energía eléctrica, correspondiente a la componente normal de la intensidad del campo.

La resultante de dos fuerzas, aplicadas a la superficie de separación por distintas partes de la frontera de los campos es una fuerza total que actúa sobre la superficie de separación. Ya que  $D_{2n} = D_{1n} = D_n$ , [véase (19.20)]

$$f_{\text{sup}} = \frac{1}{2} D_n^2 \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right). \quad (19.23)$$

Para  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  la densidad superficial de la fuerza  $f_{\text{sup}} > 0$ . Esto significa que la fuerza actúa sobre la superficie de separación hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica, es decir, en dirección de la mayor densidad volumétrica de la energía eléctrica. Señalemos que la densidad volumétrica de la fuerza [véase (19.12)] está también orientada hacia el aumento de la densidad volumétrica de la energía eléctrica.

Ahora examinemos los dieléctricos, cuya superficie de separación plana es perpendicular a las armaduras del condensador plano (fig. 97). En este caso en la superficie de separación se observa la condición  $E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_\tau$  ya que la intensidad del campo está dirigida paralelamente a la frontera. El índice  $\tau$  significa las componentes tangenciales de los vectores respecto a la superficie de separación. El desplazamiento de la frontera transcurre para la condición  $E_\tau = \text{const}$ , es decir, para una diferencia de potencial constante. Por lo tanto, es necesario calcular la variación de la energía libre ( $dF_{\text{v},\varphi}$ ). Para mantener constante la diferencia de potencial es indispensable cambiar la densidad de las cargas en la parte de las armaduras del condensador que corresponde al desplazamiento de la superficie de separación a  $dx$ . Por eso se gasta una energía de desplazamiento de la carga, igual a  $dq(\varphi_2 - \varphi_1) = dqE_\tau l$ , donde  $E_\tau$  y  $l$  son la intensidad del campo y la distancia entre las armaduras del condensador, respectivamente. Las densidades superficiales de la carga en la zona de contacto entre las armaduras y los dieléctricos primero y segundo, son iguales, respectivamente, a  $\sigma_1 = \epsilon_1 E_\tau = \epsilon_1 E_\tau$  y  $\sigma_2 = \epsilon_2 E_\tau$ . La profundidad del dieléctrico en dirección perpendicular al plano de la fig. 97, es  $\Delta S/l$ . Por lo tanto,

$$dq = (\sigma_1 - \sigma_2) (\Delta S/l) dx. \quad (19.24)$$

Para las condiciones dadas sólo la diferencia entre la energía del campo y la energía que se gasta para mantener la constancia de los potenciales, es accesible para producir trabajo. Por eso la variación de la energía libre es

$$(dF)_{\tau,\varphi} = (1/2 E_{1\tau} D_{1\tau} - 1/2 E_{2\tau} D_{2\tau}) \Delta S dx - (\sigma_2 - \sigma_1) (\Delta S/l) dx E_\tau l. \quad (19.25)$$

Puesto que  $\sigma_2 = \epsilon_2 E_\tau$  y  $\sigma_1 = \epsilon_1 E_\tau$ ,

$$(dF)_{\tau,\varphi} = - (1/2 E_{1\tau} D_{1\tau} - 1/2 E_{2\tau} D_{2\tau}) \Delta S dx. \quad (19.26)$$

Teniendo en cuenta (19.18) y (19.26), la relación (19.17) adquiere la forma

$$f_{\text{sup}} = - 1/2 E_{2\tau} D_{2\tau} + 1/2 E_{1\tau} D_{1\tau}. \quad (19.27)$$

Esta densidad superficial de la fuerza está también orientada por la normal a la superficie de separación. De (19.27) se ve que ella se compone de dos partes:

1) de la densidad superficial de la fuerza

$$f_{2sup} = -\frac{1}{2}E_{2\tau}D_{2\tau}, \quad (19.28)$$

que actúa sobre la superficie de separación en dirección del primer medio por parte del campo eléctrico del segundo medio. Recordemos que la normal positiva se elige del primer medio al segundo y, por lo tanto, el signo menos en (19.28) testimonia la orientación de la fuerza del segundo medio al primero;

2) de la densidad de la fuerza

$$f_{1sup} = \frac{1}{2}E_{1\tau}D_{1\tau}, \quad (19.29)$$

que actúa sobre la superficie de separación en dirección de la normal positiva por parte del campo eléctrico del primer medio.

De esta manera, a cuenta de la componente tangencial de la intensidad el campo eléctrico como si ejerciera presión sobre la superficie de separación que limita con él, con la particularidad de que la presión es igual a la densidad volumétrica de la energía correspondiente a la componente tangencial de la intensidad del campo.

La resultante de las fuerzas de presión, aplicadas a la superficie de separación por parte de los campos por diferentes lados de la frontera, es la fuerza total aplicada a la frontera. Dado que  $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_{\tau}$ , la fórmula (19.27) adquiere la forma

$$f_{sup} = \frac{1}{2}E_{\tau}^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (19.30)$$

Para  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  la densidad de la fuerza  $f_{sup} > 0$ . Por lo tanto, la densidad superficial de la fuerza está dirigida hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica. De esta manera, independientemente de la orientación del campo respecto a la superficie de separación, la densidad superficial de la fuerza está siempre dirigida hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica [véase (19.21)]. La validez y generalidad de dicha confirmación se desprenden también de la igualdad (18.36) si se tiene en cuenta que el sistema tiende a pasar al estado con energía mínima.

Fuerzas volumétricas que actúan sobre un dieléctrico comprimido. Partimos de la fórmula (18.36) en la que  $\delta z$  se determina por la deformación que cambia la densidad de la masa. Los procesos se suponen isotérmicos ( $T = \text{const}$ ). La constante dieléctrica varía de un punto a otro, siendo función de  $r$ ,  $y$ , además, puede depender de la densidad  $\rho_m$  de la masa del dieléctrico, o sea,  $\epsilon = \epsilon(r, \rho_m)$ . Supongamos que al deformarse, el elemento del volumen  $dV$  se desplaza a  $l$  y en este caso transcurre un cambio de la densidad de la masa del dieléctrico. El elemento de volumen que después del desplazamiento se encuentra en el punto con el radio vector  $r$ , antes del desplazamiento se hallaba en el punto  $r - l$ . Por lo tanto,

$$dz = -l \text{ grad } \epsilon + \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \delta \rho_m, \quad (19.31)$$

donde  $\delta \rho_m$  es la variación de la densidad de la masa del dieléctrico.

Puede mostrarse que el elemento de volumen  $dV'$  después de deformarse, es igual a

$$dV = (1 + \operatorname{div} \mathbf{l}) dV'. \quad (19.32)$$

El principio de conservación de la masa para el elemento de volumen tiene la forma

$$\rho_m dV = \rho'_m dV' \quad (19.33)$$

o bien

$$\rho_m (1 + \operatorname{div} \mathbf{l}) dV = \rho'_m dV', \quad (19.34)$$

donde  $\rho_m$  y  $\rho'_m$  son las densidades de la masa después de la deformación y antes de ella, respectivamente. De (19.34) se desprende que para un desplazamiento infinitamente pequeño

$$\delta\rho_m = \rho_m - \rho'_m = -\rho_m \operatorname{div} \mathbf{l}. \quad (19.35)$$

Poniendo (19.31) y (19.35) en (18.36), hallamos

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [E^2 \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} \epsilon + E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l}] dV. \quad (19.36)$$

Según la fórmula (A.12), tenemos

$$E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \operatorname{div} \mathbf{l} = \operatorname{div} (E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l}) - \mathbf{l} \cdot \operatorname{grad} (E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m}). \quad (19.37)$$

Entonces [véase (19.36)]

$$\delta W = \frac{1}{2} \int [F^2 \operatorname{grad} \epsilon - \operatorname{grad} (E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m}) \cdot \mathbf{l}] dV + \frac{1}{2} \int \operatorname{div} (E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l}) dV. \quad (19.38)$$

Haciendo las suposiciones generales acerca de la continuidad de los integrales, la segunda de las integrales puede transformarse por el teorema de Gauss—Ostrogradski en la integral respecto a la superficie que limita el volumen en cuestión. Considerando, para simplificar los razonamientos, que el dieléctrico ocupa todo el espacio y las cargas que engendran el campo están distribuidas en una zona finita del espacio, nos cercioramos de que la segunda integral es nula, ya que  $E^2 \sim 1/r^4$ , donde  $r$  es la distancia de la carga a la superficie de integración y, por eso

$$\int \operatorname{div} (E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l}) dV = \int_{S \rightarrow \infty} E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \mathbf{l} \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0. \quad (19.39)$$

La densidad volumétrica de las fuerzas  $\mathbf{f}$  describe la acción del campo eléctrico sobre el dieléctrico. La densidad volumétrica del trabajo que ejecuta esta misma fuerza durante la deformación es igual a  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{l}$ . Por eso el principio de conservación de la energía durante la deformación, teniendo en cuenta (19.38) y (19.39), tiene la forma

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{l} dV = -\frac{1}{2} \int [E^2 \operatorname{grad} \epsilon - \operatorname{grad} (E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m})] \cdot \mathbf{l} dV. \quad (19.40)$$

Puesto que la igualdad (19.40) es válida para los desplazamientos arbitrarios  $\mathbf{l}$ ,

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \varepsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left( E^2 \rho_m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} \right). \quad (19.41)$$

Esta fórmula es válida para los dieléctricos isotrópicos comprimidos para la dependencia arbitraria de  $\varepsilon$  respecto a la densidad de la masa  $\rho_m$  [véase (19.13)].

Si la polarización depende linealmente de la densidad volumétrica de la masa,

$$\rho_m = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_m} = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad (19.42)$$

y (19.41) se transforma en (19.12). Por lo tanto, la fórmula (19.12) es válida no sólo para los dieléctricos rígidos, sino que también para los comprimidos con  $P \sim \rho_m$ .

A pesar de que para facilitar los razonamientos durante las transformaciones de (19.39) la fórmula (19.41) fue deducida suponiendo que el dieléctrico ocupa todo el espacio, es válida siempre, ya que es una relación diferencial, cuya veracidad no puede depender de lo que ocurre en otros puntos del espacio.

Cálculo de las fuerzas, partiendo de la expresión para la energía. Para transportar una carga  $dq$  al punto con potencial  $\varphi$  es necesario realizar un trabajo  $\varphi dq$ . Por eso la variación total de la energía del sistema de cargas al cambiar la carga en  $dq_i$ , es igual a

$$\sum_j \varphi_j dq_j. \quad (19.43)$$

Esta variación va acompañada del cambio de la energía del campo eléctrico, en  $dW$  y de la realización de trabajo por las cargas. Si la configuración del sistema se caracteriza por los parámetros  $\xi_i$ , según la definición, se llama fuerza generalizada, relacionada con ese parámetro, a la magnitud  $F_i$ , tal que  $F_i d\xi_i$  es el trabajo que efectúa el sistema al cambiar el parámetro  $\xi_i$  en  $d\xi_i$ . El principio de conservación de la energía tiene la forma

$$\sum_j \varphi_j dq_j = dW + \sum_i F_i d\xi_i. \quad (19.44)$$

Examinemos ante todo los procesos virtuales, en los que las cargas conservan los valores constantes, es decir,  $dq_i = 0$ . En este caso la ecuación (19.44) adquiere el aspecto

$$0 = (dW)_q + \sum_i F_i d\xi_i. \quad (19.45a)$$

Aquí  $(dW)_q$  depende sólo de  $\xi_i$  y por eso

$$(dW)_q = \sum_i \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_q d\xi_i. \quad (19.45b)$$

La comparación de (19.45a) y (19.45b), tomando en consideración la independencia de  $d\xi_i$ , conduce a la igualdad

$$F_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_q, \quad (10.46)$$

donde el índice  $q$  de la derivada parcial en forma explícita muestra que la fuerza se calcula para cargas constantes. *Para utilizar esta fórmula la energía  $W$  debe expresarse en forma de una función respecto a las cargas y los parámetros  $\xi_i$ .*

También puede expresarse la fuerza generalizada por medio de la derivada con potencial continuo. Para eso tomamos en consideración la expresión

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i. \quad (19.47)$$

La variación de la energía siendo los potenciales continuos es

$$(dW)_\varphi = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i dq_i, \quad (19.48)$$

por eso véase (19.45a)

$$0 = (dW)_\varphi - \sum_i F_i d\xi_i. \quad (19.49)$$

Teniendo en cuenta la independencia de  $d\xi_i$ , obtenemos

$$F_i = \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_\varphi, \quad (19.50)$$

donde el índice  $\varphi$  de la derivada parcial en forma explícita muestra que ésta se calcula para potenciales continuos. *Para hacer uso de esta fórmula la energía  $W$  debe ser expresada en forma de función de los potenciales  $\varphi_i$  y los parámetros  $\xi_i$ .* Es obvio que las fórmulas (19.46) y (19.50) son equivalentes y se obtienen la una de la otra. Cuál de ellas será necesaria, depende de las circunstancias.

Por ejemplo, supongamos que se requiera calcular la fuerza con que se atraen mutuamente las placas de un condensador plano. La energía del condensado plano es

$$W = Q^2/(2C) = (\Delta\varphi)^2 C/2,$$

donde  $C = \epsilon_0 S/x$ ;  $S$  y  $x$  son el área de la armadura del condensador y la distancia entre las armaduras, respectivamente.

El cálculo de la fuerza por las fórmulas (19.46) y (19.50) nos da:

$$F_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{2C} \right)_Q = - \frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{C} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x}; \quad (19.51)$$

$$F'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(\Delta\varphi)^2 C}{2} \right]_\varphi = \frac{(\Delta\varphi)^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (19.52)$$

Tomando en consideración la definición de la capacidad  $C = Q/\Delta\phi$ , sacamos la conclusión de que  $F'_x = F_x$ .

A fin de cuentas las fuerzas en un campo eléctrico son fuerzas que actúan sobre las cargas, a pesar de que no siempre en la expresión para la fuerza figura el valor de las cargas.

La fórmula para la fuerza que actúa sobre dieléctricos absolutamente rígidos, es también válida para los dieléctricos a comprimir a condición de que su polarización dependa linealmente de la densidad de la masa.

Las fuerzas que actúan sobre el dieléctrico dependen de la relación entre la constante dieléctrica del cuerpo y la constante dieléctrica del medio ambiente. En la superficie de separación de los dieléctricos la fuerza siempre está orientada hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica.

La componente del campo, normal a la superficie de separación de los dieléctricos, como si atrayese hacia sí la superficie con la densidad superficial de la fuerza, igual a la densidad volumétrica de la energía eléctrica del campo, relacionada con esta componente.

La componente del campo, tangencial a la superficie de separación de los dieléctricos, como si presionase sobre la superficie, con la particularidad de que la presión es igual a la densidad volumétrica de la energía eléctrica del campo, relacionada con esta componente.

Independientemente de la orientación del campo, la fuerza superficial actúa siempre hacia el dieléctrico con menor constante dieléctrica.

*Ejemplo 19.1. Partiendo de los resultados de la solución del ejemplo 16.3, hallar el momento de fuerza que acerca las placas del condensador, mostrado en la fig. 73.*

La energía del condensador [véase (16.109)] es igual a

$$W = \frac{U_0^2 C}{2} = \frac{U_0^2 \epsilon_0 \ln(b/a)}{2\alpha_0} \quad (19.53)$$

La fuerza generalizada para el ángulo de giro es el momento de fuerza  $M$  con respecto al eje que coincide en este caso con la línea de intersección de las placas del condensador. Por eso teniendo en cuenta (19.50), obtenemos

$$M = \left( \frac{\partial W}{\partial \alpha_0} \right)_{\alpha} = - \frac{U_0^2 \epsilon_0 \ln(b/a)}{2\alpha_0^2} \quad (19.54)$$

donde el signo menos significa que el momento de fuerzas tiende a disminuir el ángulo  $\alpha_0$ . Con otras palabras, entre las placas de condensador actúan fuerzas de atracción. Claro que entre las placas de condensador siempre existen fuerzas de atracción y el resultado de (19.54) sólo confirma que el momento de fuerzas se obtuvo con signo negativo. Semejante verificación de que el resultado es correcto es útil al hacer uso de las coordenadas generalizadas y las fuerzas generalizadas cuando estas variables no tienen una interpretación bastante evidente.

Obtenemos este mismo resultado aplicando otro método. La densidad superficial de la fuerza que actúa sobre el conductor es igual a  $f = \sigma^2/(2\epsilon)$ . Por eso sobre una capa de longitud  $l$  entre  $r$  y  $r + dr$  actúa una fuerza

$$dF = -f l dr = - \frac{eU_0^2}{2\alpha_0^2 r^2} l dr, \quad (19.55)$$

donde para  $\sigma$  se utilizó el valor de (16.107b). El signo menos tiene en cuenta que esta fuerza tiende a disminuir el ángulo  $\alpha_0$ . La resultante que actúa sobre la placa es

$$F = \int_a^b dF = - \frac{eU_0^2 l}{2\alpha_0^2} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{eU_0^2 l}{2\alpha_0^2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad (19.56)$$

La línea de aplicación de las fuerzas se encuentra del eje de rotación a la distancia  $r_0$ , que se determina por la condición

$$r_0 F = \int_a^b r dF = - \frac{eU_0^2 l}{2\alpha_0^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (19.57)$$

de donde

$$r_0 = \frac{ab}{b-a} \ln \frac{b}{a}. \quad (19.58)$$

El momento de fuerza respecto al eje de rotación es

$$M = r_0 F = -\frac{\epsilon U \bar{M}}{2\alpha \bar{\epsilon}} \ln \frac{b}{a}, \quad (19.59)$$

lo que coincide con (19.54).

## Problemas

- Hallar la intensidad del campo eléctrico en una cavidad esférica de radio  $a$  dentro de una esfera con carga uniforme de radio  $R$ . La densidad volumétrica de la carga es  $\rho$  (fig. 98).
- Hallar la intensidad del campo en una cavidad cilíndrica circular ilimitada, cuyo eje es paralelo al eje de un cilindro circular infinitamente largo con carga uniforme. La densidad volumétrica de la carga es  $\rho$  (fig. 98).

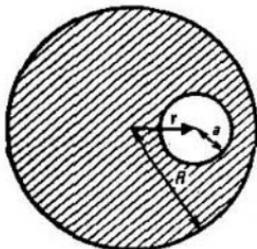


Fig. 98  
Cavidad cilíndrica en un cilindro o cavidad esférica en una esfera

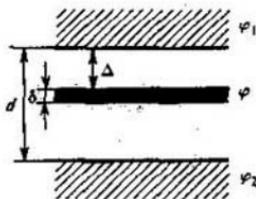


Fig. 99  
Placa conductora en un condensador plano

- La distancia entre las placas de un condensador plano es  $d$ . En el espacio entre las armaduras del condensador se introduce una placa metálica de grosor  $\delta$ , cuya superficie es paralela a las armaduras. Las placas del condensador poseen potenciales  $\phi_1$  y  $\phi_2$  (fig. 99). Hallar el potencial de la placa metálica.
- Definir la fuerza que actúa sobre la carga  $q$ , situada a la distancia  $d$  respecto al centro de una esfera conductora aislada sin carga de radio  $r_0$  ( $d > r_0$ ).
- Hallar la fuerza que actúa sobre la carga  $q$ , colocada dentro de una esfera metálica a la distancia  $r$  de su centro. El radio de la esfera es  $a$ .
- Hay dos esferas conductoras concéntricas de radios  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ). Entre las esferas a la distancia  $d$  de su centro común ( $r_1 < d < r_2$ ) se coloca una carga puntual  $q$ . Determinar las cargas inducidas en las esferas.
- Una carga puntual  $q$  se coloca a la distancia  $d$  del centro de una esfera puesta a tierra. Determinar la relación  $f$  entre la carga, inducida en la parte de la esfera, que se ve desde el punto en que está la carga  $q$ , y la carga de la parte invisible de la esfera. El radio de la esfera es  $a$ ,  $d > a$ .
- Dos condensadores de capacidades  $C_1$  y  $C_2$  y con cargas  $q_1$  y  $q_2$  ( $q_1$  y  $q_2$  son los valores absolutos de las cargas de las placas de los condensadores (primero y segundo) están

- acoplados en paralelo. Calcular la variación de la energía de los condensadores y explicar el resultado obtenido.
- 2.9. La constante dieléctrica del medio entre las placas de un condensador plano de área  $S$  varía uniformemente de  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$ . La distancia entre las placas es igual a  $d$ . Determinar la capacidad del condensador.
- 2.10. Un condensador cilíndrico con radios de las placas  $r_1$  y  $r_2$  se sumerge perpendicularmente en un líquido dieléctrico, cuya constante dieléctrica es  $\epsilon$ . El extremo inferior del condensador se encuentra en el líquido y el superior, en el aire, cuya constante dieléctrica es  $\epsilon_0$ . La densidad de la masa del líquido es  $\rho$ . Determinar la altura  $h$  a que se eleva el líquido entre las placas del condensador si la diferencia de potencial entre ellas es  $U$ .
- 2.11. Una esfera conductora, cuya densidad es  $\rho_1$ , está flotando en un líquido con densidad  $\rho_2$  ( $\rho_2 > 2\rho_1$ ) y constante dieléctrica  $\epsilon$ . Menos de la mitad de la esfera se sumerge en el líquido. ¿Qué carga es necesario comunicarle para que la esfera se hunda en el líquido hasta la mitad? El radio de la esfera es  $a$ .
- 2.12. Las armaduras de un condensador plano tienen la forma de un cuadrado con el lado igual a  $a$ . La distancia y la diferencia de potencial entre las placas son  $d$  y  $U$ , respectivamente. En el espacio entre las armaduras se introduce parcialmente una placa de grosor  $\Delta$  en forma de cuadrado con el lado  $a$ . Sus superficies y lados son paralelos a las superficies y lados de las armaduras y la constante dieléctrica es  $\epsilon$ . Hallar la fuerza con que la placa se arrastra al espacio entre las armaduras del condensador.
- 2.13. A la distancia  $d$  del eje de un cilindro conductor ilimitado de radio  $r$  se encuentra un hilo infinito con carga uniforme, paralelo al eje del cilindro. La densidad lineal de la carga es  $\tau$ . Determinar la fuerza que actúa sobre la longitud  $l$  del hilo ( $d > r$ ).
- 2.14. Aplicando el método de representaciones, hallar la fuerza correspondiente a la longitud  $l$  de cada uno de dos cilindros conductores infinitos. La distancia entre sus ejes paralelos es  $d$ . Los radios de los cilindros son iguales a  $r_1$  y  $r_2$ . Uno de los cilindros tiene una carga con densidad lineal  $\tau$ .
- 2.15. Hallar el momento dipolar de la carga distribuida uniformemente por la superficie de la esfera de radio  $a$ . Una de las semiesferas posee una carga  $Q$  y la otra,  $-Q$ .
- 2.16. Un dipolo puntual con el momento  $p$  se encuentra a la distancia  $d$  del centro de una esfera conductora puesta a tierra de radio  $a$ . Hallar el momento dipolar inducido de la esfera.
- 2.17. A las armaduras de un condensador plano de aire que tienen la forma de cuadrados con el lado  $l$ , se aplica una diferencia de potencial constante  $U_0$ . Determinar la fuerza, necesaria para desplazar una de las placas paralelamente a sí misma en dirección, perpendicular a cualquier lado del cuadrado, permaneciendo constante la distancia  $d$  entre las placas.
- 2.18. Hay una esfera conductora de radio  $r_1$  y una capa conductora esférica, concéntrica con la esfera. La superficie interior de la capa tiene el radio  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) y la inferior,  $r_3$  ( $r_3 > r_2$ ). El espacio entre  $r_1$  y  $r_3$  está libre. Las cargas de la esfera y la capa son  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente, con la particularidad de que  $Q_1 \neq -Q_2$  (lo que no existe en el condensador). Hallar la energía de este sistema de cargas.
- 2.19. Hallar la intensidad del campo eléctrico en el centro de un cilindro circular recto de longitud  $l$  y radio  $a$ , cuya polarización  $P$  es paralela al eje y es homogénea.
- 2.20. La polarización  $P$  en el problema 2.19 está dirigida perpendicularmente al eje del cilindro. Hallar la intensidad del campo en el centro del cilindro.
- 2.21. Un cilindro conductor ilimitado de sección circular y radio  $a$  y un plano conductor, situado a la distancia  $d$  del eje del cilindro, forman un condensador. Hallar la capacidad, correspondiente a la longitud  $l$  del cilindro.
- 2.22. Haciendo uso del resultado de la solución de 2.21, hallar la fuerza que ejerce un plano infinito puesto a tierra sobre una sección de longitud  $l$  de cierto hilo rectilíneo cargado, paralelo al plano. La densidad lineal de la carga del hilo es  $\tau$ .
- 2.23. La molécula está representada con ayuda de un modelo como una carga  $-2|q|$  en el origen de coordenadas y como dos cargas  $|q|$  situadas en los puntos que se caracterizan por los radios vectores  $r_1$  y  $r_2$ , con la particularidad de que  $|r_1| = |r_2| = l$ . El ángulo entre  $r_1$  y  $r_2$  se denota por  $\theta$ . Hallar la carga eficaz  $|q|_{\text{ef}}$  para la molécula de agua  $H_2O$  que tiene  $l = 0,958 \cdot 10^{-10}$  m,  $\theta = 105^\circ$  y  $p = 6,14 \cdot 10^{-30}$  C-m.

- 2.24. Entre dos planos conductores, infinitos, paralelos y puestos a tierra, cuya distancia entre ellos es  $d$ , se coloca una carga puntual  $q$  a la distancia  $x$  de uno de ellos. Después de encontrar la imagen de la carga  $q$ , calcular la fuerza que actúa sobre ella.

## Respuestas

- 2.1.  $E = \rho r / (3\epsilon_0)$ . 2.2.  $E = \rho r / (2\epsilon_0)$ . 2.3.  $\varphi = \varphi_1 - \frac{\Delta}{d-\delta} (\varphi_1 - \varphi_2)$ . 2.4.  $F = -\frac{q^2 r_0^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \times \left[ \frac{2d^2 - r_0^2}{(d^2 - r_0^2)^2} \right]$ . 2.5.  $F = \frac{q^2 ar}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - r^2)^2}$ . 2.6.  $q_1 = -\frac{r_1 (r_2 - d)}{d (r_2 - r_1)} q$ ,  $q_2 = -\frac{r_2 (d - r_1)}{d (r_2 - r_1)} q$ . 2.7.  $f = \sqrt{(d+a)/(d-a)}$ . 2.8.  $\Delta W = (C_2 q_1 - C_1 q_2)^2 / [2C_1 C_2 (C_1 + C_2)]$ . 2.9.  $C = \frac{S}{d} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}$ . 2.10.  $h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) U^2}{(r_2^2 - r_1^2) \ln(r_2/r_1)} \frac{1}{\rho g}$ . 2.11.  $Q = 4\pi (\epsilon + \epsilon_0) \sqrt{\frac{a^2 g (\rho_2 - 2\rho_1)}{3(\epsilon - \epsilon_0)}}$ . 2.12.  $F = \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{(\epsilon - \epsilon_0) \Delta}{(d - \Delta) \epsilon + \Delta \epsilon_0} \frac{a}{d} U^2$ . 2.13.  $f = -\tau^2 dl / [2\pi\epsilon_0 (d^2 - r^2)]$ . 2.14.  $f = -\frac{\tau^2 dl}{2\pi\epsilon_0} [d^2 - (r_1 + r_2)^2]^{-1/2} \times [d^2 - (r_1 - r_2)^2]^{-1/2}$ . 2.15.  $p = Qa$ . 2.16.  $p_{\text{ind}} = \rho a^2 / d^3$ . 2.17.  $F = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 l}{d} U_0$ . 2.18.  $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) Q_1^2 + \frac{2Q_1 Q_2 + Q_2^2}{r_3} \right]$ . 2.19.  $E = -(1/\epsilon_0) P (1 - l/\sqrt{4a^2 + l^2})$ . 2.20.  $E = -\frac{[1/(2\epsilon_0)] IP}{\sqrt{4a^2 + l^2}}$ . 2.21.  $C = \frac{\ln[(d + \sqrt{d^2 - a^2})/a]}{2\pi\epsilon_0 l}$ ; para  $a \ll d$  tenemos  $C \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(2d/a)}$ . 2.22.  $F = -\left(\frac{\partial W}{\partial d}\right)_Q = \left(\frac{\partial W}{\partial d}\right)_\varphi = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial d} = \frac{U^2}{d} \frac{\pi\epsilon_0 l}{(\ln 2d/a)^2} = \frac{U^2 C^2 l}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{\tau^2 l}{4\pi\epsilon_0 d}$ . 2.23.  $p = |q| \text{ef} (r_1 + r_2)$ .  $p = 2 |q| \text{ef} l \cos(\theta/2)$ ,  $|q| \text{ef} = 5,26 \cdot 10^{-20} \text{C} = 0,328 |e|$ . 2.24.  $F = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(nd+x)^2} - \frac{1}{(nd-x)^2} \right] \right\}$ .

## Dieléctricos

El factor físico principal que determina el carácter de interacción del dieléctrico con el campo eléctrico es el momento dipolar eléctrico de los átomos y moléculas.

Los mecanismos de la polarización fundamentales son la aparición de momentos dipolares inducidos de los átomos y moléculas o la reorientación y redistribución de los que ya existen en el espacio. Existe también la polarización iónica de red.

### § 20. Campo local

*Se discuten las causas que determinan la diferencia entre los campos local y exterior, y se calcula la intensidad del campo local para las condiciones más sencillas.*

**Diferencia entre el campo local y el exterior.** Como consecuencia de la polarización del dieléctrico, ubicado en un campo exterior, el propio dieléctrico se convierte en fuente del campo eléctrico. Por lo tanto, *el campo dentro del dieléctrico, que actúa sobre sus moléculas, se diferencia del exterior.* Se denomina **campo local**. La diferencia entre el campo local y el exterior es esencial sobre todo para los dieléctricos con gran densidad: para los líquidos y sólidos.

**Cálculo de la intensidad del campo local.** Separemos en el volumen del dieléctrico una esfera pequeña desde el punto de vista físico, en cuyo centro se calcula la intensidad del campo local (fig. 100). La intensidad que surge en el centro de la esfera como consecuencia de la polarización del dieléctrico, consta de la intensidad  $E_1$  engendrada por la parte del dieléctrico, situada fuera del volumen limitado por la esfera, y la intensidad  $E_2$ , originada por la parte del dieléctrico que se encuentra en el volumen limitado por la esfera.

Al calcular  $E_1$  puede suponerse que el dieléctrico es un medio continuo, ya que la distancia entre el centro de la esfera en que se calcula la intensidad del campo local, y las fuentes del campo es relativamente grande. Puesto que la esfera posee un volumen pequeño desde el punto de vista físico, el medio en las inmediaciones de su superficie por la parte exterior puede considerarse homogéneamente polarizado. En el volumen limitado por la esfera es necesario tener en cuenta la estructura elemental del dieléctrico, es decir, calcular la aportación del momento dipolar de cada átomo en la intensidad del campo local y considerar la esfera como la frontera entre el medio fuera del volumen de la esfera y el vacío en el volumen limitado por la esfera.

La intensidad en el centro de la esfera se crea por las cargas ligadas en su superficie, como en la superficie de separación de los medios con diversas cons-

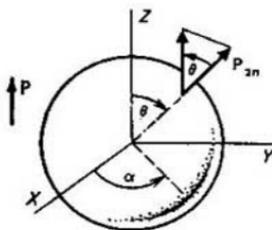


Fig. 100  
Cálculo del campo local

tantes dieléctricas. La densidad superficial de las cargas ligadas es igual a [véase (17.21)]

$$\sigma_{11g} = -(P_{2n} - P_{1n}) = -P_{2n}, \quad (20.1)$$

donde  $P_{2n}$  es la componente normal de la polarización por la parte exterior de la superficie de la esfera;  $P_{1n} = 0$ , por la interior. Dirigiendo el eje  $Z$  a lo largo del vector de polarización constante  $P$ , obtenemos

$$\sigma_{11g} = -P_{2n} = P \cos \theta. \quad (20.2)$$

En el ángulo sólido  $d\Omega$  se encuentra una carga superficial

$$dQ = \sigma_{11g} r^2 d\Omega, \quad (20.3)$$

donde  $r$  es el radio de la esfera. Esta carga en dirección del eje  $Z$  en el centro de la esfera crea un campo con intensidad

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \cos \theta. \quad (20.4)$$

Se ve que sólo la componente de la intensidad del campo a lo largo del eje  $Z$  es diferente de cero. De (20.4), teniendo en cuenta (20.3), obtenemos

$$E_z = E_t = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int \cos^2 \theta d\Omega = E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3\epsilon_0} P \quad (20.5)$$

o en forma vectorial

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{3\epsilon_0} P.} \quad (20.6)$$

La fórmula (20.6) es válida sólo para un dieléctrico homogéneo ilimitado. Si el dieléctrico es finito, la intensidad del campo en él depende, por lo general, de sus dimensiones y forma. Las cargas de polarización volumétricas del dieléctrico homogéneo son nulas, ya que  $\rho_{11g} = -\text{div } P = -\kappa\epsilon_0 \times \text{div } E = 0$ . Por esta razón, la diferencia de la intensidad del campo de un dieléctrico finito de la intensidad  $E_1$  de un dieléctrico ilimitado se determina por la intensidad de los campos de las cargas ligadas que surgen en la superficie exterior del cuerpo. A veces este campo se denomina depolarizador ya que disminuye la intensidad del campo.

La intensidad  $E_2$  depende de la distribución de los momentos dipolares de las moléculas dentro de una esfera separada, pequeña desde el punto de vista físico, por lo que no puede representarse mediante alguna fórmula universal. Calculemos la intensidad para el caso cuando las moléculas se encuentran en los nudos de cierta red cristalina y todos los momentos dipolares poseen una misma

dirección en el espacio. Esta condición se cumple para los momentos dipolares inducidos. La intensidad  $E_2$  debe hallarse en el punto donde está una de las moléculas, es decir, en el nudo de la red cristalina. Coloquemos el origen de coordenadas en este punto y dirijamos los ejes  $X, Y, Z$  por las aristas de la red. Utilicemos la fórmula (16.85), que en el caso dado para la proyección  $x$  de la intensidad tiene el aspecto

$$E_{2x} = \frac{p_x}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{-r_i^2 + 3x_i^2}{r_i^5} + \frac{p_y}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3x_i y_i}{r_i^5} + \frac{p_z}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{3x_i z_i}{r_i^5}. \quad (20.7)$$

Aquí la adición se lleva a cabo por todas las moléculas del volumen físicamente pequeño dentro de la esfera. Las mismas fórmulas pueden escribirse para los componentes  $y$  y  $z$  del campo.

En la fórmula (20.7) se puede primero calcular la suma por todas las moléculas que se encuentran en una capa esférica pequeña de radio  $r$  y luego calcular la suma por las capas esféricas, correspondientes a diversos  $r$ . A causa de la simetría cúbica, para la primera adición tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 &= \sum_i y_i^2 = \sum_i z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_i r_i^2, \\ \sum_i x_i y_i &= \sum_i y_i z_i = \sum_i z_i x_i = 0. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (20.8), (20.7) toma la forma

$$E_{2x} = 0. \quad (20.9)$$

De la misma manera se demuestra que  $E_{2y} = E_{2z} = 0$ . Por eso, en definitiva, obtenemos

$$E_2 = 0. \quad (20.10)$$

Así pues, la intensidad del campo local que actúa sobre la molécula dentro del dieléctrico es igual a

$$E^* = E + P/(3\epsilon_0). \quad (20.11)$$

*Esta fórmula debe ser considerada como la primera aproximación, ya que el dieléctrico real se diferencia del modelo, con cuya ayuda se obtuvo dicha fórmula. En particular, los campos eléctricos de las moléculas pueden diferenciarse de los campos, originados por los dipolos, la red del dieléctrico puede poseer otra simetría, los momentos dipolares de las moléculas pueden tener distintas direcciones, etc.*

El campo local que actúa sobre las moléculas del dieléctrico se distingue del exterior por el hecho de que el propio dieléctrico en el campo exterior se convierte en la fuente de un campo complementario.

La susceptibilidad dieléctrica molecular no depende esencialmente de la densidad de la sustancia y su temperatura.

La constante dieléctrica de un dieléctrico neutro puede depender de la temperatura sólo en forma implícita, dependiendo la concentración de moléculas de la temperatura.

El campo local, que actúa sobre las moléculas del dieléctrico, se diferencia del exterior por el hecho de que el propio dieléctrico en el campo exterior se convierte en la fuente de un campo complementario.

¿Qué hechos fundamentales determinan la diferencia entre las propiedades dieléctricas de los gases rarificados y los densos? ¿En qué consisten dichas diferencias?

¿Cuáles son los factores físicos que determinan la independencia entre la constante dieléctrica de los dieléctricos neutros y la temperatura en intervalos suficientemente amplios?

## § 21. Dieléctricos neutros

*Se describen las propiedades fundamentales de dieléctricos neutros.*

**Susceptibilidad dieléctrica molecular.** Partiendo del mecanismo de formación de un momento dipolar inducido de la molécula [véase el § 17] se desprende que su dirección coincide con la de la intensidad del campo eléctrico. En primera aproximación el momento dipolar de la molécula puede considerarse proporcional a la intensidad del campo:

$$p = \alpha \epsilon_0 E^*, \quad (21.1)$$

donde  $\alpha$  caracteriza la «polarizabilidad» de la molécula (o del átomo) y se denomina susceptibilidad dieléctrica molecular (o atómica). Se determina por las propiedades internas de la molécula. Debido a la gran magnitud de los campos eléctricos intrínsecos en la molécula, la susceptibilidad dieléctrica molecular es pequeña y no depende esencialmente de la densidad de la substancia y la temperatura. El valor de  $\alpha$  puede estimarse partiendo del siguiente modelo de la polarización molecular. La molécula se representa en forma de una esfera conductora, cuyo radio es aproximadamente igual al radio de la molécula ( $a = 10^{-10}$  m). En un campo continuo  $E^*$  esta esfera adquiere un momento dipolar [véase (16.82)] igual a

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E^*. \quad (21.2)$$

Comparando (21.2) con (21.1), hallamos la expresión para la susceptibilidad dieléctrica molecular

$$\alpha = 4\pi a^3. \quad (21.3)$$

Si para los radios de las moléculas se hace uso de los valores obtenidos de la teoría cinética, la fórmula (21.3) nos ofrece para  $\alpha$  valores algo aumentados, sin embargo correctos por el orden de la magnitud. Por esta razón, para estimar el orden de la magnitud semejante modelo de la polarización molecular es bastante bueno.

De (21.1) hallamos que la polarización es igual a

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum \alpha \epsilon_0 E^* = \alpha \epsilon_0 E^* \frac{1}{\Delta V} \sum 1 = \alpha \epsilon_0 N E^*. \quad (21.4)$$

Aquí

$$\sum_{\Delta V} 1 = \Delta V N, \quad (21.5)$$

donde  $N$  es la concentración de moléculas.

**Gases enrarecidos.** En este caso la intensidad  $E^*$  del campo local se diferencia muy poco de la intensidad  $E$  del campo exterior. Por eso [véase (21.4)]

$$P = \alpha \epsilon_0 N E. \quad (21.6)$$

Al comparar (21.6) y (17.11), deducimos que la susceptibilidad dieléctrica es

$$\kappa = \alpha N. \quad (21.7)$$

La permitividad relativa  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ , tomando en consideración (17.31), se representa como

$$\epsilon_r = 1 + \alpha N. \quad (21.8)$$

El valor  $\epsilon_r$  se diferencia de la unidad en una magnitud  $\alpha N$ , que para los gases es muy pequeña. Por ejemplo, la concentración de moléculas de aire para condiciones normales es  $N = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ . Considerando en correspondencia con (21.3) que para las moléculas  $\alpha \approx 10^{-29} \text{ m}^3$ , hallamos

$$\alpha N \approx 10^{-3}. \quad (21.9)$$

Al aumentar las dimensiones de las moléculas,  $\alpha$  y, como consecuencia,  $\alpha N$  crecen, permaneciendo pequeñas según el orden de magnitud.

*La magnitud  $\epsilon_r$  puede depender de la temperatura sólo en forma implícita, por medio de la dependencia de  $N$  respecto a la temperatura.* Designemos la constante de Avogadro, la densidad del gas y la masa molar del gas por  $N_A$ ,  $\rho_m$  y  $M$ , respectivamente, y escribamos la igualdad evidente

$$N = N_A \rho_m / M. \quad (21.10)$$

Con ayuda de (21.10) escribamos la relación (21.8) como

$$(\epsilon_r - 1) M / \rho_m = \alpha N_A. \quad (21.11)$$

Por lo tanto,  $(\epsilon_r - 1) / \rho_m$  es una magnitud constante que no depende de la temperatura y la presión, sólo si esta última es suficientemente pequeña. Al aumentar la presión, crece la densidad y surge la necesidad de tener en cuenta la diferencia entre los campos local y exterior.

**Gases densos.** En este caso en la fórmula (21.4) para  $E^*$  hay que utilizar la expresión (20.11):

$$P = \alpha \epsilon_0 N [E + P/(3\epsilon_0)], \quad (21.12)$$

de donde

$$P = \frac{\alpha \epsilon_0 N}{1 - \alpha N / 3} E. \quad (21.13)$$

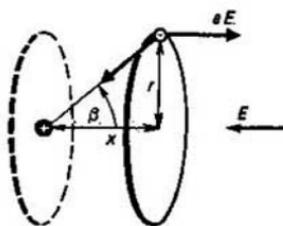


Fig. 101  
Para el cálculo de la susceptibilidad dieléctrica atómica del hidrógeno

Sustituyendo (21.13) en (17.29), hallamos

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 E + \frac{\alpha \epsilon_0 N}{1 - \alpha N / 3} E, \quad (21.14)$$

de donde

$$\frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} = \alpha N. \quad (21.15)$$

Esta fórmula se denomina fórmula de Clausius—Mossotti. Con ayuda

$$\frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \frac{M}{\rho_m} = \alpha N_A. \quad (21.16)$$

El primer miembro de la igualdad (21.16) no depende de la temperatura y la presión de los límites donde la susceptibilidad molecular permanece constante.

Estas presiones para los gases pueden ser grandes (del orden de 100 MPa). En los líquidos y sólidos  $\alpha$  es función de la presión para grandes densidades. La fórmula (21.16) fue comprobada experimentalmente en un amplio intervalo de presiones. Por ejemplo, para el gas carbónico  $\text{CO}_2$  que es neutro la validez de la relación de Clausius—Mossotti (21.16) se comprobó con elevada precisión hasta presiones de unos 100 MPa a 100 °C. En todo el intervalo de dichas presiones la desviación relativa del primer miembro de (21.16) respecto a un valor constante no supera varias centésimas, con la particularidad de que hasta las presiones de unos 20 MPa se observa un pequeño crecimiento, y más arriba, cierta disminución del valor del primer miembro de (21.16). En este caso la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$  varía de manera bastante considerable, aproximadamente en vez y media en el intervalo de presiones desde 1 MPa hasta 100 MPa.

**Ejemplo 21.1.** Estimar la susceptibilidad dieléctrica atómica  $\alpha$  del átomo de hidrógeno. La intensidad del campo eléctrico está dirigida perpendicularmente al plano de movimiento del electrón (fig. 101).

Escribamos la condición de equilibrio de un electrón en movimiento en presencia del campo exterior:

$$eE = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)} \cos \beta = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (21.17)$$

Para  $x \ll r$  obtenemos que  $x/(x^2 + r^2)^{3/2} = x/r^3$  y por eso [véase (21.17)]

$$ex = 4\pi\epsilon_0 r^3 E = p,$$

de donde

$$\alpha = 4\pi r^3 \approx 1,57 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3,$$

lo que da un orden correcto de la susceptibilidad dieléctrica atómica del átomo de hidrógeno.

## § 22. Dieléctricos polares

*Se describen las propiedades principales de los dieléctricos polares.*

**Dependencia entre la polarización y la temperatura.** El momento dipolar permanente de la mayoría de las moléculas tiene el orden de  $10^{-29} \dots 10^{-30}$  C·m. Por ejemplo, el de CO es igual a  $0,36 \cdot 10^{-30}$  C·m, el de  $\text{SO}_2$ ,  $5,3 \cdot 10^{-30}$  C·m y el de KCl,  $3,5 \cdot 10^{-2}$  C·m. Los momentos dipolares de la mayoría de las moléculas están medidos y se citan en las tablas.

Un momento dipolar  $p$  que se encuentra en un campo eléctrico  $E$  posee una energía potencial

$$W = -p \cdot E. \quad (22.1)$$

Esta magnitud alcanza su valor mínimo cuando la dirección del dipolo coincide con la dirección de la intensidad del campo eléctrico. Dado que el estado del sistema es estable, al tener éste energía mínima, *los momentos dipolares de las moléculas polares tienden a dar la vuelta hasta coincidir con la dirección de la intensidad del campo eléctrico.* Este giro se realiza mediante un par de fuerzas que actúan sobre el dipolo (véase la fig. 91). En cambio, el movimiento térmico perturba la acción coordinada del campo eléctrico. Como consecuencia, se establece cierto equilibrio.

Hagamos que coincida el eje  $Z$  con la dirección de la intensidad  $E$  del campo eléctrico (fig. 102). La energía potencial de las moléculas (22.1) depende del ángulo entre las direcciones de su momento dipolar y su intensidad:

$$W = -pE \cos \theta = -p_z E \quad (22.2)$$

y, por lo tanto, la distribución de Boltzmann para este caso caracteriza la distribución de las direcciones de los momentos dipolares de las moléculas respecto a los ángulos. La cantidad de moléculas  $dn$ , cuyos momentos dipolares se encuentran en el ángulo sólido  $d\Omega$ , es igual a

$$dn = A e^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} d\Omega = A e^{\frac{pE \cos \theta}{kT}} d\alpha \sin \theta d\theta. \quad (22.3)$$

Entonces, el valor medio de la componente del momento de los dipolos respecto al eje  $Z$  es

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int p_z dn}{\int dn} = \frac{A p \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{A \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta}, \quad (22.4)$$

donde  $p_z = p \cos \theta$  y se introduce la designación

$$\beta = pE/(kT). \quad (22.5)$$

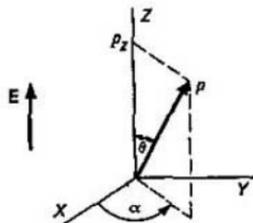


Fig. 102  
Orientación del dipolo en el sistema de coordenadas esférico

Ante todo es necesario calcular la integral interna en el denominador de (22.4):

$$I = \int_0^{\pi} e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (22.6)$$

ya que la integral interna en el numerador se expresa mediante la fórmula

$$\int_0^{\pi} e^{\beta \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \partial I / \partial \beta. \quad (22.7)$$

La integral (22.6) se calcula fácilmente:

$$I = \int_0^{\pi} e^{\beta \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{\beta} e^{\beta \cos \theta} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\beta} \sinh \beta, \quad (22.8)$$

de donde

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} \left( \cosh \beta - \frac{1}{\beta} \sinh \beta \right). \quad (22.9)$$

Así, pues, la fórmula (22.4), teniendo en cuenta (22.8) y (22.9), toma la forma

$$\langle p_z \rangle = pL(\beta), \quad (22.10)$$

donde  $L(\beta) = \coth \beta - 1/\beta$  es la función de Langevin (fig. 103).

Para intensidades no muy grandes del campo, cuando  $pE \ll kT$ , es decir,  $\beta \ll 1$ , desarrollando la cotangente hiperbólica en serie

$$\coth \beta = 1/\beta + \beta/3 - \beta^3/45 + \dots \quad (22.11)$$

y limitándonos en la expresión para  $L(\beta)$  con el término lineal respecto a  $\beta$

$$L(\beta) = \beta/3, \quad (22.12)$$

obtenemos

$$\langle p_z \rangle = p^2 E / (3kT). \quad (22.13)$$

**Campo de saturación.** Al aumentar la intensidad del campo, los momentos dipolares se orientan de manera cada vez más intensa en dirección de la intensidad y para  $pE \gg kT$ , o sea, para  $\beta \gg 1$  puede considerarse que todos los momentos dipolares son paralelos entre sí y poseen la dirección de la intensidad del campo. Por lo tanto,

$$\langle p_z \rangle = p. \quad (22.14)$$

La relación (22.14) se obtiene de (22.10) si se toma en consideración que para  $\beta \gg 1$  la función  $L(\beta)$  es próxima a la unidad:

$$L(\beta \rightarrow \infty) \rightarrow 1. \quad (22.15)$$

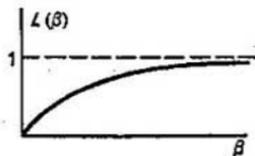


Fig. 103  
Función de Langevin

Al cumplirse la conducción (22.14), se alcanza la polarización máxima posible y el posterior aumento de la intensidad del campo no conduce su crecimiento. La intensidad del campo para la que se logra la polarización máxima posible, se denomina intensidad del campo de saturación. Considerando el orden de la magnitud de los momentos dipolares igual a  $10^{-29}$  C·m, sacamos la conclusión de que a  $T = 300$  K la intensidad del campo de saturación es

$$E_{\text{sat}} \approx kT/p \approx 4,2 \cdot 10^8 \text{ V/m.} \quad (22.16)$$

De aquí se ve que la condición  $pE \ll kT$ , para la cual es correcta la fórmula (22.13), se efectúa hasta las intensidades de los campos, iguales a millones de voltios por metro. Por esta razón, en la mayoría de los casos importantes en la práctica puede hacerse uso de la fórmula (22.13).

**Gases rarificados.** En este caso la intensidad del campo local puede considerarse igual a la intensidad del campo exterior y la polarización se puede representar [véase (22.13)] en la forma

$$P = Np^2E/(3kT). \quad (22.17)$$

A continuación, por analogía total de los cálculos, empleando las fórmulas (21.6)–(21.8), obtenemos que la permitividad relativa es

$$\epsilon_r = 1 + Np^2/(3kT\epsilon_0). \quad (22.18)$$

Los dieléctricos polares, a la par con la polarización a causa de la reorientación de los momentos dipolares permanentes, poseen una polarización, determinada por los momentos dipolares inducidos, la cual se describe por la fórmula (21.8). Por eso, teniendo en cuenta ambos mecanismos de polarización, la expresión para  $\epsilon_r$  de los dieléctricos gaseosos polares a una presión no muy grande tiene la forma

$$\epsilon_r = 1 + N[\alpha + p^2/(3kT\epsilon_0)]. \quad (22.19)$$

Como se ve de (21.3)  $\alpha = 10^{-29} \text{ m}^3$ . Por otra parte, a temperatura ambiente  $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ , por lo que siendo  $p \approx 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$   $p^2/(3kT\epsilon_0) \sim 10^{-27} \text{ m}^3$ , es decir, la aportación a la polarización por parte de los momentos dipolares inducidos es unas cien veces inferior a la de los permanentes y por eso se puede menospreciar. Sin embargo, en principio, la precisión moderna de las mediciones es tal que permite dividir la contribución en la polarización por parte de los momentos dipolares inducidos y permanentes. Para eso se mide  $\epsilon_r$  en un amplio intervalo de temperaturas y se utiliza la fórmula (22.19). La dependencia entre  $\epsilon_r$  y  $1/T$  en la gráfica se representa mediante una línea recta. De aquí, aplicando la fórmula (22.19) se calcula  $\alpha = (\epsilon_r - 1)/N$ . Después de eso, por los resultados de las mediciones para otros valores de  $1/T$  con ayuda de la fórmula (22.19) puede calcularse el momento dipolar permanente, ya que todas las demás magnitudes en esta ecuación son conocidas.

**Interpretación cuántica de la polarización de los dieléctricos gaseosos polares.** Lo mismo que en la teoría clásica, en la cuántica la aparición de la polarización en los dieléctricos polares se explica por la orientación principal de los momentos magnéticos permanentes de las moléculas en dirección de la in-

tensidad del campo eléctrico. Para la constante dieléctrica se obtiene la fórmula (22.19). *En cambio, en la interpretación de la reorientación de los momentos dipolares permanentes existe una diferencia esencial con respecto a la teoría clásica.*

En la teoría cuántica es necesario tomar en consideración la rotación de las moléculas. El momento de impulso de las moléculas en rotación se orienta en el espacio en todas las direcciones y sus proyecciones sobre cualquier dirección elegida forma un conjunto discreto de valores, con la particularidad de que el valor medio de la proyección es nulo. El momento dipolar eléctrico está unido rígidamente con la molécula y cambia su orientación en el espacio debido a la rotación de la molécula.

El momento dipolar de la molécula puede descomponerse en dos componentes: a lo largo del eje de rotación y perpendicularmente a él. La segunda componente, a causa de la rotación de la molécula, cambia su orientación en el espacio, en el plano perpendicular al eje de rotación de la molécula. El valor medio de esta componente en el sistema de coordenadas, donde gira la molécula, es nulo. El valor medio de la componente del momento dipolar por el eje de rotación de la molécula es también nulo debido a que el momento de inercia de la molécula está cuantificado y el valor medio de su proyección sobre cualquier dirección es igual a cero, independientemente de si hay campo eléctrico o no. Por lo tanto, *las moléculas con un momento de impulso diferente de cero no contribuyen en la polarización. Esta última se forma sólo por las moléculas que no están en rotación y que poseen momento de impulso nulo, como consecuencia de la reorientación de sus momentos dipolares eléctricos permanentes.* Las proyecciones del momento dipolar sobre la dirección del campo eléctrico forman una serie discreta de valores con una magnitud media, diferente de cero, merced a lo cual surge la polarización.

**Gases densos.** En este caso es necesario tener en cuenta la diferencia entre el campo local y el exterior y la diversa orientación de los momentos dipolares que depende de la interacción entre los dipolos. Todo esto complica mucho los cálculos.

Considerando que la intensidad del campo local es mucho menor que la del campo de saturación, es racional para la polarización escribir, en vez de (22.17), la siguiente fórmula:

$$P = \frac{Np^2}{3kT} E^* \quad (22.20)$$

No obstante, la intensidad  $E^*$  del campo local en esta expresión no puede expresarse mediante la intensidad del campo exterior por la fórmula (20.11). Puede cerciorarse uno de eso por medio de los siguientes razonamientos.

Imaginémonos que en el centro de una cavidad esférica de radio  $a$ , que se forma en un dieléctrico denso con una constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ , se coloca un dipolo  $p$ . El campo de ese dipolo provoca la polarización del medio fuera de la esfera. Merced a ello, en la cavidad esférica surge una intensidad complementaria

$$E_{\text{comp}} = \frac{2(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_r + 1} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (22.21)$$

es decir, en la cavidad aparece una intensidad constante que coincide en dirección con la orientación del momento dipolar. Esta intensidad complementaria provoca la aparición de un momento dipolar inducido complementario, cuya dirección coincide con la del momento dipolar permanente y, por lo tanto, no puede reorientar el momento dipolar permanente. Como consecuencia, la polarización no puede interpretarse como la reorientación de los momentos dipolares en el campo local.

La fórmula (22.20), teniendo en cuenta (20.11), adquiere la forma

$$P = \frac{Np^2}{3kT} \left[ E + \frac{P}{(\epsilon_0)} \right], \quad (22.22)$$

de donde

$$P = \frac{Np^2/(3kT)}{1 - Np^2/(9kT\epsilon_0)} E. \quad (22.23)$$

Para  $T_0 = Np^2/(9kT\epsilon_0)$  el denominador del segundo miembro se convierte en cero. Para  $T > T_0$  la polarización  $P$  tiene un valor finito y para  $T = T_0$  se reduce al infinito. Eso significa que para  $T \leq T_0$  la substancia correspondiente debe poseer polarización espontánea. Por ejemplo, según la fórmula (22.23), es de esperar que los vapores de agua a alta presión deben ser polarizados espontáneamente, lo que a ciencia cierta es incorrecto. Semejantes resultados erróneos se obtienen también para otras substancias. Por esta razón, para describir los gases densos con moléculas polares y líquidos polares se necesitan otros modelos.

**Líquidos polares.** Onsager propuso un modelo para los líquidos polares que concuerda mejor con el experimento, a pesar de que ofrece resultados numéricos bastante aproximados. En el modelo se considera que cada dipolo se encuentra en el centro de una cavidad esférica real, cuyo volumen es igual al volumen medio correspondiente a una molécula. Se toma en consideración la orientación de los dipolos por las fuerzas de acción a distancia y el surgimiento de un momento dipolar complementario, influido por la intensidad (22.21). Como consecuencia se recibió la relación

$$\frac{(\epsilon_r - \epsilon_{\text{ind}})(2\epsilon_r + \epsilon_r \text{ ind})}{\epsilon_r (\epsilon_r \text{ ind} + 2)^2} = \frac{Np^2}{9kT\epsilon_0}, \quad (22.24)$$

donde  $\epsilon_r$  es la constante dieléctrica relativa;  $\epsilon_r \text{ ind}$ , la constante dieléctrica relativa, determinada por los momentos dipolares inducidos. Para el agua  $\epsilon_r \text{ ind} = 4,9$ ,  $p = 2,16 \cdot 10^{-29}$  C·m y la fórmula (22.24) para  $T = 273$  K nos da el valor de  $\epsilon_r = 105$ . El valor experimental de  $\epsilon_r = 88$ . Es difícil esperar mejor concordancia con el experimento.

La mejor concordancia cuantitativa con el experimento se obtiene para las soluciones fuertemente diluidas de dieléctricos polares en disolvente no polar. En este caso las moléculas polares de la substancia disuelta se encuentran suficientemente lejos la una de la otra, por lo que puede menospreciarse la interacción entre ellas. Con ayuda del modelo de Onsager puede tomarse en consideración la interacción de las moléculas polares con el disolvente no polar. Como consecuencia, se obtiene una teoría que concuerda bastante bien con el experimento.

**Cristales iónicos.** Se les puede imaginar como dos subredes con iones positivos y negativos. Bajo la influencia del campo eléctrico exterior, estas redes se desplazan una respecto a otra, debido a lo cual surge una polarización considerable, lo que ofrece valores relativamente grandes de la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$ . Verbigracia, la sal común NaCl posee  $\epsilon_r = 6$ , KCl,  $\epsilon_r = 5$ , etc.

En condiciones típicas, cuando la polarización de dieléctrico polar alcanza el valor máximo posible, los campos de saturación son de centenares de millones de voltio por metro.

La contribución de los momentos dipolares inducidos en la polarización es unas cien veces inferior a la de los permanentes y en la mayoría de los casos puede menospreciarse.

El mecanismo de polarización de los gases y líquidos polares densos, teniendo en cuenta el campo local, no puede considerarse como una reorientación de los momentos dipolares en este campo.

¿Por qué los momentos dipolares de las moléculas polares tienden a girar hasta coincidir con la dirección de la intensidad del campo eléctrico?

¿Para qué condiciones la polarización de los dieléctricos polares alcanza la saturación?

¿A qué distancias entre las cargas elementales corresponden los momentos dipolares permanentes de las moléculas?

¿Permite la técnica moderna experimental separar la contribución de los momentos dipolares inducidos y permanentes en la polarización? Explíquese de qué manera puede hacerse eso en principio. ¿Cuáles son los factores físicos que conducen a la imposibilidad de examinar la polarización de los dieléctricos densos como consecuencia de la reorientación de los momentos dipolares en un campo local?

## § 23. Substancias ferroeléctricas

*Se examinan las propiedades físicas de las substancias ferroeléctricas y la naturaleza de la ferroelectricidad.*

**Definición.** Se llaman substancias ferroeléctricas a los dieléctricos polares que en un intervalo determinado de temperaturas están polarizados espontáneamente, es decir, poseen polarización en ausencia del campo eléctrico. En los límites del intervalo de temperaturas la substancia ferroeléctrica se convierte en un dieléctrico polar como consecuencia de la transición de fase.

La constante dieléctrica relativa de las substancias ferroeléctricas es extremadamente alta ( $\epsilon_r \sim 10^4$ ) y depende de la intensidad del campo sin ser, en cambio, una función unívoca de la intensidad. El valor de  $\epsilon_r$  depende de cómo varió la intensidad antes de lograr el valor dado.

El término «substancias ferroeléctricas» surgió por la analogía formal que existe entre sus propiedades y las de las substancias ferromagnéticas. En calidad de ejemplos de substancias ferroeléctricas pueden servir la sal de Seignette (de Rochelle)  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$  y el titanato de bario  $\text{BaTiO}_3$  y otros.

**Ciclo de histéresis.** Puesto que  $\epsilon$  es función de  $U$ ,  $D = \epsilon U$  depende no linealmente de  $E$ . Además, dado que  $\epsilon$  es función de la prehistoria de la variación de  $E$ ,  $D$  depende de manera multiforme de  $E$ . Coloquemos entre las

armaduras de un condensador plano una substancia ferroeléctrica y midamos  $\epsilon$  en función de la intensidad  $E$  del campo que varía según la ley armónica.

El esquema de la instalación se muestra en la fig. 104. A los bornes extremos de dos condensadores planos acoplados en serie se les conecta un generador que crea entre ellos una diferencia de potencial que varía armónicamente. Esta diferencia de potencial se distribuye entre el condensador  $C$  con la substancia ferroeléctrica y el condensador  $C_1$ , entre cuyas armaduras no hay ninguna subs-

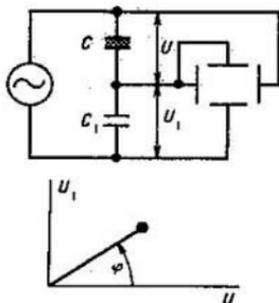


Fig. 104  
Esquema del dispositivo para  
eliminar el ciclo de histéresis:  
 $\operatorname{tg} \varphi = \epsilon/\epsilon_0 = D/\epsilon_0 E$

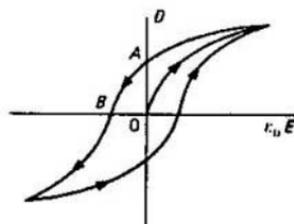


Fig. 105  
Ciclo de histéresis

tancia. Suponiendo que las áreas de todas las armaduras de los condensadores son iguales y designando por  $d$  la distancia entre las armaduras, tenemos

$$E = \sigma/\epsilon, \quad E_1 = \sigma/\epsilon_0, \quad (23.1)$$

de donde

$$U = Ed = \sigma d/\epsilon, \quad U_1 = \sigma d/\epsilon_0 \quad (23.2)$$

y por lo tanto,

$$\operatorname{tg} \varphi = U_1/U = \epsilon/\epsilon_0 = \epsilon E/(\epsilon_0 E). \quad (23.3)$$

Por eso si aplicamos la tensión  $U$  a la exploración horizontal del oscilógrafo y  $U_1$  a la vertical, en la pantalla del dispositivo, al variar  $E$ , se traza una curva, la abscisa de cuyos puntos es en cierta escala igual a  $\epsilon_0 E$  y la ordenada, a  $\epsilon E = D$  en la misma escala. Esta curva se denomina ciclo de histéresis (fig. 105). Las flechas en la curva muestran la dirección del movimiento del punto por la curva al cambiar la intensidad del campo. El segmento  $OA$  caracteriza la polarización remanente, es decir, la polarización que debe poseer el modelo cuando la intensidad del campo exterior se convierte en cero. El segmento  $OB$  caracteriza la intensidad que tiene una dirección contraria a la de la polarización y para la cual el modelo se depolariza totalmente, o sea, su polarización remanente desaparece. Cuanto mayor es  $|OA|$ , tanto mayor es la polarización remanente de la substancia ferroeléctrica. Cuanto mayor es  $|OB|$ ,

tanto mejor se retiene la polarización remanente por parte de la substancia ferroeléctrica.

**Punto (temperatura) de Curie.** Al elevar la temperatura *por encima de cierto valor*  $T_C$ , *característico para cada substancia ferroeléctrica, sus propiedades ferroeléctricas desaparecen y ella se convierte en un dieléctrico polar ordinario.* El punto de transición de fase del estado ferroeléctrico al dieléctrico polar se llama **punto de Curie** y la temperatura que le corresponde,  $T_C$ , **temperatura de Curie.** En algunos casos existen dos puntos de Curie: las propiedades ferroeléctricas desaparecen también al disminuir la temperatura. Por ejemplo, la sal de Rochelle posee dos puntos de Curie que se caracterizan por las temperaturas  $t_{C,s} = 24^\circ\text{C}$ ,  $t_{C,i} = -18^\circ\text{C}$ . La cantidad de substancias ferroeléctricas con dos puntos de Curie es relativamente pequeña. La mayoría posee sólo el punto superior, denominado simplemente punto de Curie.

*En el punto de Curie se efectúa la transición del dieléctrico del estado ferroeléctrico al estado de dieléctrico polar. En este caso la constante dieléctrica varía constantemente desde el valor correspondiente al estado ferroeléctrico hasta el valor correspondiente al estado de dieléctrico polar.* La ley de variación de la susceptibilidad dieléctrica  $\kappa$  en las proximidades de la temperatura de Curie tiene la forma

$$\kappa = \frac{A}{T - T_0}, \quad (23.4)$$

donde  $A$  es cierta constante y  $T_0$ , la **temperatura de Curie — Weiss** próxima a la temperatura de Curie  $T_C$  (en la mayoría de los casos en la fórmula (23.4) en lugar de  $T_0$  se utiliza  $T_C$  lo que no introduce errores algo esenciales en  $\kappa$  para las temperaturas diferentes de  $T_C$ ). La ley expresada por la fórmula (23.4) se denomina **ley de Curie—Weiss**.

Si existe también el punto inferior de Curie, en las inmediaciones de éste la ley de Curie—Weiss tiene la forma

$$\kappa = \frac{A'}{T'_0 - T}. \quad (23.5)$$

Como ya se dijo, las propiedades dieléctricas de los cristales son diferentes por distintas direcciones y por eso, su susceptibilidad dieléctrica se caracteriza no mediante la susceptibilidad dieléctrica escalar  $\kappa$ , sino por el tensor de susceptibilidad dieléctrica  $\kappa_{ij}$ . En cambio, la dependencia entre las componentes del tensor y la temperatura tiene el mismo carácter que en (23.4) y (23.5).

**Mecanismo molecular de la polarización espontánea.** La teoría de la ferroelectricidad se encuentra fuera de los márgenes del curso de la física general. Por eso nos limitaremos sólo a la descripción cualitativa de los procesos a nivel molecular. Una interacción muy intensa entre los momentos dipolares de las moléculas puede conducir a que surja una polarización finita  $P$  a una intensidad  $E$ , tan pequeña como se quiera, del campo o, lo que es lo mismo, puede surgir la polarización  $P$  en ausencia del campo exterior. Con otras palabras, *para una interacción intensa entre los momentos dipolares de las moléculas surge una*

*polarización espontánea, en la que los momentos dipolares aislados están orientados en una misma dirección.* Tomando en consideración que los momentos dipolares permanentes son mucho mayores que los inducidos [véase (22.19)], se puede deducir que la polarización espontánea se caracteriza por una polarización muy grande. Pero eso conduce a que la susceptibilidad  $\kappa$  y la constante dieléctrica e correspondientes sean mucho mayores que los valores que se observan en los dieléctricos polares y neutros. *El estado de polarización espontánea es precisamente el estado ferroeléctrico.* El paso del estado ferroeléctrico al estado de dieléctrico polar es la transición del estado de polarización espontánea al estado cuando esa polarización desaparece y el dieléctrico se convierte en uno ordinario con moléculas que poseen momentos dipolares permanentes, es decir, es una transición al estado de dieléctrico polar. *Los factores físicos que conducen a esta transición, se reducen a los mecanismos que debilitan la interacción de los momentos dipolares de las moléculas.*

**Dominios dieléctricos.** La polarización espontánea es una fuente de campos eléctricos muy grandes. Por eso, si un volumen macroscópico de la substancia ferroeléctrica tiene polarización espontánea en cierta dirección, alrededor de este volumen surge un campo eléctrico muy grande con el que está relacionada una energía elevada del campo. Dicho estado no es energéticamente ventajoso. *El sistema tiende a pasar a un estado en el que, por una parte, exista polarización espontánea, y por otra, la energía del campo sea mínima. Eso puede realizarse como resultado de la división del volumen de la substancia ferroeléctrica en pequeñas zonas, cada una de las cuales posee una polarización espontánea en cierta dirección determinada, diferente para distintas zonas.* La polarización media del volumen que incluye una cantidad suficiente de pequeñas zonas con diferentes direcciones de la polarización espontánea, es nula y por esta razón, la intensidad del campo eléctrico exterior originado por este volumen, es próxima a cero. *Las pequeñas zonas con polarización espontánea se denominan dominios dieléctricos o simplemente dominios.* Así pues, una substancia ferroeléctrica no polarizada es un conjunto de dominios con polarizaciones espontáneas, orientadas al azar.

Es obvio que para disminuir la energía eléctrica es útil reducir los volúmenes de los dominios. *No obstante, al proceso de reducción de las dimensiones de los dominios obstaculiza otro factor, relacionado con la presencia de la energía superficial en la superficie de separación de dos dominios vecinos.* Está claro que la superficie sumaria de las fronteras entre los dominios aumenta al disminuir el volumen de los dominios y por lo tanto, aumenta también la energía superficial. Por esta razón, los volúmenes de los dominios pueden reducirse sólo hasta límites determinados, cuando eso conduce a la disminución de la energía total del sistema. *Al reducir posteriormente el volumen de los dominios a cuenta de la energía superficial, tiene lugar no la disminución, sino el aumento de la energía total. De esta manera se fijan las dimensiones de los dominios.* Estas dimensiones tienen el orden de miles de distancias intermoleculares. La existencia de los dominios se demuestra en los experimentos, observando directamente con ayuda de la luz polarizada, así como en los ensayos de decapado de la superficie de la substancia ferroeléctrica, ya que las distintas partes del dominio durante el decapado se destruyen con distinta velocidad.

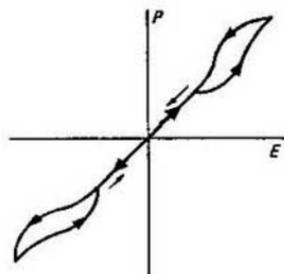


Fig. 106  
Ciclos dobles de histéresis en  
sustancias antiferromagnéticas  
que pasan en campos intensos  
al estado ferroeléctrico

de los momentos dipolares de las moléculas, perteneciente a otra de las subredes del cristal, en dirección contraria. En este caso, la polarización total de cualquier volumen pequeño de semejante cristal es nula. Así pues, no existen dominios con diferentes direcciones de la polarización espontánea, a pesar de que esta última en cualquier volumen pequeño está presente. Semejantes sustancias se denominan sustancias **antiferroeléctricas**. Por su estructura son análogas a las sustancias **antiferromagnéticas**.

En campos, suficientemente pequeños, las sustancias antiferroeléctricas se comportan como dieléctricos ordinarios con una dependencia lineal de la polarización respecto a la intensidad del campo exterior. En campos suficientemente intensos puede efectuarse el paso al estado ferroeléctrico con todas las consecuencias que se desprenden de ello, por ejemplo, se observa el ciclo de histéresis.

La transición se realiza para una intensidad, grande según el módulo, del campo eléctrico. Por esta razón, siendo grande la amplitud de oscilaciones de la tensión en el circuito de la fig. 104 con una sustancia antiferroeléctrica en lugar de ferroeléctrica, se observan dos ciclos de histéresis (fig. 106).

La temperatura de Curie-Weiss no coincide con la temperatura de Curie, pero es próxima a ella. En muchos casos no hay necesidad de diferenciarlas.

La mayoría de las sustancias ferroeléctricas tienen sólo un punto (superior) de Curie. No obstante, existe cierta cantidad de sustancias ferroeléctricas con dos puntos de Curie.

El proceso de cambio de la polarización de la sustancia ferroeléctrica en un campo eléctrico exterior consiste en la reorientación de los momentos dipolares de dominios aislados, en el cambio de los volúmenes y en el movimiento de las fronteras entre los dominios. Dichos procesos se estudian intensamente, ya que las sustancias ferroeléctricas tienen múltiples aplicaciones prácticas. Se conocen más de cien diferentes sustancias ferroeléctricas puras y una cantidad muy elevada de soluciones sólidas ferroeléctricas.

**Sustancias antiferroeléctricas.** A condiciones determinadas en el cristal surgen al mismo tiempo dos polarizaciones espontáneas que tienen dirección contraria. Una de las polarizaciones espontáneas nace como consecuencia de la orientación de los momentos dipolares de las moléculas, pertenecientes a una de las subredes del cristal, en una dirección, y la otra, debido a la orientación

## § 24. Substancias piezoeléctricas

*Se describen los mecanismos del efecto piezoeléctrico y del efecto piezoeléctrico inverso. Se analiza la relación entre el efecto piezoeléctrico inverso y la electrostricción. Se dan las nociones principales sobre las substancias piezoeléctricas.*

**Propiedades de las substancias piezoeléctricas.** Existe una cantidad muy grande de cristales, en cuya superficie surgen, al deformarse, cargas eléctricas. Semejantes cristales se denominan substancias piezoeléctricas. Dado que las deformaciones no pueden cambiar por sí mismas la carga total del cristal, las cargas superficiales que se forman durante la deformación poseen signos diferentes en distintas partes de la superficie. El cuarzo, la turmalina, la sal de Rochelle, etc. pertenecen a las substancias piezoeléctricas.

Como muestra el experimento, las cargas en la superficie de la substancia piezoeléctrica surgen como consecuencia de las deformaciones homogéneas de compresión o tracción en direcciones bien determinadas, denominadas ejes polares de la substancia piezoeléctrica. En las caras opuestas, perpendiculares al eje polar, durante las deformaciones homogéneas, surgen cargas de signo contrario, con la particularidad de que los signos de las cargas cambian al variar el signo de la deformación, es decir, si, por ejemplo, durante la compresión a lo largo del eje polar, en la cara dada se forma una carga positiva, durante la tracción, esta misma cara se carga negativamente. El efecto piezoeléctrico se observa no sólo durante la pura compresión o tracción a lo largo del eje polar, sino que durante cualquier deformación del cristal que va acompañada por la compresión o tracción a lo largo del eje polar.

Puesto que en diferentes caras, perpendiculares al eje polar, surgen cargas de diferente signo, las direcciones distintas a lo largo del eje polar no son equivalentes. Pero eso significa que si el cristal se gira a  $180^\circ$  alrededor del eje, perpendicular al polar, este último eje coincide consigo mismo, mientras que el cristal no coincide consigo mismo. Por esta razón, los cristales que poseen centro de simetría no pueden ser piezoeléctricos. Para que exista el efecto piezoeléctrico durante la deformación homogénea, es necesario que el cristal no tenga centro de simetría. Los ejes polares se determinan por las propiedades de simetría de la red cristalina. En general, el cristal posee varios ejes polares.

*Las propiedades piezoeléctricas dependen de la temperatura. Si a cierta temperatura la red cristalina cambia de tal manera que se forma un centro de simetría, a esta temperatura desaparecen las propiedades piezoeléctricas del cristal.* Por ejemplo, las propiedades piezoeléctricas del cuarzo hasta la temperatura de  $200^\circ\text{C}$  varían poco, pero luego hasta la temperatura de  $576^\circ\text{C}$  comienzan a debilitarse lentamente. A  $576^\circ\text{C}$  sucede el cambio de la red cristalina del cuarzo, debido al cual las propiedades piezoeléctricas del cuarzo desaparecen. Al bajar la temperatura, el cambio de las propiedades del cuarzo ocurre en dirección inversa.

**Efectos piezoeléctricos transversal y longitudinal.** La aparición de las cargas en las caras, perpendiculares al eje polar, durante la deformación homogénea del cristal a lo largo de este eje, se denomina efecto piezoeléctrico longitudinal. Sin embargo, puede provocarse la aparición de cargas en las mismas caras, comprimiendo o estirando el cristal perpendicularmente al eje polar sólo si en este caso tiene lugar la compresión o tracción del cristal a lo largo del eje polar. Este fenómeno se llama efecto piezoeléctrico transversal. *Su existencia se determina por la relación entre las deformaciones longitudinales y transversales del sólido.*

**Mecanismo del efecto piezoeléctrico.** Sólo los cristales iónicos pueden poseer propiedades piezoeléctricas. *El efecto piezoeléctrico surge cuando influida por las fuerzas exteriores, la subred cristalina de iones positivos se deforma de otra manera que la subred cristalina de iones negativos.* Como resultado tiene lugar el desplazamiento de los iones positivos y negativos que conducen a la aparición de polarización del cristal y de cargas superficiales. La polarización es, en primera aproximación, directamente proporcional a la deformación que, a su vez, es directamente proporcional a la fuerza. Por lo tanto, la polarización es directamente proporcional a la fuerza aplicada. Entre las caras con cargas de signos contrarios de un dieléctrico deformado surge una diferencia de potencial que puede medirse y después, según su valor, sacar la conclusión del valor de las deformaciones y las fuerzas aplicadas. El uso de esta relación encuentra gran aplicación práctica. Por ejemplo, existen captadores piezoeléctricos para medir presiones que varían rápidamente. Se conocen micrófonos piezoeléctricos, captadores piezoeléctricos en la automática y telemecánica, etc.

**Efecto piezoeléctrico inverso.** Consiste en que en un campo eléctrico exterior la substancia piezoeléctrica se deformará. *La necesidad de su existencia se desprende de la del efecto directo y el principio de conservación de la energía.* Durante la deformación de la substancia piezoeléctrica, el trabajo se gasta en formar la energía de deformación elástica y la energía del campo eléctrico que surge a causa del efecto piezoeléctrico. Por lo tanto, al deformar una substancia piezoeléctrica, es necesario superar además de la fuerza de elasticidad del cristal, la fuerza complementaria que obstaculiza la deformación y es un factor que determina el efecto piezoeléctrico inverso. Para compensar esta fuerza complementaria hay que aplicar un campo eléctrico exterior, contrario al que surge durante el efecto piezoeléctrico. Por consiguiente, para obtener cierta deformación de la substancia piezoeléctrica, bajo la acción de un campo eléctrico exterior, es necesario que sea igual, pero de dirección contraria, al campo que surge durante la deformación dada; debido al efecto piezoeléctrico directo. Por ejemplo, si durante cierta deformación de la substancia piezoeléctrica a lo largo del eje polar entre sus caras, perpendiculares al eje, surge cierta diferencia de potencial, para realizar la misma deformación sin utilizar fuerzas mecánicas, hay que aplicar a esas caras la misma diferencia de potencial, pero con signo contrario.

El mecanismo del efecto piezoeléctrico inverso es parecido al directo: influidas por el campo eléctrico exterior, las subredes cristalinas de iones positivos y negativos se deforman de diferente manera, lo que conduce a la deformación del cristal.

El efecto piezoeléctrico inverso tiene también numerosas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, hallaron gran aplicación los radiadores ultrasónicos de cuarzo.

**Substancias piroeléctricas.** La subred de iones positivos de algunas substancias piezoeléctricas resulta desplazada con respecto a la subred de iones negativos en estado de equilibrio termodinámico, debido a lo cual *semejantes cristales resultan polarizados en ausencia del campo eléctrico exterior*. De esta manera, los mencionados cristales poseen polarización eléctrica espontánea.

Por lo general, la existencia de semejante polarización espontánea se enmascara por las cargas superficiales libres que se precipitan del medio ambiente en la superficie del cristal bajo el efecto del campo eléctrico, relacionado con la polarización espontánea. Este proceso transcurre hasta que el campo eléctrico se neutralice totalmente, o sea, hasta que no se enmascare completamente la presencia de la polarización espontánea. Sin embargo, al variar la temperatura del modelo, por ejemplo, al calentarlo, tiene lugar el desplazamiento de las subredes iónicas una respecto a otra, como consecuencia de lo cual cambia la polarización espontánea y en la superficie del cristal aparecen cargas eléctricas. El surgimiento de dichas cargas se denomina efecto piroeléctrico directo y los cristales correspondientes se llaman cristales piroeléctricos.

*Toda substancia piroeléctrica es piezoeléctrica, pero no toda substancia piezoeléctrica es piroeléctrica.* Es que las substancias piroeléctricas poseen una dirección preferida, a lo largo de la cual existe la polarización espontánea, mientras que la substancia piezoeléctrica, en general, no tiene dirección preferida.

Existe también el *efecto piroeléctrico inverso: la variación del campo eléctrico en una substancia piroeléctrica aislada adiabáticamente, va acompañada por el cambio de su temperatura*. La necesidad de su existencia puede demostrarse, basándose en el análisis termodinámico del proceso y mediante los experimentos.

Al surgir condiciones para la polarización espontánea, el dieléctrico tiende a pasar a un estado en el que, por una parte, hay polarización espontánea, pero por otra parte, la energía del campo sea mínima. Merced a ello, ocurre la formación de los dominios.

La desaparición de la polarización espontánea y el paso del estado ferroeléctrico al dieléctrico polar se provocan por los factores que debilitan la interacción de los momentos dipolares de las moléculas.

¿En qué se diferencia la temperatura de Curie de la de Curie-Weiss?

¿Cuál es el mecanismo de aparición de los dominios? ¿Por qué los dominios no pueden ser muy grandes?

¿Qué es una substancia antiferroeléctrica?

## Problemas

- 3.1. Calcular la constante dieléctrica relativa del helio para  $p = 101,3 \text{ kPa}$ ,  $t = 15^\circ \text{C}$  si su susceptibilidad dieléctrica atómica  $\alpha = 2,48 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$ . El valor experimental de  $\epsilon_r = 1,000074$ .
- 3.2. Calcular la constante dieléctrica del amoníaco para  $t = 27^\circ \text{C}$ ;  $\alpha = 1,37 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$ ;  $p = 0,46 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ . *Indicación: hacer uso de la fórmula (22.19).*

- 3.3. El momento dipolar permanente de la molécula de agua es  $6,2 \cdot 10^{-30}$  C·m. Determinar la polarización del vapor de agua saturado para  $t = 100$  °C y presión atmosférica.
- 3.4. El aire consta, en lo fundamental, de moléculas de  $N_2$  y  $O_2$ . Según la fórmula de Clausius—Mossotti, hallar los coeficientes de su susceptibilidad atómica, que para mayor simplicidad se toman iguales. Hallar el radio de las moléculas.
- 3.5. Tomando para las moléculas de nitrógeno los valores de  $\alpha$  y  $r_0$ , obtenidos en el problema 3.4, calcular la variación de la distancia entre las cargas que forman el dipolo, en un campo de intensidad de 1 MV/m.

### Respuestas

- 3.1.  $\epsilon_r = 1,000067$ . 3.2.  $\epsilon_r = 1,0076$ . 3.3.  $1,2 \cdot 10^{-4}$  C/m<sup>2</sup>. 3.4.  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-30}$  m<sup>3</sup>;  $r_0 = 0,96 \cdot 10^{-10}$  m. 3.5.  $0,87 \cdot 10^{-16}$  m.

## Corriente eléctrica continua

En presencia de solamente las fuerzas de origen electrostático no puede haber corriente continua. Para que exista se necesitan fuerzas de origen no electrostático, denominadas fuerzas electromotrices exteriores. La ley principal es la de Ohm en la enunciación local:

### § 25. Campo eléctrico en presencia de corrientes continuas

*Se analizan las peculiaridades del campo eléctrico en presencia de corrientes continuas y el papel de las cargas volumétricas y superficiales. Se examina el papel de diversos factores que aseguran la existencia de la corriente continua.*

**Campo dentro del conductor.** La ley de Ohm (véase el § 16) en forma diferencial tiene el aspecto

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (25.1)$$

En presencia de corriente  $\mathbf{j} \neq 0$  y, por lo tanto,  $\mathbf{E} \neq 0$ . De esta manera, dentro del conductor con corriente hay campo eléctrico. Recordemos que en la electrostática no existe campo alguno dentro de los conductores.

*En general la densidad de la corriente continua por la sección del conductor está distribuida no uniformemente.* Para convencernos de ello examinemos una sección de un conductor encorvado con sección transversal circular [se trata de un conductor homogéneo ( $\gamma = \text{const}$ )]. La sección encorvada del conductor debe presentarse como cortada de un trozo de material sin deformar, ya que en el conductor encorvado hay deformación y la condición de homogeneidad para él, hablando en rigor, no se cumple y todo el cuadro de distribución de la densidad de la corriente se complica.

En la proximidad de la superficie del conductor la densidad de la corriente puede dirigirse sólo por la tangente a la superficie. Esto significa [véase (25.1)], que la intensidad  $\mathbf{E}$  del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor es tangente a la superficie. Por lo tanto, las superficies equipotenciales son perpendiculares a la superficie del conductor. Si la sección del conductor está encorvada, es evidente que dos superficies equipotenciales próximas no pueden hallarse a una distancia invariable la una de la otra en todos los puntos dentro del conductor. Por ejemplo, en un conductor anular de sección circular la distancia entre las superficies equipotenciales en la parte interna del anillo es menos que en la externa. Ya que la distancia entre las superficies equipotenciales vecinas varía, cambia también la intensidad del campo eléctrico en los puntos correspondientes de la superficie equipotencial. De aquí [véase (25.1)]

sacamos la conclusión de que en un conductor homogéneo la densidad de la corriente continua en general, varía por la sección del conductor. En un conductor rectilíneo cilíndrico circular de longitud infinita las superficies equipotenciales dentro del conductor son planos, perpendiculares al eje del conductor. Por eso, por toda la sección de semejante conductor homogéneo, tanto la intensidad del campo eléctrico, como también la densidad de la corriente son constantes.

En lo sucesivo, se examinan principalmente sólo los conductores que poseen un área muy pequeña de la sección transversal, denominados lineales. Para esa clase de conductores puede menospreciarse con gran precisión la variación de la densidad de la corriente eléctrica por la sección del conductor, considerando que en cada punto de dicha sección la densidad de la corriente es constante según el módulo y está dirigida a lo largo del elemento de longitud  $dl$  del conductor. La intensidad de corriente que circula por el conductor, es en este caso igual a  $I = j\Delta S$ , donde  $\Delta S$  es el área de la sección transversal del conductor.

Así pues, en el caso general la cuestión sobre la intensidad del campo eléctrico y la densidad de la corriente continua dentro de los conductores gruesos es compleja. La distribución de la densidad de la corriente respecto a la sección depende de una serie de factores y, en particular, de la forma del conductor. Razonamientos más determinados pueden enunciarse sobre la intensidad del campo en las inmediaciones de la superficie del conductor. Cerca de la superficie tanto la intensidad del campo, como la densidad de la corriente están dirigidas de modo tangente a la superficie. Las componentes normales de estas magnitudes respecto a la superficie dentro del conductor están ausentes. De la condición de frontera (17.30) deducimos que en la proximidad de la superficie fuera del conductor hay un campo eléctrico, cuya componente tangencial de la intensidad  $E_t$  es igual a la componente tangencial de la intensidad  $E_t$  del campo dentro del conductor (fig. 107). En cambio, de aquí no se puede deducir nada sobre la componente normal de la intensidad del campo eléctrico fuera del conductor.

**Cuestión sobre las fuentes del campo.** ¿Qué es lo que engendra el campo eléctrico dentro del conductor, qué es la fuente de este campo? Puesto que la existencia de corriente continua en el circuito se asegura por una fuente correspondiente de corriente continua, por ejemplo, por pilas eléctricas, está claro que dicha corriente tiene algo que ver con la creación del campo eléctrico. Sin embargo, la corriente no puede directamente originar ese campo. Semejante afirmación es obvia en el caso de un conductor muy largo para las secciones afines del circuito, alejadas de la pila a una distancia muy grande, por ejemplo, a centenas de kilómetros. La intensidad del campo eléctrico que pueden crear las cargas de los polos de la pila es insignificanmente pequeña a esa distancia. Por lo tanto, la pila no puede ser una fuente directa del campo eléctrico dentro del conductor.

La única fuente del campo eléctrico continuo puede ser la carga eléctrica. Por eso el problema en cuestión se reduce a la interrogante sobre qué cargas engendran el campo dentro de un conductor y dónde se encuentran dichas cargas.

**Campo fuera del conductor.** Para contestar a esta pregunta es necesario estudiar el campo eléctrico fuera del conductor. Coloquemos el conductor con

corriente en un baño plano, cubierto con una capa fina de polvo dieléctrico (fig. 108). Los granos pequeños de polvo se sitúan en cadenas a lo largo de las líneas de fuerza del campo eléctrico (véase el § 19). En la figura se muestran dos secciones del conductor con corriente y la línea de fuerza entre ellas.

Se ve que las líneas de fuerza del campo eléctrico no son tangentes a la superficie del conductor. Eso significa que fuera del conductor cerca de su superficie existe a la par con la componente tangencial de la intensidad  $E_r$  del cam-

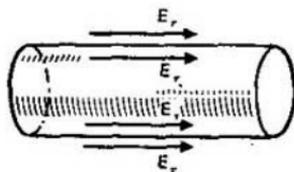


Fig. 107  
El campo dentro del conductor y la componente tangencial de la intensidad en las proximidades de la superficie fuera del conductor

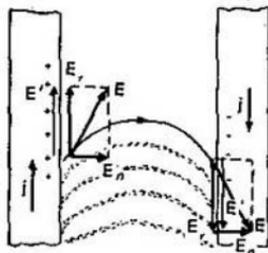


Fig. 108  
Demostración de la existencia de componente normal de la intensidad del campo cerca de la superficie del conductor

po eléctrico, la componente normal  $E_n = 0$ . Por eso de (17.26) deducimos que en la superficie del conductor deben existir cargas, cuya densidad superficial es

$$\sigma = \epsilon_0 E_n. \quad (25.2)$$

En la fórmula (25.2) se supone que el conductor se encuentra en el vacío. Si se sumerge en un medio dieléctrico, en lugar de  $\epsilon_0$  en la fórmula (25.2) participará la constante dieléctrica  $\epsilon$  del medio.

**Cargas superficiales.** Así pues, en la superficie del conductor por el que circula corriente eléctrica continua, existen cargas eléctricas. *Ellas son precisamente las fuentes del campo eléctrico que existe en el conductor y asegura la presencia de la corriente continua.* En diversas secciones del conductor la densidad superficial de la carga puede tener signos diferentes. Por ejemplo, las secciones derecha e izquierda del conductor en la fig. 108 tienen respectivamente densidad superficial negativa y positiva de la carga.

**Cargas volumétricas.** Los conductores homogéneos poseen sólo cargas superficiales. *En los conductores heterogéneos, cuando la conductibilidad varía de un punto a otro, surgen también cargas en el volumen del conductor.* Esto se desprende directamente del principio de conservación de la carga (5.24). En el caso estacional en cuestión  $(\partial\rho/\partial t) = 0$  y la ecuación (5.24) toma la forma

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (25.3)$$

En principio, la carga volumétrica en la substancia puede ser tanto libre, como ligada. A nosotros nos interesa la densidad volumétrica sumaria  $\rho + \rho_{lig}$  de la carga, cuya presencia conduce a la variación de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del conductor. Por eso [véase (17.27)] la densidad volumétrica sumaria de la carga es igual a

$$\rho + \rho_{lig} = \text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \epsilon_0 \text{div}(\mathbf{j}/\gamma), \quad (25.4)$$

donde  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\gamma$ . Teniendo en cuenta (25.3) y la expresión

$$\text{div}(\mathbf{j}/\gamma) = (1/\gamma) \text{div} \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \text{grad}(1/\gamma), \quad (25.5)$$

de (25.4) hallamos

$$\rho + \rho_{lig} = \epsilon_0 \mathbf{j} \cdot \text{grad}(1/\gamma). \quad (25.6a)$$

Dirigiendo el eje  $X$  a lo largo de la sección rectilínea del conductor y considerando que sus propiedades varían sólo en esta dirección, escribimos de nuevo la fórmula (25.6a) en la forma

$$\rho + \rho_{lig} = \epsilon_0 \mathbf{j} \frac{\partial(1/\gamma)}{\partial x}. \quad (25.6b)$$

Si la conductibilidad disminuye en dirección de la corriente, la densidad de las cargas es positiva. La causa consiste en lo siguiente. Siendo el área de la sección del conductor constante, la densidad de la corriente a lo largo del conductor debe ser constante. Si la conductibilidad disminuye en dirección de la corriente, para mantener invariable la corriente es necesario aumentar la intensidad del campo eléctrico. El aumento de la intensidad se asegura precisamente por las cargas positivas volumétricas. De la misma manera se explica la aparición de las cargas negativas volumétricas al aumentar la conductibilidad en dirección de la corriente.

**Mecanismo de realización de la corriente continua.** La fuente de corriente se denomina fuente de fuerzas electromotrices exteriores (fem exteriores; véase el § 26). Según los resultados de su acción, ella representa en sí un proceso o un dispositivo que separa las cargas positivas de las negativas. Después de ser divididas, las cargas se desplazan hacia los electrodos y por la ley de Coulomb influyen sobre las cargas del conductor en las inmediaciones de los electrodos; estas cargas, a su vez, actúan sobre otras cargas, etc. Como consecuencia de esas interacciones colectivas en el circuito, en la superficie de los conductores surge una distribución de las cargas que asegura la existencia del campo eléctrico correspondiente dentro del conductor. Así, pues, *el papel de las cargas en los polos de la fuente de las fem exteriores no consiste en crear en todos los conductores directamente el campo eléctrico correspondiente, sino en asegurar una distribución de las cargas superficiales en los conductores que cree el campo eléctrico necesario dentro de ellos.* Pero esto es precisamente lo que asegura la existencia de corriente continua. Ya que la interacción entre las cargas se efectúa mediante las fuerzas electromagnéticas, el proceso de formación de la corriente continua en el circuito después de su cierre, se caracteriza por la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas que depende de la distribución de las capacidades,

inductancias y otras características del circuito. En el espacio libre la velocidad de propagación de las interacciones electromagnéticas es igual a la velocidad de la luz.

**Variación del potencial a lo largo de un conductor con corriente.** Dado que en el conductor, en presencia de corriente continua  $E \neq 0$ , el potencial varía a lo largo del conductor, es decir, a diferencia de la electrostática el potencial no permanece constante en todos los puntos del conductor. *En cambio, el campo dentro del conductor se forma por las cargas superficiales inmóviles, constantes con el tiempo, y por esta razón, lo mismo que en la electrostática, es de potencial.* Por lo tanto, la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor (fig. 109) según la fórmula (14.28) es igual a

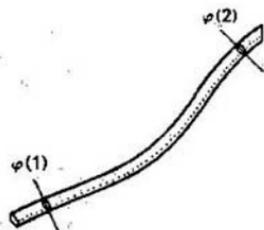


Fig. 109  
Para calcular la diferencia de potencial entre dos puntos de un conductor con corriente

$$\varphi(2) - \varphi(1) = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (25.7)$$

donde la integral se calcula por cualquier camino que una los puntos 1 y 2. Para mayor comodidad de los cálculos, es útil elegir, como camino, una de las líneas de corriente que conecte cierto punto en la sección 1 del conductor con el correspondiente punto de la sección 2. A lo largo de la línea de corriente  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{l}$  son colineales y por eso  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dl$ , con la particularidad de que el signo positivo se determina por el hecho de que la corriente circula en dirección del mayor potencial al menor. Además, si el área de la sección del conductor es constante, a lo largo del conductor  $E = \text{const.}$  Por lo tanto, [véase (25.7)]

$$\varphi(1) - \varphi(2) = EL, \quad (25.8)$$

donde  $l$  es la longitud del conductor entre las secciones 1 y 2. La diferencia de potencial entre las secciones se denomina tensión (voltaje) y se designa por  $U_{12} = \varphi(1) - \varphi(2)$ . Partiendo de la forma diferencial de la ley de Ohm ( $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ ), hallamos

$$\mathbf{E} = \mathbf{j} / \gamma = \mathbf{j} S / (\gamma S) = I / (\gamma S), \quad (25.9)$$

donde  $I$  es la intensidad de corriente. Tomando en consideración (25.9), la relación (25.8) toma la forma

$$U_{12} = I l / (\gamma S) = I R_{12}, \quad (25.10)$$

donde  $R_{12} = l / (\gamma S)$  es la resistencia óhmica de la sección del conductor. La fórmula (25.10) es la ley de Ohm para la sección del conductor.

## § 26. Fem exteriores

*Se discute el papel de las fem exteriores en los circuitos de corriente y se describen las fuentes concretas de las fem exteriores.*

**Esencia de las fem exteriores.** La fuerza electromotriz exterior puede tener origen electrostático por el simple hecho de que el campo electrostático es potencial. Por lo tanto, el trabajo del campo por un circuito cerrado, por el que circula corriente, es igual a cero, o sea, para dicha condición la corriente no podría existir ya que ella debe efectuar trabajo en superar la resistencia óhmica del conductor. La existencia de corriente continua demuestra que *las fuerzas electromotrices exteriores tienen origen no electrostático.*

La fuerza electromotriz exterior puede ser, en particular, una fuerza eléctrica o mecánica, sin ser una fuerza de origen electrostático. Por ejemplo, semejante fem es la fuerza que actúa sobre una carga en el campo eléctrico que surge por la ley de inducción electromagnética de Faraday (véase el capítulo 8).

**Fem exterior mecánica.** La fig. 110 muestra el esquema de la fuente más sencilla de corriente en el que la fem exterior posee origen mecánico. Entre los

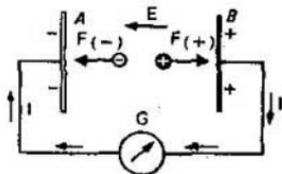


Fig. 110  
Esquema de la acción de las fem  
exteriores de origen mecánico

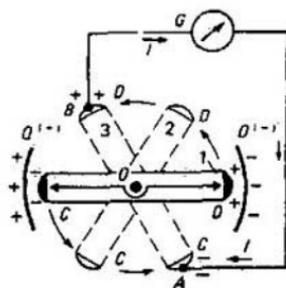


Fig. 111  
Esquema de una máquina elec-  
trostática

electrodos *A* y *B* existe un medio neutro con igual cantidad de cargas positivas y negativas. La fuerza exterior de origen no electrostático desplaza las cargas positivas hacia el electrodo *B*, mientras que las negativas, hacia *A*. Como consecuencia, el electrodo *A* recibe carga negativa y el electrodo *B*, positiva. En el circuito exterior de *B* a *A* circula una corriente eléctrica que efectúa un trabajo correspondiente. La energía necesaria para eso, se comunica al sistema mediante las fuerzas exteriores que gastan cierto trabajo para dividir las cargas entre los electrodos *A* y *B* y hacer llegar estas cargas hasta los electrodos contra las fuerzas del campo eléctrico con intensidad *E* que existe entre los electrodos.

La corriente entre los electrodos  $A$  y  $B$  dentro de la fuente de fem cierra la corriente en el circuito exterior. Si la dirección de la corriente se caracteriza respecto a los electrodos, en el circuito exterior la corriente circula del electrodo positivo al negativo, mientras que dentro de la fuente de corriente, desde el electrodo negativo hacia el positivo.

Una realización práctica de la fem exterior mecánica es la máquina electrostática, cuyo circuito se da en la fig. 111. Las cargas  $Q^+$  y  $Q^-$  crean un campo electrostático en el espacio entre ellas. Las placas conductoras  $C$  y  $D$ , aisladas una de otra, se mueven por una circunferencia alrededor del eje  $O$ , influidas por las fuerzas mecánicas exteriores. En la posición 1 las placas resultan estar unidas entre sí mediante un conductor inmóvil (línea continua con flechas en los extremos). Como consecuencia de la inducción electrostática, las placas  $C$  y  $D$  en esta posición adquieren cargas negativa y positiva, respectivamente. Durante la posterior rotación se interrumpe su contacto con el conductor y en la posición 2 las placas están aisladas una de otra, pero teniendo cargas de diferentes signos. En la posición 3 se ponen en contacto con los electrodos  $A$  y  $B$ , a los que pasa la carga de  $C$  y  $D$ . Entre los electrodos por el circuito  $BGA$  circula corriente eléctrica. Si existe un par de conductores en rotación  $CD$ , la corriente por el circuito circula por impulsos: dos impulsos por una vuelta. Pero si se coge una cantidad grande de placas  $C$ ,  $D$  que se pongan en contacto con los electrodos  $A$ ,  $B$ , sucesivamente con interrupciones infinitesimas, por el circuito exterior pasa una corriente prácticamente continua. Semejante máquina realiza fem exterior de origen mecánico, que surge debido a las fuerzas mecánicas que aseguran el movimiento de las placas  $C$ ,  $D$  por la circunferencia.

La cadena de transformaciones de la energía en este caso se representa de la siguiente manera. Las fuerzas mecánicas exteriores, al desplazar las placas  $C$  y  $D$ , efectúan cierto trabajo contra las fuerzas del campo electrostático que existe entre las cargas  $Q^+$  y  $Q^-$ , y trasladan las cargas en las placas  $C$  y  $D$  a los electrodos  $A$  y  $B$ . Como consecuencia de ello, la energía del campo electrostático varía, es decir, sucede la transformación de la energía de la forma mecánica a la energía del campo eléctrico. Después esta energía, debido a la circulación de la corriente por el circuito  $BGA$ , se convierte en calor de Joule y otras formas de energía, determinadas por el trabajo de la corriente en el circuito exterior.

**Pilas eléctricas (elementos galvánicos).** Las pilas eléctricas y los acumuladores son fuentes de corriente continua muy difundidas. La corriente eléctrica fue descubierta en 1791 por L. Galvani (1737—1798). No obstante, el científico no supo interpretar correctamente sus ensayos. Lo hizo en 1792 A. Volta (1745—1827). Los elementos de corriente continua, de los que se trata aquí, se denominan pilas eléctricas o elementos galvánicos, en honor de Galvani.

La diferencia de potencial (véase el § 2) surge no sólo habiendo contacto de los sólidos, sino que al estar en contacto los sólidos y líquidos. En ese caso pueden tener lugar reacciones químicas. Por ejemplo, si una placa de zinc  $Zn$  se mete en una solución de ácido sulfúrico  $H_2SO_4$ , el zinc se disuelve (fig. 112). Sin embargo, no son los átomos neutros de zinc los que pasan a la solución, sino que los iones positivos  $Zn^{++}$ , a causa de lo cual la solución adquiere carga posi-

tiva y la placa de zinc, negativa. Entre la solución y la placa surge diferencia de potencial. Para cierto potencial del metal con respecto a la solución, denominada electroquímica, cesa el paso de los iones de zinc a la solución. El depende de las propiedades del metal, del líquido y de la concentración de iones de metal en la solución. Al estar el metal en contacto con el agua, el primero obtiene una carga más negativa que al estar en contacto con la solución de sal que contiene iones de metal. Para una concentración grande de iones en la solución puede ocurrir el proceso inverso durante el cual los iones positivos se precipitan en

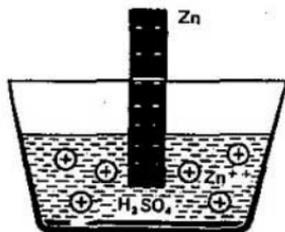


Fig. 112  
Aparición de la diferencia de potencial entre el sólido y líquido

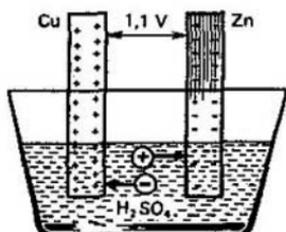


Fig. 113  
Pila de Volta

el metal y éste se carga positivamente. Así, pues, *siendo diferentes las combinaciones de metales, líquidos y concentraciones de los iones, en las soluciones pueden surgir distintos potenciales electroquímicos.*

Puesto que el potencial electroquímico depende de la concentración de iones de metal, se ha acordado tomar una solución que contenga en 1 litro de solución un mol de iones de metal, dividido por la valencia del ion. El potencial químico del metal respecto a semejante solución se llama **potencial electroquímico normal absoluto**. Por ejemplo, para las soluciones en ácido sulfúrico este potencial para Zn es igual a  $-0,5$  V y para Cu,  $+0,6$  V.

Si dos metales distintos se sumergen en la solución, entre ellos surge una diferencia de potencial, igual a la diferencia de sus potenciales electroquímicos. *El conjunto de dos metales y una solución se denomina pila eléctrica (elemento galvánico) y la diferencia de potencial entre los metales, fuerza electromotriz de la pila.*

**Pila de Volta.** Esta consta de placas de zinc y cobre, sumergidas en una solución de ácido sulfúrico (fig. 113). Tomando en consideración los potenciales electroquímicos del zinc y el cobre, deducimos que la fem de la pila de Volta es igual a  $0,6 - (-0,5) \text{ V} = 1,1 \text{ V}$ .

**Zona de acción de las fem exteriores.** No hay que pensar que las fem exteriores aparecen en el espacio entre las placas de zinc y cobre. *En el caso dado existen dos fem exteriores, concentradas en las capas superficiales de contacto de las placas de cobre y zinc con la solución. Estas capas poseen un grosor molecular. En todo el volumen restante de la solución no hay fem exteriores algunas.* Al unir las placas de la pila con un conductor, comienza a circular corriente de la placa

de cobre, que es el electrodo positivo de la pila, a la placa de zinc, que es el electrodo negativo. En la solución entre los electrodos la corriente circula de la placa de zinc a la de cobre. Así, pues, como debe de ser en efecto, las líneas de corriente continua son cerradas.

Examinemos la variación del potencial en un circuito con corriente. En dirección de la corriente el potencial cae en la resistencia óhmica del conductor. La fig. 114 muestra el cambio del potencial por un circuito cerrado con pila de Volta a título de la fuente de fem exterior. Los puntos *A* y *B* corresponden a las capas superficiales de los contactos entre las placas de cobre y zinc y las soluciones en las que actúan fuerzas electromotrices exteriores. Su diferencia

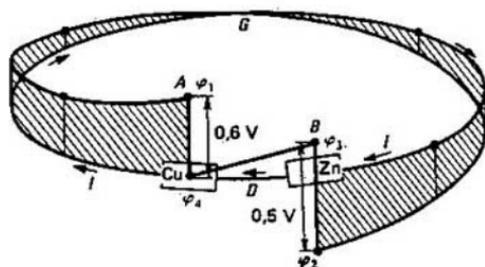


Fig. 114  
Cambio del potencial en un circuito con pila eléctrica

es precisamente la fem exterior de la pila. Es igual a la caída total de potencial en la resistencia óhmica del circuito exterior en la sección *AGB* y en la resistencia óhmica del electrolito en la sección *BDA*. La resistencia óhmica del electrolito se denomina resistencia interna de la pila. Designemos por  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ ,  $R$  y  $r$  la fem exterior de la pila, la resistencia del circuito exterior y la resistencia interna de la pila, respectivamente. Escribamos la ley de Ohm para todo el circuito como

$$\mathcal{E}_{\text{ext}} = I(R + r). \quad (26.1)$$

La fem exterior de la pila se determina por las propiedades de la pila y no depende de la intensidad de la corriente que circula por ella. De la fórmula (26.1) se ve que la caída de tensión en el circuito exterior ( $U = IR$ ) no es igual a la fuerza electromotriz de la pila y es siempre inferior a ella. Es la tensión entre los bornes de la pila en funcionamiento, cuando por el circuito pasa corriente. Al aumentar la intensidad de corriente, la tensión en el circuito exterior disminuye, con la particularidad de que tanto más, cuanto mayor sea la resistencia interna de la pila. Al hacer uso de la pila, es necesario que la tensión en el circuito exterior dependa lo menos posible de la intensidad de corriente, o sea, de la carga. Por eso una característica importante de la pila es la resistencia interna. Cuanto menor es, tanto mejor es la calidad de la fuente de fem exteriores a igualdad de las demás condiciones.

**Principio de conservación de la energía.** Analicemos el principio de conservación de la energía en el circuito con corriente, mostrado en la fig. 114. Designemos el trabajo del campo eléctrico al moverse la carga  $q$  por un circuito cerrado por  $A_1$  y el trabajo de las fem exteriores por  $A_2$ . El campo eléctrico ejerce un trabajo en las secciones en que el potencial cae desde  $\varphi_1$  hasta  $\varphi_2$  (circuito exterior) y desde  $\varphi_3$  hasta  $\varphi_4$  (a causa de la resistencia óhmica de la solución a la corriente dentro de la pila). El trabajo es igual a

$$A_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) q + (\varphi_3 - \varphi_4) q. \quad (26.2)$$

El trabajo de las fem exteriores en las capas de un grosor molecular conduce al aumento de los potenciales desde  $\varphi_4$  hasta  $\varphi_1$  (en la placa de cobre) y desde  $\varphi_2$  hasta  $\varphi_3$  (en la placa de zinc). Por esta razón, el trabajo de las fem exteriores se da mediante la expresión

$$A_2 (\varphi_1 - \varphi_4) q + (\varphi_3 - \varphi_2) q = (\varphi_1 - \varphi_2) q + (\varphi_3 - \varphi_4) q, \quad (26.3)$$

donde la segunda igualdad se obtuvo como consecuencia de la reagrupación de los términos. Comparando (26.2) y (26.3), se ve que

$$A_1 = A_2, \quad (26.4)$$

es decir, el trabajo que se efectúa en el circuito al pasar la corriente, es igual al trabajo de las fem exteriores.

Deduzcamos otra vez más la ley de Ohm (26.1) para todo el circuito, utilizando la ley de Ohm (25.10) para la sección del circuito:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR, \quad \varphi_3 - \varphi_4 = Ir, \quad (26.5)$$

de donde

$$IR + Ir = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_3 - \varphi_4) = (\varphi_1 - \varphi_4) + (\varphi_3 - \varphi_2) = \mathcal{E}_{\text{ext}}. \quad (26.6)$$

**Polarización de la pila.** Al pasar la corriente en el circuito de la pila de Volta, los iones  $\text{Zn}^{++}$  pasan a la solución, donde se unen con los iones negativos de  $\text{SO}_4^-$ , en que a la par con los iones de  $\text{H}_3^{++}$  disocia el ácido sulfúrico. En la solución tiene lugar la reacción  $\text{Zn}^{++} + \text{SO}_4^- = \text{ZnSO}_4$ , cuyos productos se precipitan en forma de sedimento. Los iones positivos de hidrógeno tienden a la placa de cobre, neutralizándose por los electrones de la corriente de conducción en la placa. Como consecuencia, en la superficie de la placa de cobre se forma una película de hidrógeno que, por una parte, aumenta la resistencia interna de la pila, pero por otra parte, crea un potencial electroquímico complementario, dirigido contra el potencial que existía allí antes de formarse la película. Debido a todos estos procesos, la fem de la pila disminuye. Semejantes procesos se denominan polarización de la pila.

**Métodos de despolarización.** Para evitar la caída de fem, se utilizan diversos métodos de despolarización.

1. Utilización de dos líquidos, elegidos de tal manera que en los electrodos no suceda desprendimiento de nuevas sustancias. Para cada electrodo se elige el líquido conveniente. Los líquidos se separan mediante un tabique que,

por una parte, los protege de mezclarse y, por otra, no obstaculiza el intercambio de iones. Verbigracia, en la pila de Daniel en calidad de líquidos se toman el sulfato de cobre  $\text{CuSO}_4$  (vitriolo de cobre) y la solución de  $\text{ZnSO}_4$  (fig. 115), con la particularidad de que en el vitriolo de cobre se sumerge una placa de cobre y en la solución de sulfato de zinc  $\text{ZnSO}_4$ , de zinc. El zinc pasa a la solución del ácido sulfúrico en forma de ion  $\text{Zn}^{++}$ . Los electrones de la placa de cobre pasan a la solución de sulfato de cobre y neutralizan el ion  $\text{Cu}^{++}$ , en definitiva, el cobre se precipita de la solución a la placa de cobre. Los iones  $\text{SO}_4^{--}$  que quedaron en la solución penetran a través del tabique a la otra parte de la pila y se unen con  $\text{Zn}^{++}$ , mientras que el exceso de  $\text{ZnSO}_4$  que se formó a causa de ello, se deposita

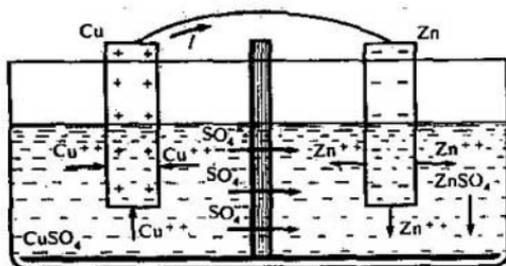


Fig. 115  
Pila de Daniel

en el fondo. De esta manera, al funcionar la pila, no surge polarización alguna, sólo sucede el empobrecimiento de la solución de vitriolo azul  $\text{CuSO}_4$ . Se necesita compensarlo.

2. Utilización de fuertes oxidantes que enlazan el hidrógeno y oxígeno, formando agua.

**Acumuladores.** Es una pila eléctrica en la que las sustancias que se gastan durante el trabajo en calidad de fuente de corriente, se acumulan si se hace pasar a través del acumulador corriente de una fuente constante. Semejante procedimiento se llama carga del acumulador. El más difundido es el acumulador de plomo, que consta de dos placas de plomo, metidas en una solución de ácido sulfúrico. En los electrodos se forma sulfato de plomo  $\text{PbSO}_4$  con el cual se satura toda la solución. Al dejar pasar la corriente por el acumulador durante su carga, va acompañado por la oxidación del plomo del electrodo, unido con el polo positivo del dispositivo de carga, hasta peróxido de plomo  $\text{PbO}_2$ , y la reducción del otro electrodo hasta plomo puro. Así pues, el acumulador cargado tiene una placa con peróxido de plomo  $\text{PbO}_2$  y la otra con plomo puro y un electrolito que consta de una solución de  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , saturada de sulfato de plomo sulfúrico  $\text{PbSO}_4$ . Al funcionar el acumulador, su placa con peróxido de plomo  $\text{PbO}_2$  es el polo positivo y se reduce paulatinamente hasta formarse  $\text{PbSO}_4$ . La placa negativa que consta de plomo puro, al funcionar el acumulador, se cubre

poco a poco de sulfato de plomo. Como consecuencia de ello, el acumulador se descarga. La fem del acumulador de plomo para la carga máxima es aproximadamente de 2,7 V. En cambio, ya durante una descarga pequeña, cae hasta 2,2 V y a este nivel se conserva durante largo tiempo, disminuyendo lentamente sólo trabajando el acumulador. La fem mínima admisible, para la cual la carga restablece totalmente las propiedades del acumulador, se considera igual a 1,85 V. Al descargarse hasta menores fem, el acumulador se estropea.

Una característica importante del acumulador es su capacidad, determinada como la carga total que puede entregar el acumulador durante la descarga y expresada en amperio-horas.

Se llama fem exterior a una fuerza de origen no electrostático que efectúa la división de las cargas.

El trabajo que se realiza en el circuito al pasar la corriente eléctrica, es igual al trabajo de las fem exteriores. La densidad de la corriente continua por la sección del conductor no está distribuida, en general, uniformemente. En la superficie del conductor con corriente existen cargas superficiales que son las fuentes del campo eléctrico que hay en el conductor y que asegura la presencia de la corriente continua.

En distintas secciones del conductor las cargas superficiales pueden tener signos diferentes. El papel de las cargas en los polos de las fuentes de fem exteriores no consiste en crear en todos los conductores directamente un campo eléctrico correspondiente, sino que en asegurar una distribución de las cargas superficiales en los conductores que forma el campo eléctrico necesario dentro de ellos.

Las cargas volumétricas surgen sólo en conductores heterogéneos.

## § 27. Forma diferencial de la ley de Joule—Lenz.

### Trabajo que se efectúa al pasar la corriente y potencia desarrollada

*Se introducen las fórmulas para el trabajo que se efectúa al pasar la corriente y para la potencia desarrollada. Se da la forma diferencial de la ley de Joule—Lenz. Se describe el cuadro electrónico clásico de la electroconductibilidad y se discuten sus defectos. Se exponen los rasgos generales de la interpretación cuántica de la electroconductibilidad.*

**Trabajo que se efectúa al pasar la corriente. Potencia.** Si entre los puntos con una diferencia de potencial  $U$  se traslada una carga  $dQ$ , se efectúa un trabajo

$$dA = dQU. \quad (27.1)$$

Sea que por el conductor circula una corriente  $I$ . Examinemos la sección del conductor, entre cuyos extremos existe una diferencia de potencial  $U$ . En el transcurso del tiempo  $dt$  en la sección se desplaza una carga  $dQ = I dt$  y, por lo tanto, el trabajo realizable es

$$dA = I U dt. \quad (27.2)$$

Por consiguiente, la potencial que desarrolla la corriente en dicha sección se determina por la fórmula.

$$P = dA/dt = IU. \quad (27.3)$$

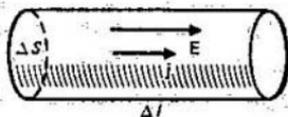


Fig. 116  
Para deducir la ley de Joule  
Lenz en forma diferencial

La forma de energía que se desprende en este caso, depende de la naturaleza de los factores físicos que determinan la caída de potencial. La caída de potencial en la resistencia óhmica de los cables se acompaña por el desprendimiento de calor, la caída de tensión en los bornes del motor de corriente continua se determina por la realización de trabajo mecánico, etc. La fórmula (27.3) da la potencial total que desarrolla la corriente en la sección con la caída de potencial  $U$ . Si toda la caída de potencial transcurre en la resistencia óhmica del conductor, entonces, según la ley de Ohm,  $U = IR$ , donde  $R$  es la resistencia de la sección. En este caso toda la energía se desprende en forma de calor con una potencia

$$P = IU = I^2R, \quad (27.4)$$

La fórmula (27.4) expresa la ley de Joule — Lenz. Fue descubierta en 1841 por J. P. Joule (1818—1889) e investigada posteriormente con más detalle por F. A. Lenz.

Forma diferencial de la ley de Joule — Lenz. Aplicando la ley (27.4) a un cilindro infinitésimo (fig. 116), cuyo eje coincide con la dirección de la corriente, obtenemos

$$\Delta p = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}, \quad (27.5)$$

donde  $I = j\Delta S$ ,  $j$  es la densidad de la corriente. La resistencia de un cilindro infinitésimo es igual a  $\Delta R = \Delta l / (\gamma\Delta S)$ . Tomando en consideración que  $\Delta S\Delta l = \Delta V$  es el volumen del cilindro, de (27.5) hallamos

$$P_V = \Delta P / (\Delta l \Delta S) = j^2 / \gamma, \quad (27.6)$$

donde  $P_V$  es la densidad volumétrica de la potencia térmica que se desprende en el conductor, es decir, del calor que se forma en  $1 \text{ m}^3$  de conductor por 1 s. La fórmula (27.6) es la forma diferencial de la ley de Joule—Lenz, ya que todas las magnitudes se refieren a un mismo punto.

Haciendo uso de la ley de Ohm en forma diferencial, transformemos (27.6):

$$P_V = j^2 / \gamma = \gamma E^2 = j \cdot E. \quad (27.7)$$

Cualquiera de estas igualdades, cuando en el primer miembro figura  $P_V$ , es la escritura de la ley de Joule—Lenz en forma diferencial. A pesar de que la fórmula (27.6) fue deducida para una sección cilíndrica infinitésima del conductor, su validez no está relacionada con la forma de un volumen infinita-

mente pequeño, ya que todas las magnitudes que participan en ella, dependen exclusivamente de sus valores en el punto y no son funciones de otros factores.

**Fuente de energía para el trabajo de la corriente eléctrica.** La caída del potencial en el circuito con corriente se compensa por la correspondiente elevación del potencial que surge debido a la acción de las fuerzas electromotrices exteriores sobre las cargas (véase el § 26). Al pasar la corriente, se efectúa cierto trabajo y se libera energía, por ejemplo, en forma de calor. Las fuerzas electromotrices exteriores ejecutan trabajo sobre las cargas, comunicándoles una energía correspondiente. Por eso resulta que *todo el trabajo que realiza la corriente, se efectúa a cuenta de la energía de las fuerzas electromotrices exteriores.*

**Dedución de la ley de Ohm, partiendo del cuadro electrónico de la electroconductibilidad.** El mecanismo de la circulación de la corriente por un conductor y su calentamiento en los márgenes de las representaciones clásicas tienen el siguiente aspecto.

El electrón libre se acelera por el campo que existe dentro del conductor. La ley de Newton para el movimiento del electrón es:

$$ma = eE, \quad (27.8)$$

donde  $m$ ,  $a$ ,  $e$  son la masa, la aceleración y la carga del electrón, respectivamente. El movimiento real del electrón es muy complicado, puesto que los electrones se encuentran en un movimiento térmico caótico. Bajo la influencia de un campo exterior todos ellos obtienen una misma aceleración, adquiriendo también una velocidad complementaria en una misma dirección. En definitiva, se forma un movimiento ordenado de los electrones, es decir, corriente eléctrica. En este caso nos interesa sólo el mencionado movimiento coordinado de los electrones que se sobrepone en su movimiento térmico. En su movimiento los electrones actúan recíprocamente entre sí y con los átomos de la red cristalina del conductor. Al interactuar con los átomos de la red cristalina, los electrones intercambian una parte pequeña de su energía con ellos. Dicha energía es, en término medio, la energía adquirida por los electrones a cuenta del campo eléctrico, ya que en ausencia del campo eléctrico, los electrones libres y los átomos se encuentran en equilibrio térmico. Este cuadro complejo de cómo los electrones adquieren la energía, influenciados por el campo eléctrico y su transmisión posterior a los átomos al actuar recíprocamente, puede imaginarse de la siguiente manera. Supongamos que el electrón, conforme a la ecuación (27.8), se acelera durante un tiempo  $\tau$ , luego choca con el átomo y le entrega toda la energía cinética que recibió. Después empieza de nuevo a acelerarse, al cabo de cierto tiempo  $\tau$  de nuevo choca con el átomo, etc., es decir,  $\tau$  es el tiempo de relajamiento de la distribución desequilibrada de los electrones hacia el equilibrio térmico con la red cristalina. En el modelo se supone que en el transcurso de este tiempo la energía cinética media de los electrones crece bajo la influencia de un campo eléctrico exterior, más de su energía térmica media, luego el exceso de la diferencia entre ambas energías se transmite mediante la red cristalina y se restablece de nuevo el equilibrio térmico. En realidad, claro que este proceso sucede continuamente y su carácter escalonado se introdujo sólo para simplificar los cálculos matemáticos. El tiempo  $\tau$  caracteriza la velocidad de retorno

al equilibrio térmico del conjunto de electrones y de la red cristalina del conductor si por ciertas razones (pero no sólo por el campo eléctrico exterior) el conjunto de electrones pierde ese equilibrio.

En este cuadro el resultado de numerosas transmisiones de la energía del electrón a los átomos se sustituye por una. Por eso  $\tau$  tiene el sentido de lapso medio entre las colisiones. Si  $l$  es la longitud media del recorrido entre las colisiones,  $v$ , la velocidad media del electrón, determinada por su movimiento térmico, según la definición,

$$\tau = l/v. \quad (27.9)$$

El camino que pasa el electrón del estado de reposo, acelerándose por el campo eléctrico, es igual a

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{eE}{m_e} \tau^2. \quad (27.10)$$

Es, en término medio, el camino de desplazamiento del electrón hacia la acción del campo eléctrico durante el tiempo  $\tau$  entre las colisiones. El desplazamiento coordinado se determina por la deriva de los electrones con una velocidad

$$v_{\text{der}} = s/\tau = eEl/(2m_e v). \quad (27.11)$$

La velocidad de la deriva es inversamente proporcional a la frecuencia  $v/l$  de las colisiones y, por tanto, disminuye al subir la temperatura.

Si  $n$  es la concentración de electrones,

$$j = env_{\text{der}} = e^2 l n E / (2m_e v). \quad (27.12)$$

Comparando (27.12) con la ley de Ohm  $j = \gamma E$ , hallamos la siguiente expresión para la conductividad eléctrica:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{e^2 l n}{m_e v}. \quad (27.13)$$

Así pues, se obtiene la dependencia correcta entre la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico, asimismo la expresión de la conductividad eléctrica por medio de la característica del movimiento de los electrones libres.

Deducción de la ley de Joule—Lenz partiendo de la teoría electrónica de la electroconductibilidad. La velocidad que pierde el electrón al chocar es

$$v_t = a\tau = \frac{eE}{m_e} \frac{l}{v}. \quad (27.14)$$

Por eso a los átomos durante cada colisión se les transmite la energía cinética

$$W_{\text{cin}} = \frac{m_e v_t^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2 l^2}{m_e v^2}, \quad (27.15)$$

que se adquiere entre las colisiones.

La frecuencia de las colisiones de cada electrón con los átomos es igual a  $v/l$ , y la frecuencia de las colisiones de  $n$  electrones con los átomos,  $nv/l$ . Por esta razón, la densidad volumétrica de la potencia del desprendimiento de ca-

lor se da mediante la expresión

$$P_v = W_{cin} \frac{nv}{l} = \frac{1}{2} \frac{e^2 n l}{m_e v} E^2 = \gamma E^2, \quad (27.16)$$

donde se tienen en cuenta las igualdades (27.13) y (27.15). De esta manera, partiendo de la teoría electrónica de la electroconductibilidad, se obtiene la expresión correcta para la ley de Joule—Lenz en forma diferencial.

**Defectos de la teoría clásica de la electroconductibilidad.** La teoría clásica de la electroconductibilidad es muy evidente y ofrece una dependencia correcta entre la densidad de corriente y la cantidad de calor desprendido respecto a la intensidad del campo. *En cambio, ella no conduce a resultados cuantitativos correctos.* Las principales diferencias de la teoría y el experimento consisten en lo siguiente:

1) para obtener de la fórmula (27.13) valores correctos de  $\gamma$  es necesario considerar  $l$  muy grande ( $l$  supera miles de veces las distancias interatómicas en el conductor). Es difícil comprender en los márgenes de las representaciones clásicas la posibilidad de recorridos libres tan grandes;

2) el experimento para la dependencia entre la conductividad  $\gamma$  y la temperatura conduce a la ley  $\gamma \sim 1/T$ . Es imposible explicarla mediante la fórmula (27.13), ya que la teoría cinética de los gases nos da  $v \sim \sqrt{T}$ . En el cuadro clásico de interacción no se puede admitir la dependencia  $l \sim 1/\sqrt{T}$ ;

3) según el teorema de la equipartición de la energía respecto a los grados de libertad, es de esperar una contribución muy elevada por parte de los electrones libres en la capacidad térmica de los conductores que no se observa en los ensayos.

**Rasgos principales de la representación cuántica de la electroconductibilidad.** Sólo la teoría cuántica permitió superar las dificultades recién mencionadas, de las representaciones clásicas. *La teoría cuántica toma en consideración las propiedades ondulatorias de las micropartículas.* La característica más importante del movimiento ondulatorio es la capacidad de contornear los obstáculos merced a la difracción. Como consecuencia, en su movimiento los electrones aparentan contornear los átomos sin chocar con ellos y las longitudes de su recorrido libre pueden ser bastante grandes. Dado que los electrones se someten a la estadística de Fermi—Dirac, en la formación de la capacidad calorífica electrónica pueden participar sólo una parte insignificante de electrones en las proximidades del nivel de Fermi. Por esta razón, la capacidad calorífica electrónica de los conductores es insignificante. La solución del problema cuántico sobre el movimiento del electrón en un conductor metálico conduce a la dependencia  $\gamma \sim 1/T$ , como en realidad se observa. Así pues, sólo en los márgenes de la mecánica cuántica se construyó una teoría cuantitativa de electroconductibilidad sin contradicción alguna.

El trabajo que se efectúa al pasar la corriente no es consecuencia de la transformación de la energía cinética de los electrones en otras formas de energía. El portador de la energía que se gasta para realizar el trabajo no son los electrones, sino el campo electromagnético. Sólo en el caso particular de expulsión del calor de Joule la energía cinética de los electrones

es la forma intermedia de energía, mediante la cual la energía del campo electromagnético se convierte en calor. En otros casos la energía cinética de los electrones no desempeña ningún papel.

¿Qué sentido tiene el tiempo de recorrido libre en la teoría clásica de la electroconductibilidad?

¿Cuáles son las dificultades principales de la teoría clásica de la electroconductibilidad?

¿De qué manera se superan en rasgos generales?

## § 28. Circuitos lineales. Leyes de Kirchhoff

*Se enuncian las reglas para calcular los circuitos lineales.*

**Circuito cerrado aislado.** En el § 26 ya se examinó este caso, representando su resultado mediante la fórmula (26.1): *si en un circuito cerrado aislado existe una fuente de fem exteriores, la intensidad de corriente en el circuito debe ser tal que la caída sumaria de tensión en la resistencia exterior y en la resistencia interna de la fuente sea igual a la fem exterior de la fuente.* Si hay varios fuentes de fem exteriores, es necesario tomar su suma con signos, tomando en calidad de fem positiva la fem de una dirección determinada.

Para no confundirse de signos es cómodo hacer lo siguiente. Tomamos como dirección positiva o bien el rodeo del circuito en sentido de las agujas del reloj, o bien en sentido contrario a las agujas del reloj. En la fig. 117 se toma el rodeo positivo en sentido de las agujas del reloj. Las fuerzas electromotrices de las pilas se designan por  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ . De antemano no se sabe en qué dirección circula la corriente. Por eso elegimos cualquier dirección de la corriente, por ejemplo, en la fig. 117 ella coincide con la dirección positiva de rodeo.

Ahora es necesario quedar de acuerdo respecto a los signos. Se considera que el signo de la fem es positivo si al moverse por el circuito en sentido positivo se choca primero con el polo negativo de la fuente. Pero si se encuentra primero el polo positivo, la fem correspondiente tendrá el signo negativo. El signo de la intensidad de corriente se considera positivo si la dirección de la corriente coincide con la del rodeo. En caso contrario, el signo es negativo. De esta manera, tanto la fem, como la intensidad de corriente son magnitudes algebraicas que pueden obtener valores tanto positivos, como negativos. Ahora no será difícil generalizar la ecuación (26.1) para una cantidad arbitraria de fuentes de fem exteriores en un circuito cerrado aislado: *el producto del valor algebraico de la intensidad de corriente por la suma de las resistencias exteriores e internas en todas las secciones del circuito cerrado es igual a la suma de los valores algebraicos en el circuito cerrado:*

$$\pm I \sum_k R_k = \sum_i \pm \mathcal{E}_i, \quad (28.1)$$

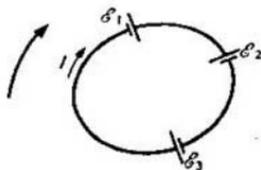


Fig. 117  
Circuito cerrado aislado

donde  $\pm$  delante de  $I$  y de  $\mathcal{E}_i$  significa que el signo debe elegirse conforme a las reglas citadas más arriba. Por ejemplo, para el caso representado en la fig. 117 la ecuación (28.1) tiene la forma

$$I(R + r_1 + r_2 + r_3) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3, \quad (28.2)$$

donde  $r_1, r_2, r_3$  son las resistencias internas de las fem exteriores y  $R$ , la impedancia de todas las secciones del circuito fuera de las fuentes. Si para la misma

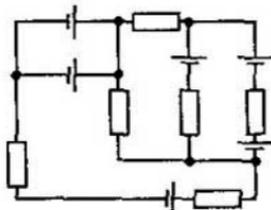


Fig. 118  
Circuito eléctrico

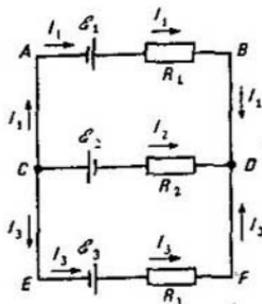


Fig. 119  
Para determinar los circuitos cerrados y los nudos del circuito derivado

dirección de rodeo, considerada positiva, la flecha que representa la corriente  $I$  estuviese orientada de manera contraria, en lugar de la ecuación (28.2) se obtendría la siguiente:

$$-I(R + r_1 + r_2 + r_3) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (28.3)$$

La ecuación (28.3) hay que resolverla respecto a  $I$ . Si en un caso concreto  $I$  es positiva, la corriente circula como muestra la flecha, pero si  $I$  es negativa, en sentido contrario.

**Circuitos derivados.** En muchos casos, importantes para la práctica, los circuitos eléctricos son más complejos como, por ejemplo, en la fig. 118. En cambio, en el circuito de cualquier complejidad participan elementos de dos tipos sencillos:

- 1) nudos en los que se encuentran más de dos conductores (fig. 119; puntos  $C$  y  $D$ );
- 2) circuitos cerrados (fig. 119; circuitos  $ABDCA$ ,  $CDFEC$ ,  $ABFEA$ ).

**Leyes de Kirchhoff.** Las leyes de Kirchhoff sirven para componer un sistema de ecuaciones del que se hallan las intensidades de corriente para el circuito derivado de cualquier grado de complejidad. *Son la inscripción de la ley de Ohm (28.1) para cada uno de los circuitos cerrados y del principio de conservación de la carga en cada nudo.* Las reglas de los signos para las intensidades de corriente y para la fem en cada uno de los circuitos cerrados son las mismas que para el

circuito aislado [véase (28.1)]. La dirección del rodeo positivo para todos los circuitos se elige la misma. El principio de conservación de la carga en los nudos exige que la suma de las intensidades de corrientes que entran en el nudo, sea igual a la suma de las intensidades de corrientes que salen de éste, o hablando de otra manera, la suma de los valores algebraicos de las intensidades de corrientes en el nudo debe ser nula. Al componer la suma de las intensidades de corrientes que muestran las flechas con la dirección desde el nudo, se cogen, por ejemplo, con el signo menos, mientras que las intensidades de las corrientes que dan las flechas con dirección hacia el nudo, con el signo más. Claro que se pueden tomar los signos contrarios, ello no cambia las ecuaciones correspondientes, solamente es importante aplicar una misma regla para todos los nudos.

Así pues, las leyes de Kirchhoff dicen que:

1) la suma de los valores algebraicos de las intensidades de corrientes en cada nudo es nula:

$$\sum_k (\pm) I_k = 0. \quad (28.4)$$

2) la suma de los productos de los valores algebraicos de las intensidades de corrientes por la resistencia de las secciones correspondientes de cada uno de los circuitos cerrados es igual a la suma de los valores algebraicos de las fem exteriores en cada circuito cerrado:

$$\sum_k \pm I_k R_k = \sum_i (\pm) \mathcal{E}_i; \quad (28.5)$$

Puede demostrarse que el sistema de ecuaciones, obtenido en este caso, para cualquier circuito derivado es completo y permite determinar todas las corrientes.

Todas estas leyes las dedujo G. R. Kirchhoff (1824—1887). El científico formuló la solución general del problema sobre los circuitos derivados de corriente continua en 1847, a pesar de que las propias leyes las enunció ya en 1845. Apliquemos las leyes de Kirchhoff al circuito mostrado en la fig. 119.

1. Según la primera ley de Kirchhoff:

a)  $-I_1 - I_2 - I_3 = 0$  (nudo C);

b)  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$  (nudo D).

2. Según la segunda ley de Kirchhoff:

a)  $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$  (circuito ABDCA).

b)  $I_2 R_2 + I_2 r_2 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = -\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3$  (circuito CDFEC).

c)  $I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_3 r_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  (circuito ABFEA).

Aquí  $r_1, r_2, r_3$  son las resistencias internas de las fuentes de las fem exteriores. Las ecuaciones para los nudos coinciden, pero sólo dos ecuaciones de las tres según los circuitos, son independientes. Verbigracia, si se suman las dos primeras ecuaciones miembro a miembro, se obtiene la tercera. Así pues, existe un sistema de tres ecuaciones para tres intensidades incógnitas de corriente  $I_1, I_2, I_3$ . Después de resolver este sistema, hallamos las intensidades de co-

riente y sus direcciones verdaderas. Pero incluso sin resolver dicho sistema puede decirse: en la fig. 119 nos hemos equivocado con seguridad en la elección de las direcciones de la corriente, puesto que en los nudos para las direcciones de corriente elegidas el principio de conservación de la carga no puede cumplirse a ciencia cierta: en el nudo *C* debe almacenarse la carga negativa y en el nudo *D*, la positiva. Pero eso no nos debe preocupar ya que la solución nos dice automáticamente cuales deben ser las direcciones de las corrientes.

De esta manera el ejemplo muestra que si se escriben las leyes de Kirchhoff para todos los circuitos y todos los nudos, resultan más ecuaciones que las necesarias, ya que no todas las ecuaciones son independientes. Para no complicar el trabajo es indispensable no escribir las ecuaciones sobrantes. Con ese fin se puede guiar de las siguientes reglas. Al escribir la siguiente ecuación para los circuitos cerrados es necesario fijarse de que ella contenga por lo menos una magnitud que no entró en las ecuaciones anteriores; si todas las magnitudes ya participaron en las ecuaciones anteriores, dicha ecuación es sobrante. Hacemos lo mismo al escribir las ecuaciones para los nudos. Por ejemplo, arriba en las ecuaciones para la segunda ley de Kirchhoff no se debía escribir la ecuación *c*) ya que todas las magnitudes que participan están en las ecuaciones *a*) y *b*) En las ecuaciones de la primera ley de Kirchhoff la ecuación *b*) es sobrante ya que todas las magnitudes en ella participan en la ecuación *a*). El posterior control de la veracidad del sistema escrito de ecuaciones consiste en constatar su completitud, o sea, la cantidad de ecuaciones debe ser igual a la cantidad de incógnitas.

¿Cómo se eligen los signos en las reglas de Kirchhoff?

¿De qué razones hay que guiarse para no escribir ecuaciones sobrantes de Kirchhoff?

## § 29. Corrientes en un medio continuo

*Se expone el método de cálculo de las intensidades de corrientes en medios continuos.*

**Planteamiento del problema.** La corriente eléctrica puede existir no sólo en los conductores. Verbigracia, el suelo (sobre todo el húmedo) es conductor de la corriente eléctrica. Se pregunta ¿qué resistencia a la corriente eléctrica afronta el suelo si a cierta distancia uno de otro se sumergen en él los extremos de dos conductores, unidos con los polos de la fuente de fem? O de otra manera, ¿cuál es la resistencia de una chapa metálica voluminosa a la que se le sueldan dos conductores que provienen de los polos de la fuente de fem? A título de resistencia de la chapa voluminosa o del medio a la corriente eléctrica se toma la relación entre la diferencia de potencial que existe entre los electrodos que suministran la corriente, y la intensidad de corriente. A pesar de que la conductividad del medio se conoce, el cálculo de la resistencia no es una tarea fácil. Pero es fácil

medir dicha resistencia por métodos estándar, hallando la diferencia de potencial y la intensidad de corriente.

**Deducción de la fórmula.** Examinemos un medio continuo homogéneo con electrodos, sumergidos en él, entre los cuales circula corriente eléctrica. Las líneas de densidad de corriente coinciden con las de la intensidad del campo eléctrico en el medio, ya que

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (29.1)$$

La intensidad de corriente a través de la superficie cerrada  $S$  que rodea uno de los electrodos, es igual a

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (29.2)$$

Ahora imaginémosnos que el medio conductor se oprime y los electrodos se consideran como armaduras del condensador. Según la definición de la capacidad  $C$  del condensador tenemos

$$Q = CU, \quad (29.3)$$

donde  $Q$  es la carga del electrodo y  $U$ , la diferencia de potencial entre los electrodos. Según el teorema de Gauss, obtenemos

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0, \quad (29.4)$$

donde  $\mathbf{E}$  es la intensidad del campo del condensador y  $S$ , la misma superficie que en (29.2). En cambio, debido a la unicidad de la solución de los problemas de la electrostática, la diferencia de potencial dada entre los electrodos prefijados determina unívocamente la intensidad del campo. Por lo tanto, la intensidad del campo en un medio conductor, por el que circula corriente [véase (29.2)], coincide con la intensidad del campo que se crea en el vacío entre los mismos electrodos para la misma diferencia de potencial [véase (29.4)]. Por eso, de (29.2) y (29.4) teniendo en cuenta (29.3), sacamos la conclusión de que

$$I = \gamma Q/\epsilon_0 = \gamma CU/\epsilon_0. \quad (29.5)$$

Entonces la resistencia del medio homogéneo a la corriente se da mediante la fórmula

$$R = U/I = \epsilon_0/(\gamma C). \quad (29.6)$$

Señalemos que *todos estos razonamientos no pueden aplicarse a un medio heterogéneo*, puesto que en éste al pasar corriente, se forman cargas volumétricas que son fuentes de un campo eléctrico. En este caso el campo eléctrico en el medio, al pasar corriente continua, no coincide con el campo en el vacío, a pesar de que los electrodos están bajo la misma diferencia de potencial.

**Condiciones de aplicación de (29.6).** La fórmula (29.6) permite calcular la resistencia del medio a la corriente si se conoce la capacidad del condensador, cuyas armaduras sirven de electrodos. Los resultados se obtienen tanto más exactos, cuanto mejor se observa la constancia del potencial de los electrodos, al

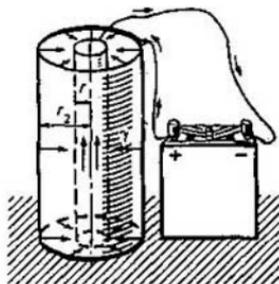


Fig. 120  
Para calcular la resistencia del medio entre electrodos coaxiales

Para calcular la resistencia del medio entre electrodos coaxiales, se necesita calcular la resistencia del medio que rodea al conductor interno. La corriente en el medio circula en todo el volumen del medio por los radios entre el alma central y la envoltura. Dado que la capacidad del condensador cilíndrico  $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(r_2/r_1)$ , la resistencia del medio es igual a

$$R = \ln(r_2/r_1)/(2\pi l\gamma). \quad (29.7)$$

**Medio heterogéneo.** Si la conductividad no es constante, el problema se complica considerablemente, ya que surgen cargas volumétricas y es necesario tomar en consideración el campo eléctrico que originan.

Examinemos como ejemplo las corrientes eléctricas en la atmósfera. Como muestra el experimento, cerca de la superficie terrestre existe un campo eléctrico con una intensidad  $E^{(v)} \approx -100$  V/m, dirigida por el radio respecto al centro de la Tierra. La Tierra es un conductor bastante bueno y por eso puede considerarse que en ella hay carga superficial

$$\sigma_0 = \epsilon_0 E^{(v)} = -8,85 \cdot 10^{-10} \text{ C/m}^2. \quad (29.8)$$

Las mediciones muestran que la conductividad de la atmósfera terrestre aumenta con la altura. La causa principal consiste en la acción de los rayos cósmicos que provoca la ionización. En alturas grandes la fuente fundamental de ionización resulta la radiación del Sol. La atmósfera puede considerarse un conductor prácticamente ideal a la altura de cerca de 50 km. Como muestran las mediciones, la dependencia entre la conductividad y la altura puede representarse con suficiente exactitud como

$$\gamma(r) = \gamma_0 + A(r - r_0)^2. \quad (29.9)$$

Aquí  $r_0$  es el radio de la Tierra;  $r$ , la distancia desde el centro de la Tierra hasta el punto en cuestión;  $\gamma_0 = \gamma(r_0)$ , la conductividad de la superficie terrestre;

A, una constante, con la particularidad de que

$$\gamma_0 = 3 \cdot 10^{-14} \text{ S/m}, \quad (29.10)$$

$$A = 0,5 \cdot 10^{-20} \text{ S/m}^3. \quad (29.11)$$

En término medio, el campo en la atmósfera de la Tierra es estacionario y esféricamente simétrico. Por eso la ecuación de continuidad para la densidad de la corriente adquiere la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) = 0, \quad (29.12)$$

de donde

$$j_r(r) = j_0 r_0^2 / r^2, \quad (29.13)$$

donde  $j_0$  es la densidad de corriente en la superficie terrestre ( $r = r_0$ ), igual a

$$j_0 = \gamma_0 E^{(0)} = -3 \cdot 10^{-12} \text{ A/m}^2. \quad (29.14)$$

Puesto que el radio de la Tierra  $r_0 \approx 6 \cdot 10^6$  m, la intensidad de la corriente desde la atmósfera a la Tierra es igual a  $I = |j_0| 4\pi r_0^2 \approx 1400$  A. La intensidad del campo eléctrico en la atmósfera a la distancia  $r$  desde el centro de la Tierra es

$$E_r = \frac{j_r(r)}{\gamma(r)} \quad (29.15)$$

y por eso la diferencia de potencial  $U$  entre la superficie terrestre y la atmósfera superior, cuya conductividad es prácticamente infinita, se determina por la fórmula

$$U = - \int_{r_0}^{\infty} E_r dr = - j_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \gamma(r)}. \quad (29.16)$$

Aquí la zona de integración se amplía hasta el infinito, ya que  $\gamma(r)$  a alturas mayores que unos 50 km tiende al infinito, mientras que el integrando a cero. No obstante, también puede obtenerse una precisión suficiente durante el cálculo, tomando para  $\gamma$  la expresión (29.9). En este caso la contribución en la integral de parte de la zona de integración para  $r > r_0 + 50$  km es muy pequeño en comparación con la contribución de la zona de integración desde  $r_0$  hasta  $r_0 + 50$  km y se puede menospreciar. Por eso en lugar de (29.16) obtenemos

$$U = - j_0 r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 [\gamma_0 + A(r-r_0)^2]}. \quad (29.17)$$

Esta integral se calcula fácilmente en funciones elementales, pero el resultado es bastante voluminoso, por lo que aquí no se cita. Con suficiente precisión hasta una magnitud del orden de  $[\gamma_0 / (r_0^2 A)] \ll 1$ , la integral puede representarse como

$$U = - \frac{j_0}{A r_0} \left[ 1 + \ln \frac{\gamma_0}{A r_0^2} + \frac{\pi r_0}{2} \sqrt{\frac{A}{\gamma_0}} \right]. \quad (29.18)$$

Poniendo en (29.18) los valores de  $j_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $A$ , de las expresiones (29.14), (29.10) y (29.11), hallamos  $U \approx 400$  kV.

Merced a la corriente que circula constantemente por la atmósfera de una intensidad cerca de 1400 A, esa diferencia de potencial debe disminuir y la carga superficial terrestre, neutralizarse. El tiempo de relajamiento para el mencionado proceso tiene el orden de  $\tau = \epsilon_0/\gamma_0 \approx 300$  s. En cambio, en término medio, tanto la intensidad de la corriente, como la diferencia de potencial son estacionarios. Por eso existen causas que mantienen dicho carácter estacionario. Esas causas son principalmente los procesos no estacionarios en la atmósfera, tales como las tempestades, tormentas, etc.

Las propiedades más importantes de la puesta a tierra de las líneas de transmisión es la independencia entre la resistencia y la distancia entre los electrodos. Las secciones del medio que limitan directamente con los electrodos contribuyen principalmente en la resistencia.

La fórmula que expresa la resistencia del medio a través de la capacidad del condensador, cuyas armaduras son los electrodos, es válida sólo a condición de que en presencia de la corriente el potencial en todos los puntos de cada una de las armaduras sea continuo con una precisión suficientemente elevada y en el medio no surjan cargas volumétricas.

Para ello la conductancia específica del material de los electrodos debe superar bastante la del medio y este último tiene que ser eléctricamente homogéneo.

¿En que consiste la condición de aplicación de la fórmula para la resistencia del medio entre los electrodos por medio de la capacidad del condensador que forman los electrodos?

### § 30. Puesta a tierra de las líneas de transmisión

*Se aclara la base física de la posibilidad de puesta a tierra y se estudian las exigencias a este proceso.*

**Planteamiento del problema.** Dado que la conductividad eléctrica del terreno es bastante considerable, surge la interrogante sobre el empleo de la tierra a título de conductor de la corriente eléctrica. El circuito eléctrico en este caso se da en la fig. 121 ( $A$  y  $B$  son los electrodos, enterrados en la tierra). Está claro que así puede reducirse el gasto de cables aproximadamente el doble.

**Cálculo de la resistencia.** Hallemos la resistencia de un medio continuo, considerando que los electrodos son esferas de radios  $r_0$ . Designemos la distancia entre los centros de los electrodos por  $d$ . Para simplificar los cálculos supongamos que el medio es ilimitado (fig. 122) y la carga se distribuye en los electrodos de manera esféricamente simétrica.

Sea  $x$  la distancia desde el centro del electrodo izquierdo hasta cierto punto que yace en la línea que une los centros de los electrodos. La intensidad del campo en este punto es

$$E = E_{(+)} + E_{(-)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2} \right). \quad (30.1)$$

La diferencia de potencial entre los electrodos

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{r_0}^{d-r_0} E \, dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{(d-x)} \right]_{r_0}^{d-r_0} = \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{d-r_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{1}{d-r_0} \right). \quad (30.2)
 \end{aligned}$$

En la mayoría de los casos prácticamente importantes la distancia entre los electrodos es mucho mayor que las dimensiones de los electrodos, es decir,



Fig. 121  
Circuito de puesta a tierra de la línea de transmisión

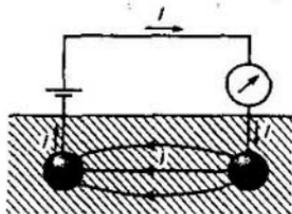


Fig. 122  
Para calcular la resistencia del medio para electrodos esféricos

$d \gg r$ . Por eso la igualdad (30.2) toma el aspecto

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}. \quad (30.3)$$

Basándonos en lo dicho en el § 29, tenemos

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \gamma Q / \epsilon_0, \quad (30.4)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente en el medio y  $S$ , la superficie cerrada que rodea uno de los electrodos. Partiendo de (30.3) y (30.4), para la resistencia del medio obtenemos

$$R = U/I = (2\pi\gamma r_0)^{-1}. \quad (30.5)$$

La propiedad más importante de la resistencia en (30.5) es su independencia de la distancia entre los electrodos. Desde el punto de vista físico eso se explica por el hecho de que al aumentar la distancia entre los electrodos crece respectivamente el área eficaz del medio por el que circula la corriente. El aumento de la distancia entre los electrodos aumenta la resistencia, mientras que el aumento del área, la disminuye. Como muestra la fórmula (30.5) estos dos factores se compensan prácticamente y la resistencia resulta ser independiente de la distancia.

Por lo tanto, la contribución principal en la resistencia del medio proviene de las secciones que limitan directamente con los electrodos. Por esta razón, es

muy importante asegurarles una buena conductividad. Para este fin se usan electrodos que poseen un área grande de superficie y los entierran a una profundidad bastante grande donde la presencia de las aguas subterráneas garantiza una buena conductividad del suelo.

**Verificación experimental.** Dos electrodos planos, unidos con los polos de una pila de fem exteriores se sumergen en un líquido débilmente conductor

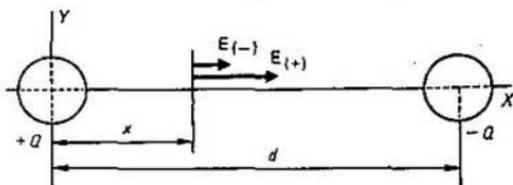


Fig. 123  
Para calcular la resistencia del medio para electrodos esféricos

(fig. 124), por ejemplo, en agua fluvial. Por el circuito pasa cierta corriente. Cambiando la distancia entre los electrodos vemos que a distancias suficientemente grandes (en comparación con las dimensiones lineales de los electrodos) eso no influye en las indicaciones del amperímetro. Por lo tanto, la resistencia del medio a las condiciones indicadas, no depende de la distancia entre los electrodos.

**Tensión de paso.** Dado que en el medio circula corriente, existe un campo eléctrico y un potencial que varía en el espacio.

Supongamos que tuvo lugar la ruptura de la línea de transmisión de alta tensión y el extremo del cable de longitud  $L$  está sobre la tierra. En los sectores que lindan con el conductor en el suelo hay corriente eléctrica. Si cerca de ese lugar camina una persona, entre los puntos de contacto de sus pies y la tierra existe una diferencia de potencial, denominada tensión de paso. Como consecuencia, la corriente eléctrica, cuya intensidad depende de dicha diferencia de potencia, atraviesa el cuerpo humano.

Calculemos la tensión de paso. A causa de que la longitud del cable es grande, puede considerarse que la corriente que proviene de él, circula hacia adentro de la tierra por direcciones, perpendiculares al cable. Las superficies equipotenciales son superficies de semicilindros, cuyos ejes coinciden con el cable (fig. 124). Supongamos que el hombre va en dirección, perpendicular al cable, la distancia entre su pie, próxima al cable, y el cable es  $d$  y la longitud del paso  $l$ . Considerando que la corriente del cable fluye

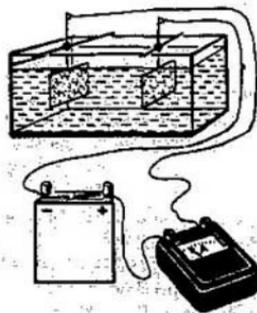


Fig. 124  
Demostración de la independencia de la resistencia del medio respecto a la distancia entre los electrodos

uniformemente en la zona semicilíndrica, para la densidad de la corriente a la distancia  $r$  del cable obtenemos

$$j = I/(\pi r L). \quad (30.6)$$

Entonces la intensidad del campo a lo largo de los radios, perpendiculares al cable, es igual a

$$E_r = j/\gamma = I/(\pi r L \gamma). \quad (30.7)$$

Por consiguiente, la tensión de paso

$$U_p = \int_d^{d+l} E_r dr = \frac{I}{\pi \gamma L} \ln \frac{d+l}{d}. \quad (30.8)$$

Por ejemplo, para  $I = 500$  A,  $d = 1$  m,  $l = 65$  cm y  $L = 30$  m, hallamos  $U_p = 270$  V. Para otras condiciones y configuraciones de los cables pueden surgir tensiones mucho mayores. Por eso al caer

los cables de alta tensión sobre la tierra surge una situación peligrosa no sólo al estar en contacto directo el cable y el hombre, sino también debido a la aparición de voltajes tipo tensión de paso.

La independencia de la resistencia respecto a la distancia entre los electrodos en un medio ilimitado se determina por el hecho de que la sección transversal efectiva del área que atraviesa la corriente es proporcional a la distancia entre los electrodos.

**Ejemplo 30.1.** Un toma de tierra semiesférico se ha metido en la tierra al nivel de su superficie (fig. 125). Hallar la tensión bajo la cual puede resultar afectada una persona que se acerca al toma de tierra (la tensión de paso). La intensidad de corriente  $I$  que circula por el hilo está prefijada. La longitud del paso es  $l$  y la distancia entre el pie del hombre que está más cerca del toma de tierra, y el toma de tierra es igual a  $r_0$ . Estudiar el ejemplo numérico:  $\gamma = 10^{-3}$  S/m,  $I = 1$  A,  $r_0 = 2$  m,  $l = 1$  m.

La intensidad de corriente del toma de tierra es uniforme por todas las direcciones y por eso el vector de densidad de la corriente está dirigido por el radio vector respecto al toma de tierra y es igual a

$$j_r = I/(2\pi r^2).$$

La intensidad del campo eléctrico es, según la ley de Ohm,  $E_r = j_r/\gamma = I/(2\pi r^2 \gamma)$ . Por lo tanto, la tensión de paso

$$U_p = \int_{r_0}^{r_0+l} E_r dr = \frac{I}{2\pi \gamma} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi \gamma} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+l} \right) = 2,7 \text{ V.}$$

## Problemas

- Una esfera de cobre de 10 cm de diámetro se mete en una taza semiesférica de cobre con un diámetro de 20 cm, que está llena de agua, de tal manera que la esfera y la taza son concéntricas. La conductividad del agua es igual a  $\gamma = 10^{-3}$  S/m. Determinar la resistencia eléctrica entre la esfera y la taza.
- Un electrodo esférico pequeño de radio  $a$  se ubica en un medio con una conductividad  $\gamma$  a la distancia  $d$  respecto al otro electrodo que es en sí una placa grande con buena conduc-

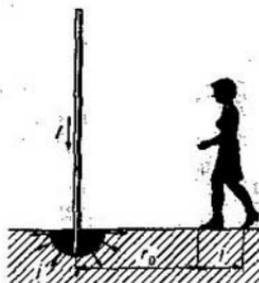


Fig. 125

Para calcular la tensión del paso al aproximarse al hilo semiesférico de puesta a tierra

tancia. Hallar la resistencia del medio a la corriente eléctrica que circula entre los electrodos.

- 4.3. Hallar la resistencia del medio a la corriente entre dos electrodos concéntricos, cuyos radios son  $r_1$  y  $r_2$ . La conductividad del medio es  $\gamma$ .
- 4.4. Hallar la resistencia entre los puntos  $A$  y  $B$  del circuito, mostrado en la fig. 126. La resistencia de los lados de los cuadrados pequeños es  $R$ .
- 4.5. Entre dos electrodos planos con un área  $S$  cada uno, cuyas dimensiones lineales son mucho más grandes que la distancia  $d$  entre ellos, se encuentra un material conductor,

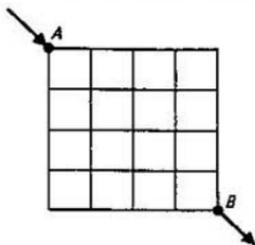


Fig. 126

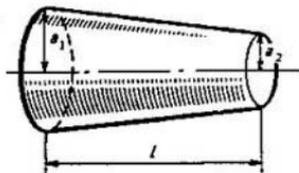


Fig. 127

cuya conductividad varía linealmente desde  $\gamma_1$  en la superficie de un electrodo hasta  $\gamma_2$  en la superficie del segundo. Hallar la resistencia del medio entre los electrodos.

- 4.6. Hallar la resistencia de un conductor cónico de sección circular, cuyas dimensiones se indican en la fig. 127. La conductividad del material del conductor es  $\gamma$ .
- 4.7. El espacio entre dos electrodos paralelos infinitos planos que se encuentran a la distancia  $d$  el uno del otro, está lleno de dos capas de substancia, cuya frontera es plana y paralela a los electrodos. Las conductividades y susceptibilidades dieléctricas de las substancias de las capas son respectivamente iguales a  $\gamma_1, \epsilon_1$  y  $\gamma_2, \epsilon_2$ , y el grosor de cada capa,  $a$  y  $d - a$ . A los electrodos se les aplican unos potenciales  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Hallar el potencial y la densidad superficial de la carga en la superficie de separación de las capas.

## Respuestas

4.1.  $R = 1590$  Ohmios. 4.2.  $R = [1 - a/(2d)] / (4\pi\gamma a)$ . 4.3.  $R = \frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$ .

4.4.  $R_{AB} = \frac{47}{22} R$ . 4.5.  $R = \frac{d \ln(\gamma_2/\gamma_1)}{S(\gamma_2 - \gamma_1)}$ . 4.6.  $R = \frac{1}{\pi\gamma a_1 a_2}$ . 4.7.  $\varphi = \frac{\varphi_1 \gamma_1 (d-a) + \varphi_2 \gamma_2 a}{\gamma_1 (d-a) + \gamma_2 a}$ ;

$$\sigma = \frac{(\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1)(\varphi_1 - \varphi_2)}{\gamma_1 (d-a) + \gamma_2 a}$$

## Electroconductibilidad

Los mecanismos de la electroconductibilidad son multiformes. Lo común entre ellos es sólo el enlace indisoluble con el movimiento de las cargas. En dependencia del mecanismo de la electroconductibilidad, las propiedades de la substancia y las condiciones de la aparición de la corriente eléctrica, las regularidades que describen la electroconductibilidad varían en amplios límites.

### § 31. Electroconductibilidad de los metales

*Se describen los hechos experimentales fundamentales, relacionados con la electroconductibilidad de los metales, y su interpretación teórica.*

**Demostración de que en los metales no existe transferencia de la substancia por la corriente eléctrica.** Mucho antes de descubrir los electrones se demostró experimentalmente que el paso de la corriente en los metales, a diferencia de la corriente en los electrolitos líquidos, no está relacionado con la transferencia de la substancia del metal. La prueba consistió en que a través del contacto de dos metales diferentes, por ejemplo, el oro y la plata, durante cierto tiempo que contaba muchos meses, se dejaba pasar corriente eléctrica continua. Después de ello se investigaba el material en las inmediaciones de los contactos. Fue demostrado que no existe transferencia alguna de la substancia a través de la superficie de separación de diferentes metales, y la substancia por las distintas partes de la superficie de separación posee la misma composición que antes de dejar pasar la corriente. Dichos ensayos mostraron que *los átomos y las moléculas de los metales no participan en la transferencia de la corriente eléctrica*, pero no dieron respuesta alguna sobre la naturaleza de los portadores de la carga en los metales.

**Ensayos de Tolman y Stewart.** Una demostración directa de que la corriente eléctrica en los metales se determina por el movimiento de los electrones, fueron los ensayos de Tolman y Stewart, realizados en 1916. La idea de estos experimentos fue enunciada por Mandelshtam y Papaleksi en 1913.

Imaginémonos una bobina conductora que puede girar alrededor de su eje. Con ayuda de contactos corredizos los extremos de la bobina se cortocircuitan en un galvanómetro (fig. 128). Si la bobina que está girando rápidamente se frena bruscamente, los electrones libres en el conductor continúan el movimiento por inercia, debido a lo cual el galvanómetro debe registrar el impulso de corriente.

La aceleración lineal de la bobina durante el frenado se designa por  $v$ . Está dirigida por la tangente a la superficie de la bobina. Siendo el devanado

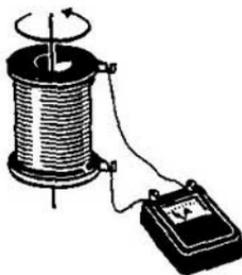


Fig. 128  
Experimento de Tolman y Stewart

bastante denso y los cables finos, puede considerarse que la aceleración está dirigida a lo largo de los cables. Al frenar la bobina, a cada electrón libre se le aplica una fuerza de inercia  $m_e \dot{v}$ , orientada en sentido contrario a la aceleración ( $m_e$  es la masa del electrón). Influida por ella, el electrón se comporta en el metal como si sobre él actuase cierto campo eléctrico eficaz:

$$E_{ef} = -m_e \dot{v} / e. \quad (31.1)$$

Por esta razón, la fuerza electromotriz eficaz en la bobina, determinada por la inercia de los electrones libres, es igual a

$$\mathcal{E}_{ef} = \int_L E_{ef} dl = -\frac{m_e}{e} \dot{v} \int_L dl = -\frac{m_e}{e} \dot{v} L, \quad (31.2)$$

donde  $L$  es la longitud del cable en la bobina. Todos los puntos del cable se frenan con la misma aceleración y por eso  $\dot{v}$  en (31.2) se saca fuera del signo de la integral.

Designando por:  $I$  la intensidad de la corriente que circula por un circuito cerrado, y  $R$ , la resistencia de todo el circuito, incluyendo la resistencia de los cables de la bobina y los cables del circuito exterior y del galvanómetro, escribamos la ley de Ohm como

$$IR = m_e \dot{v} L / e. \quad (31.3)$$

La cantidad de electricidad que pasa por la sección transversal del conductor en el transcurso de cierto tiempo  $dt$  para la intensidad de la corriente  $I$ , es igual a

$$dQ = I dt = -\frac{m_e}{e} \frac{L}{R} \dot{v} dt = -\frac{m_e}{e} \frac{L}{R} dv. \quad (31.4)$$

Por eso durante el tiempo de frenado de la bobina desde la velocidad lineal inicial  $v_0$  hasta la parada completa, la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro es

$$Q = \int dQ = \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} \int_{v_0}^0 dv = \frac{m_e}{e} \frac{L}{R} v_0. \quad (31.5)$$

El valor de  $Q$  se encuentra por las indicaciones del galvanómetro y los valores de  $L$ ,  $R$  y  $v_0$  son conocidos. Por esta razón, puede hallarse tanto el signo, como el valor absoluto de  $e/m_e$ . Los experimentos mostraron que  $e/m_e$  corresponde a la relación entre la carga del electrón y su masa. Así pues, se demostró que la corriente que se observa con ayuda del galvanómetro, se determina por el movimiento de los electrones.

Sobre la teoría de las bandas. La base de la teoría cuántica de la electroconductibilidad de los sólidos la compone la teoría de las bandas que se funda-

menta en el análisis del espectro energético de los electrones (véase el § 2). El espectro eléctrico se divide en zonas, separadas por intervalos prohibidos. Si en la zona superior donde hay todavía electrones, éstos no rellenan todos los estados cuánticos, es decir, dentro de los límites de la zona existe la posibilidad de redistribuir la energía e impulsos de los electrones, la substancia correspondiente es conductor de la corriente eléctrica. La zona entonces se denomina banda de conducción y la substancia correspondiente es conductor de la corriente eléctrica con el tipo de conducción por electrones. Si en la banda de conducción hay muchos electrones y estados cuánticos libres, la electroconductibilidad es suficientemente grande. Solamente los electrones en la banda de conducción son portadores de las cargas que confeccionan la corriente eléctrica. Su movimiento se somete a las leyes cuánticas. La cantidad de estos electrones es una parte pequeña de la cantidad total de electrones. Merced a ello, se eliminan las dificultades de la teoría clásica de la electroconductibilidad (véase el § 27).

**Dependencia entre la resistencia y la temperatura.** No sólo en los metales la contribución principal en la electroconductibilidad proviene del movimiento de los electrones. Por ejemplo, en los semiconductores con tipo de conducción por electrones el movimiento de los electrones es también el contribuidor principal en la transferencia de la carga eléctrica. Una de las diferencias más características de la electroconductibilidad en estos dos casos es el carácter de la dependencia entre la conductividad y la temperatura.

El experimento muestra que *la resistividad de los conductores metálicos aumenta al subir la temperatura, es decir, la conductividad disminuye*. A temperatura no muy baja la dependencia entre la conductividad y la temperatura tiene la forma  $\gamma \sim 1/T$ .

En cambio, *la conductividad de algunas substancias, por ejemplo, de los cristales, semiconductores, electrolitos, etc., aumenta con la temperatura*. A pesar de que los mecanismos del aumento de la conductividad es diferente, ellos se reducen, a fin de cuentas, al incremento de la cantidad de portadores de las cargas eléctricas, merced a cuyo movimiento se efectúa la corriente eléctrica. En los metales la cantidad de portadores, o sea, de electrones libres, no depende prácticamente de la temperatura y la resistencia a la corriente, se determina solamente por su capacidad de formar un movimiento coordinado bajo la influencia del campo eléctrico, es decir, por su movilidad. Pero ésta disminuye, al subir la temperatura.

**Efecto Hall.** Sobre las cargas, cuyo movimiento determina la corriente, actúa la fuerza de Ampère (9.23). La densidad de esta fuerza puede escribirse como

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = ne\mathbf{v}_{\text{der}} \times \mathbf{B}, \quad (31.6)$$

donde  $n$ ,  $e$  son la concentración y la carga, cuyo movimiento determina la corriente, y  $\mathbf{v}_{\text{der}}$  es la velocidad de la deriva de la carga.

Bajo la acción de la fuerza con densidad  $\mathbf{f}$ , las cargas en el conductor en presencia del campo magnético, cuya inducción es perpendicular a la densidad de la corriente  $\mathbf{j}$ , tienden a desplazarse en dirección de la fuerza (fig. 129, a). Como resultado, en la parte correspondiente de la superficie del conductor se

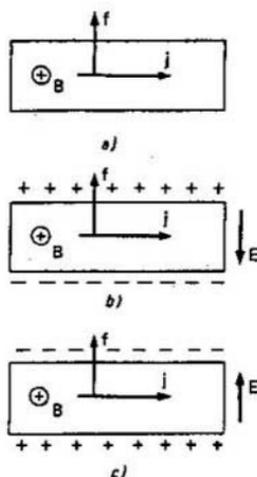


Fig. 129  
Efecto Hall

campo eléctrico, denominado **campo Hall**:

$$E_{ef} = v_{der} B. \quad (31.7)$$

Por consiguiente, entre las superficies del conductor se crea una diferencia de potencial (fig. 129, b).

$$U = \int_0^d v_{der} B dx = v_{der} B d, \quad (31.8)$$

donde  $d$  es el grosor del conductor. Tomando en consideración que  $j = nev_{der}$ , escribamos (31.8) como

$$U = djB/(ne) = RjBd, \quad (31.9)$$

donde

$$R = 1/(ne) \quad (31.10)$$

es el **coeficiente Hall**. La diferencia de potencial puede medirse. Las demás magnitudes, a excepción de la concentración  $n$  de las cargas y su signo, son conocidas. *Por el signo de la diferencia de potencial puede determinarse el signo de la carga de los portadores, cuyo movimiento crea la corriente, mientras que por la diferencia de potencial se define su concentración.*

Notemos que las fórmulas (31.9) y (31.10) coinciden con las fórmulas correspondientes de la teoría más completa del efecto Hall, cuando se tienen en cuenta la distribución de los electrones respecto a las velocidades, las características

forma un exceso de cargas del mismo signo que el de las cargas que confeccionan la corriente. Por eso, si la corriente se determina por el movimiento de las cargas positivas, se crea la distribución de la densidad superficial de las cargas mostrada en la fig. 129, b, y la fig. 129, c representa la distribución para el movimiento de las cargas negativas. Entre las partes opuestas del conductor aparece diferencia de potencial y un campo eléctrico, cuya intensidad  $E$  neutraliza la acción de la densidad de fuerza (31.6). La dirección de la intensidad depende del signo de las cargas, que originan la corriente, y el módulo se determina por los factores de los que depende la densidad de fuerza (31.6). La aparición de la diferencia de potencial en un conductor con corriente en el campo magnético se denomina **efecto Hall**. Fue descubierto en 1879.

La inducción  $B$  del campo y la velocidad  $v_{der}$  de las cargas son mutuamente perpendiculares. La razón entre la densidad de la fuerza (31.6) y la carga de la misma manera que (31.4) puede considerarse como la intensidad eficaz del

estadísticas de sus colisiones, etc. Pero los cálculos resultan muy voluminosos, por lo que aquí no se citan.

Los resultados de las mediciones mostraron que en los metales la corriente se crea por el movimiento de las cargas negativas. La concentración de los portadores es aproximadamente igual a la concentración de los átomos, es decir, una carga que participa en la formación de la corriente, corresponde aproximadamente a un átomo de metal, a pesar de que este número varía en límites determinados. Los portadores de las cargas que crean la corriente en los metales, son los electrones. Lo dicho significa que en los metales a un átomo le corresponde, en término medio, cerca de un electrón libre. Por ejemplo, 0,7 electrones le corresponde a un átomo de plata; 0,8, al átomo de cobre; 0,9, al de oro; unos dos electrones, al átomo de aluminio. Recordemos que la concentración general de los átomos de los metales, y por tanto, de los electrones libres es próxima a  $n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

La investigación del efecto Hall en otros casos mostró que éste no siempre se determina por el movimiento de las cargas negativas. Cuando el signo de la diferencia de potencial en el efecto Hall corresponde al movimiento de las cargas positivas, el efecto se denomina anómalo.

El efecto Hall es uno de los fenómenos galvanomagnéticos. Este término une los fenómenos que surgen en un conductor con corriente que se encuentra en un campo magnético. La esencia física de todos estos fenómenos consiste en que la electroconductibilidad del conductor en un campo magnético exterior no es una magnitud escalar, sino un tensor. La intensidad del campo eléctrico transversal, denominado campo Hall, se suma con la intensidad del campo eléctrico que determina la existencia de corriente en ausencia del campo magnético. Como consecuencia de ello, la intensidad del campo eléctrico forma con la densidad de corriente cierto ángulo, llamado ángulo Hall. Es decir, las direcciones de la densidad de corriente y la intensidad del campo eléctrico no coinciden. Dichas magnitudes están relacionadas por la fórmula tensorial

$$j_i = \sum_k \gamma_{ik} E_k,$$

en la que  $\gamma_{ik}$  es el tensor de la electroconductibilidad. En las sustancias anisótropas la conductividad se describe también por el tensor de la electroconductibilidad en ausencia del campo magnético exterior.

**Magnetorresistencia.** Otro fenómeno importante galvanomagnético es la variación de la resistencia del conductor, colocado en un campo magnético transversal (efecto de magnetorresistencia). Como muestra el experimento la variación relativa de la conductividad eléctrica  $\Delta\gamma/\gamma$  para los campos no muy fuertes, se expresa por la fórmula

$$\Delta\gamma/\gamma = -\kappa_1 B^2,$$

donde  $\kappa_1$  es el coeficiente de magnetorresistencia que depende de las propiedades del material y  $B$ , la inducción del campo magnético.

Este fenómeno es consecuencia del carácter tensorial de la electroconductibilidad del conductor en un campo magnético. En definitiva, surge una com-

ponente de la intensidad del campo eléctrico, colineal a la corriente, lo que precisamente origina la variación de su intensidad que se manifiesta en el cambio de la resistencia.

**Movilidad de los electrones.** La ley de Ohm  $j = \gamma E$  puede escribirse como

$$nev_{\text{der}} = \gamma E. \quad (31.11)$$

Se llama *movilidad*  $b$  de los electrones a la relación entre la velocidad de deriva y la intensidad del campo eléctrico:

$$b = v_{\text{der}} E. \quad (31.12)$$

Tomando en consideración (31.11), obtenemos

$$b = \gamma / (ne). \quad (31.13)$$

La conductividad del metal se conoce y  $ne$  puede hallarse del efecto Hall, o sea, la medición del efecto Hall permite encontrar la movilidad de los electrones en el conductor. En los metales la movilidad de los electrones tiene el orden de

$$b \sim 10^{-4} \dots 10^{-3} \text{ m}^2/(\text{V}\cdot\text{s}). \quad (31.14)$$

Así pues, la velocidad de deriva de los electrones en los metales es muy pequeña en comparación con las velocidades corrientes del movimiento de las micropartículas. *La elevada conductividad de los metales está condicionada principalmente por la gran concentración de portadores de cargas ( $n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ), pero no por su gran movilidad (véase (31.13)):*

$$\gamma = enb \sim 10^{-19} \cdot 10^{28} \cdot 10^{-3} \text{ S/m} = 10^6 \text{ S/m}.$$

La mayoría de los electrones de los dieléctricos están ligados rígidamente a los átomos por lo que hay muy pocos portadores libres de carga. Por eso, *a pesar de que la movilidad de estos portadores de cargas no se diferencia mucho de la de los electrones libres en los metales, la conductividad de los dieléctricos es muy pequeña. La concentración de portadores en los semiconductores varía en amplios límites desde  $10^{19}$  hasta  $10^{25} \text{ m}^{-3}$  y las movilidades se encuentran dentro de los márgenes aproximadamente desde  $10$  hasta  $10^{-4} \text{ m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ , es decir, son grandes. Merced a tales amplios límites de variación de la concentración de portadores y sus movilidades, la conductividad de los semiconductores varía dentro de amplios límites, en muchos órdenes de magnitudes. Sin embargo, no se logró aún obtener una conductibilidad de los semiconductores tan elevada como la de los metales, conservando, claro está, la dependencia característica para los semiconductores entre la conductividad y la temperatura (el aumento de la conductividad con la temperatura).*

**Superconductividad.** En 1911 H. Kamerlingh Onnes descubrió que a  $T = 4,2 \text{ K}$  el mercurio, por lo visto, pierde totalmente la resistencia a la corriente eléctrica. La disminución de la resistencia transcurre bruscamente en un intervalo de varias centésimas de grado. En lo sucesivo se observó la pérdida de la resistencia en otras sustancias puras, así como en muchas aleaciones. El

propio fenómeno recibió el nombre de superconductividad. Las temperaturas de transición al estado superconductor son diferentes, pero siempre muy bajas.

**Temperatura crítica.** Al provocar una corriente eléctrica en un anillo de superconductor con ayuda de la inducción electromagnética, puede observarse que su intensidad no disminuye en el transcurso de varios años. Eso permite hallar el límite superior de la resistividad de los superconductores (inferior a  $10^{-25} \Omega \cdot m$ ). Es muchos órdenes menos que, por ejemplo, la resistividad del cobre a baja temperatura ( $10^{-12} \Omega \cdot m$ ). *Por esta razón, se considera que la resistencia eléctrica de los superconductores es nula.* La resistencia, antes de pasar al estado superconductor, suele ser muy distinta. Muchos de los superconductores a temperatura ambiente tienen una resistencia bastante elevada. La transición al estado superconductor se efectúa siempre de manera muy brusca. La transición de los monocristales puros ocupa un intervalo de temperaturas menos que una milésima de grado.

Entre las sustancias puras el aluminio, cadmio, zinc, indio, y el galio poseen superconductividad. La propiedad de superconductividad depende de la estructura de la red cristalina. Verbigracia, el estaño blanco es superconductor y el gris no; el mercurio posee propiedad superconductor sólo en la fase alfa.

**Campo crítico.** En 1914 K. Onnes descubrió que *el estado superconductor se perturba por el campo magnético cuando la inducción magnética  $B$  supera cierto valor crítico.* Este último depende del material del superconductor y de la temperatura.

El campo crítico que elimina la superconductividad, puede crearse por la propia corriente superconductor. Por esta razón, existe una intensidad crítica de la corriente para la que se perturba la superconductividad.

**Efecto Meissner.** En 1933 Meissner y Ochsenfeld descubrieron que *dentro de un cuerpo superconductor no existe por completo campo magnético alguno.* Al enfriar el superconductor en un campo magnético continuo, en el momento de la transición al estado superconductor el campo magnético se desplaza totalmente de su volumen. Esto es lo que diferencia el superconductor del conductor ideal, en el cual al descender la resistividad hasta cero, la inducción del campo magnético en el volumen debe permanecer invariable. El fenómeno de desplazamiento del campo magnético del volumen del superconductor se denomina efecto Meissner. El mencionado efecto y la ausencia de la resistencia eléctrica son las propiedades más importantes del superconductor.

**Corriente superficial.** La ausencia de campo magnético en el volumen del superconductor permite hacer la deducción, partiendo de las leyes generales del campo magnético (véase el capítulo 6) de que *en él existe sólo la corriente superficial. Desde el punto de vista físico, es real y por eso ocupa una capa fina en las inmediaciones de la superficie.* El campo magnético de la corriente aniquila el campo magnético exterior dentro del superconductor. En este sentido, el superconductor se comporta formalmente como un diamagnético ideal (véase el § 41). Pero en cambio, él no es un diamagnético ya que dentro del superconductor la imanación es nula.

**Superconductores de primero y segundo géneros.** Las sustancias puras, en las que se observa el fenómeno de superconductividad, son poco numerosas.

Las aleaciones poseen con más frecuencia la superconductividad. En las sustancias puras tiene lugar el efecto Meissner total, mientras que en las aleaciones no ocurre el desplazamiento completo del campo magnético del volumen (efecto Meissner parcial). *Las sustancias que manifiestan el efecto Meissner total se denominan superconductores de primer género y el efecto parcial, superconductores de segundo género.*

El volumen de los superconductores de segundo género tiene corrientes circulares que crean un campo magnético, el cual, sin embargo, no llena todo el volumen, sino que está distribuido en él en forma de hilos aislados. En lo que se refiere a la resistencia, ella es nula lo mismo que en los superconductores de primer género.

**Explicación de la superconductividad.** Según su naturaleza física, la superconductividad es la superfluidez del líquido que consta de electrones. La superfluidez surge a causa de que cesa el intercambio de energía entre el componente superfluido del líquido y sus otras partes, debido a lo cual desaparece la fricción. Lo esencial de ello es la posibilidad de «condensar» las moléculas de líquido en el nivel más bajo de energía, separado de los demás niveles por una ranura energética, bastante amplia, la que las fuerzas de interacción no están en condiciones de superar. En eso consiste la causa de la interrupción de la interacción. Para muchas partículas la posibilidad de estar en el nivel inferior requiere que se sometan a la estadística de Bose—Einstein, es decir, que tengan el spin entero.

Los electrones se someten a la estadística de Fermi—Dirac y por eso no pueden «condensarse» en el nivel inferior de energía y formar un líquido electrónico superfluido. Las fuerzas de repulsión entre los electrones se compensan en un grado considerable por las fuerzas de atracción de los iones positivos de la red cristalina. En cambio, merced a las oscilaciones térmicas de los átomos en los nudos de la red cristalina, entre los electrones puede surgir una fuerza de atracción. Entonces ellos se unen en pares. *Los pares de electrones se comportan como partículas con spin entero, es decir, se someten a la estadística de Bose—Einstein. Ellos pueden condensarse y crear una corriente de líquido superfluido—pares electrónicos que es la que forma la corriente eléctrica superconductora.* Más arriba del nivel inferior de energía existe una ranura energética la cual el par electrónico no puede superar a expensas de la energía de interacción con las demás cargas, es decir, no puede cambiar su estado energético. Por esta razón: la resistencia eléctrica está ausente.

La posibilidad de formar pares electrónicos y de su superfluidez se explican mediante la teoría cuántica.

La gran diferencia en la conductibilidad de los conductores, semiconductores y dieléctricos no se determina por la desigualdad de la movilidad de los portadores de cargas, sino, que, principalmente, por la gran distinción de la concentración de los portadores.

**Ejemplo 31.1.** *La dependencia entre la resistencia y la temperatura es muy importante para el funcionamiento de muchos dispositivos, lo que se ve bien en el ejemplo del trabajo de una bombilla corriente. El filamento se hace de tungsteno. A temperaturas entre 300 y 3000 K la conductividad del tungsteno y la luminosidad energética  $M$ , es decir, la densidad superficial del flujo de emisión desde la superficie, pueden representarse mediante las fórmulas:  $\gamma = 0,95 \times$*

$10^{10} T^{-2/3}$  S/m;  $M = 6,6 \cdot 10^{-12}$  T<sup>3</sup> W/m<sup>2</sup>, donde  $T$  es la temperatura termodinámica. Calcular el diámetro  $d$  y la longitud  $l$  del filamento para que la bombilla radie una potencia  $P$  para la tensión  $U$  y la temperatura  $T$  del filamento. Las pérdidas de energía en la conductibilidad térmica del filamento son menoscupablemente pequeñas. Estimar las exigencias de precisión al confeccionar el filamento.

Tenemos

$$R = \frac{U^2}{P}, \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{4l}{\pi d^2}, \quad P = \pi M l d,$$

de donde

$$d = \left( \frac{4P^2}{\pi^2 \gamma U^2 M} \right)^{1/3}, \quad l = \left( \frac{\gamma P U^2}{4\pi M^2} \right)^{1/3}.$$

Dado que  $\gamma M \sim T^{3/6}$ ,  $\gamma/M^2 \sim T^{-11/2}$ , la dependencia de la longitud y el grosor del filamento respecto a la temperatura es bastante fuerte. Por eso el error en mantener el diámetro y la longitud del filamento, al confeccionarlo, influye en la temperatura y, por tanto, en la composición espectral de la luz que se emite. Las tolerancias se someten a unas exigencias muy rigurosas.

## § 32. Electroconductibilidad de los líquidos

*Se describe el mecanismo de la electroconductibilidad de los líquidos y la dependencia entre la electroconductibilidad y diversos factores*

**Disociación.** Los líquidos puros, por lo general, son malos conductores de la electricidad. Eso está determinado por el hecho de que constan de átomos y moléculas eléctricamente neutros, cuyo movimiento no puede crear una corriente eléctrica. Sin embargo, las soluciones de sales, ácidos y álcalis en el agua y en algunos otros líquidos dejan pasar bien la corriente. Esto está relacionado con que las moléculas de la sustancia disuelta disocian, es decir, se desintegran en iones positivos y negativos. El movimiento coordinado de los iones asegura la transferencia de las cargas eléctricas, o sea, la corriente. *Si al disolverse, las moléculas no disocian, la solución no es conductor de la electricidad.*

**Cálculo de la electroconductibilidad.** Designemos la concentración de los iones de cada signo en la solución por  $N = N^{(+)} + N^{(-)}$ . Para la densidad de corriente puede escribirse la fórmula

$$j = q (b^{(+)} + b^{(-)}) NE, \quad (32.1)$$

donde  $q$  es el módulo de la carga de los iones;  $b^{(+)}$  y  $b^{(-)}$ , las movilidades de los iones positivos y negativos [véase (31.12)].

Basándose en (31.12), la velocidad de deriva de los iones es proporcional a la intensidad:

$$v_{\text{der}}^{(\pm)} = b^{(\pm)} E. \quad (32.2)$$

En general, la movilidad de los iones positivos y negativos es diferente. La movilidad de los iones en los líquidos no es grande y habitualmente es de diezmillonésimas del metro elevado al cuadrado por segundo-voltio.

La concentración de iones depende del grado de disociación, que se caracteriza por el coeficiente de disociación  $\alpha$ , determinado por la relación de la concentración  $N$  de iones respecto a la concentración  $N_0$  de moléculas de la sustancia disuelta, o sea,

$$N = \alpha N_0. \quad (32.3)$$

Por consiguiente, la concentración de moléculas que no están disociadas

$$N' = (1 - \alpha) N_0. \quad (32.4)$$

En la solución transcurre simultánea y continuamente tanto la disociación de las moléculas, como el proceso inverso a la disociación, es decir, la combinación de los iones en moléculas neutras. Durante el equilibrio las intensidades de estos dos procesos que cambian la composición de la solución en direcciones contrarias, son iguales. La velocidad de variación ( $dN/dt$ ) de la concentración de iones de cada signo, debido a la disociación de las moléculas, es proporcional a la concentración  $N'$  de las moléculas no disociadas:

$$(dN/dt) = \beta (1 - \alpha) N_0, \quad (32.5)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de proporcionalidad.

Como consecuencia de la ionización de los iones, la velocidad de variación ( $dN'/dt$ ) de la concentración de moléculas no disociadas es proporcional al producto de las concentraciones de iones positivos y negativos:

$$(dN'/dt) = \eta \alpha^2 N_0^2, \quad (32.6)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de proporcionalidad. Durante el equilibrio

$$\left( \frac{dN}{dt} \right) = \left( \frac{dN'}{dt} \right). \quad (32.7)$$

De aquí, teniendo en cuenta (32.5) y (32.6), obtenemos la fórmula que une el coeficiente de disociación y la concentración de sustancia disuelta:

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \frac{\eta}{\beta} N_0. \quad (32.8)$$

Es evidente que el coeficiente de disociación depende de la concentración de sustancia disuelta. Para una concentración muy débil ( $N_0 \approx 0$ ), la igualdad (32.8) nos da

$$\alpha = 1, \quad (32.9)$$

es decir, la disociación es próxima a la completa. Si  $\alpha \ll 1$ , de (32.8) recibimos

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\eta} \frac{1}{N_0}}, \quad (32.10)$$

es decir,  $\alpha$  disminuye, al aumentar la concentración de sustancia disuelta.

La fórmula (32.1), tomando en consideración (32.3), puede escribirse así

$$j = q (b^{(+)} + b^{(-)}) \alpha N_0 E. \quad (32.11)$$

La movilidad de los iones en límites muy amplios de las intensidades de los campos eléctricos no depende de la intensidad. *Sólo cuando la intensidad es muy elevada, del orden de millones de voltios por centímetro, se observa la desviación de la proporcionalidad directa entre la intensidad del campo y la velocidad de la deriva de los portadores de las cargas*, lo que conforme a (32.2) significa la dependencia de la movilidad respecto a la intensidad. El valor de  $\alpha$  tampoco depende dentro de límites muy amplios de  $E$ . Por lo tanto, hasta las intensidades de millones de voltios por centímetro, la fórmula (32.11) expresa la ley de Ohm. Por esta razón, la conductividad eléctrica de la solución es

$$\gamma = q (b^{(+)} + b^{(-)}) \alpha N_0. \quad (32.12)$$

**Dependencia entre la electroconductibilidad y la concentración.** Para una concentración pequeña de la solución el coeficiente de disociación [véase (32.9)] es una magnitud constante y la suma de las movilidades de los iones  $b^{(+)} + b^{(-)}$  es también aproximadamente constante. Por consiguiente, *para una concentración pequeña de la solución la electroconductibilidad es proporcional a la concentración, mientras que cuando la concentración es grande, la dependencia entre ellas se complica considerablemente*. Por una parte, es necesario tener en cuenta la dependencia entre el coeficiente de disociación y la concentración [véanse (32.8), (32.10)], y por otra parte, la movilidad de los iones comienza también a depender en gran parte de la concentración y disminuye en las soluciones concentradas, ya que empieza a tener influencia la interacción eléctrica de los iones entre sí. Por esta razón, *para una concentración grande no se observa el carácter directamente proporcional entre la electroconductibilidad y la concentración de la solución*.

**Dependencia entre la electroconductibilidad y la temperatura.** Al subir la temperatura, el coeficiente de disociación aumenta, ya que el movimiento más enérgico de las moléculas dificulta el proceso inverso a la disociación y facilita la propia disociación (durante las colisiones). Al calentar el líquido, su viscosidad disminuye y, por lo tanto, aumenta la movilidad de los iones. Por esta razón, [véase (32.12)] *la conductividad de los electrolitos crece al aumentar la temperatura, con la particularidad de que dicho incremento puede ser bastante considerable (miles de veces)*.

**Electrolitos.** Puesto que la circulación de la corriente en las soluciones se determina por el movimiento de los iones, *como consecuencia sucede la separación de las moléculas de la sustancia disuelta en sus partes integrantes que se desprenden en los electrodos. Este fenómeno se denomina electrólisis*. El estudio de la electrólisis desempeñó un papel importante en el desarrollo de la teoría de la estructura de la sustancia. Las leyes de la electrólisis fueron descubiertas por M. Faraday y se estudian minuciosamente en la escuela secundaria. Los conductores de la corriente eléctrica que, siendo recorridos por la corriente, sufren la electrólisis, o sea, se descomponen en sus partes integrantes, se llaman electrolitos. De lo dicho se desprende que *muchas soluciones de sales, ácidos y álcalis, así como varios compuestos químicos en estado tanto líquido, como sólido, son electrolitos*.

Como ejemplo de un electrolito sólido puede servir el vidrio que por su naturaleza física es un líquido fuertemente sobreenfriado con una viscosidad muy

elevada. Puede mostrarse experimentalmente que en el vidrio los iones  $\text{Na}^+$ , cuyo movimiento determina precisamente la electroconductibilidad del vidrio, poseen una movilidad notoria. Al calentar el vidrio, su resistencia puede disminuir millones de veces. Eso permite obtener una demostración impresionante. Primero un palito de vidrio se calienta en la llama del mechero. La corriente en el circuito desprende calor de Joule, lo que contribuye al incremento de la temperatura del palito. A cierta temperatura, que es necesario elegir mediante el experimento, el mechero con la llama se retira, y la posterior subida de la temperatura del palito se asegura ya sólo mediante el calor óhmico. La velocidad de variación de la temperatura del palito aumenta todo el tiempo, ya que con la temperatura crece la conductividad, lo que, a su vez, provoca un incremento aún más enérgico de la temperatura. Como consecuencia de semejante aumento en avalancha de la temperatura tiene lugar el fundido activo del vidrio y el palito se quema, relampagueando.

### § 33. Electroconductibilidad de los gases

*Se examinan diversos mecanismos de creación de la corriente en los gases, la característica de la corriente y el papel de la carga espacial.*

**Corrientes automantenida y no automantenida.** El gas que no tiene partículas cargadas no es conductor de la electricidad. El se convierte en conductor solamente en presencia de la ionización cuando aparecen los portadores de las cargas eléctricas en forma de electrones e iones libres. En función de la cantidad de electrones perdidos, los iones positivos pueden ser de carga única o de cargas múltiples. Los iones negativos que se forman merced a la asociación de un electrón al átomo, son por lo general de carga única.

*Para que el gas se haga conductor es necesario la presencia de cualquier factor ajeno de ionización (una temperatura alta del gas, la radiación ultravioleta o X, etc.). Si la intensidad del campo no es grande, la corriente termina de circular por el gas tan sólo cese de actuar el factor ajeno de ionización. Semejante corriente se denomina no automantenida.*

Si la intensidad es suficientemente elevada, el campo puede provocar por sí mismo la ionización, como consecuencia de la cual el gas se hace conductor. La corriente que surge en este caso se llama automantenida. *Para la mencionada corriente no existe ninguna dependencia funcional universal entre la intensidad de la corriente y la tensión. Todo se determina por las condiciones concretas.* Por ejemplo, con frecuencia resulta que la intensidad de la corriente automantenida disminuye al subir la tensión.

**Corriente no automantenida.** Examinemos con más detalle la corriente no automantenida. Designemos por:  $N$  la concentración de cargas de cada signo,  $(dN/dt)_{cr}$ . (cr significa creación) es la velocidad de variación de la concentración de cargas por la fuente exterior de ionización. A la par con el proceso de

creación de las cargas, transcurre el proceso de su liquidación a causa de la recombinación, o sea, tiene lugar el proceso de neutralización mutua. Al pasar un lapso suficientemente largo, se establece el equilibrio dinámico cuando la velocidad de creación de las cargas y la velocidad de recombinación se neutralizan mutuamente. Entonces, es obvio que

$$N^{(+)} = N = N^{(-)}, \quad (33.1)$$

donde, para simplificar, los iones se suponen la carga única.

Está claro que la velocidad de recombinación debe ser proporcional al producto de la concentración de las cargas, o sea, a  $N^2$ . Por consiguiente, durante el equilibrio

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{cr} = -rN^2, \quad (33.2)$$

donde  $r$  es el coeficiente de recombinación.

Según la definición, la densidad de corriente es igual a

$$j = j^{(+)} + j^{(-)} = q(N^{(+)}v_{der}^{(+)} + N^{(-)}v_{der}^{(-)}) = qN(v_{der}^{(+)} + v_{der}^{(-)}). \quad (33.3)$$

La velocidad de deriva de la carga en un campo eléctrico es proporcional a su intensidad:

$$v_{der} = bE, \quad (33.4)$$

Las movilidades  $b^{(+)}$  y  $b^{(-)}$  de las cargas positivas y negativas son, por lo general, distintas. Teniendo en cuenta (33.4), la igualdad (33.2) toma la forma

$$j = (b^{(+)} + b^{(-)})NE. \quad (33.5)$$

Esta fórmula se parece a la ley de Ohm. Sin embargo, ella es equivalente a la ley de Ohm sólo cuando el factor de  $E$  no es función de  $E$  y  $j$ . En general, en los gases este factor depende de las magnitudes indicadas y por eso la fórmula (33.5) no equivale a la ley de Ohm.

Pero cuando la cantidad de iones en recombinación en el gas en un segundo supera en gran parte el número de iones que caen durante 1 s en el electrodo, para definir  $N$  en (33.5) puede utilizarse su expresión (33.2) para la condición de equilibrio. Entonces

$$j = q(b^{(+)} + b^{(-)}) \sqrt{\frac{1}{r} \left| \left( \frac{dN}{dt} \right) \right|_{cr}} E. \quad (33.6)$$

Para aclarar las condiciones de aplicación de esta fórmula es necesario tener en cuenta que la movilidad de los iones en los gases a presión normal tiene el orden de diezmilésimas del metro elevado al cuadrado por segundo-voltio y el coeficiente de recombinación  $r \approx 1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Por ejemplo, si  $dN/dt$  tiene el orden de  $10^{18}$  iones/( $\text{m}^3 \cdot \text{s}$ ) y  $E = 10^3 \text{ V/m}$ , la cantidad de iones que caen sobre  $1 \text{ m}^2$  de electrodo en 1 s es igual a

$$\frac{j}{e} = (b^{(+)} + b^{(-)}) \sqrt{\frac{1}{r} \left| \left( \frac{dN}{dt} \right) \right|_{cr}} E \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (33.7)$$

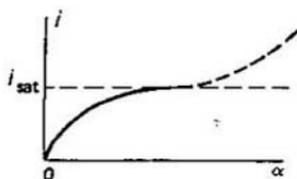


Fig. 130  
Característica de las corrientes  
automantenida y no automante-  
nida

Si la distancia entre los electrodos planos es igual a 0,1 m, en el espacio entre los electrodos en 1 m<sup>2</sup> de sección transversal recombinar 10<sup>16</sup> iones, es decir, la condición de aplicación de la fórmula (33.6) en este caso se cumple. De la misma manera se verifica la aplicación de dicha fórmula para otros valores de los parámetros.

**Densidad de la corriente de saturación.** Designemos la distancia entre los electrodos planos por  $d$ . Si la intensidad del campo es suficientemente alta, de manera que todos los iones que se forman por la fuente exterior, caen sobre los electrodos antes de recombinarse, surge la corriente de saturación, cuya densidad es

$$j_{\text{sat}} = qd \left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{cr}}. \quad (33.8)$$

**Característica de la corriente.** En la región de los campos eléctricos intermedios una parte de iones, antes de caer sobre los electrodos, consigue recombinarse. El balance de las pérdidas y la creación de iones se escribe como

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{cr}} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_{\text{rec}} + \left( \frac{dN}{dt} \right)_j = 0. \quad (33.9)$$

Tomando en consideración las igualdades (33.2), (33.3) y (33.8), obtenemos

$$j_{\text{sat}}/q - rN^2d - N(b^{(+)} + b^{(-)})E = 0. \quad (33.10)$$

Teniendo en cuenta que

$$j = qN(b^{(+)} + b^{(-)})E. \quad (33.11)$$

escribamos (33.10) en forma de ecuación respecto a  $j$ :

$$j^2 + 2\alpha j + 2\alpha j_{\text{sat}} = 0, \quad (33.12)$$

donde

$$\alpha = |q| (b^{(+)} + b^{(-)})^2 E^2 / (2rd). \quad (33.13)$$

La raíz positiva de la ecuación (33.12) es igual a

$$j = \alpha \left( \sqrt{1 + 2j_{\text{sat}}/\alpha} - 1 \right). \quad (33.14)$$

La gráfica de la densidad de corriente en función de  $\alpha$  se da en la fig. 130. En los casos límites ( $\alpha \ll j_{\text{sat}}$  y  $\alpha \gg j_{\text{sat}}$ ) (33.14) pasa a las fórmulas (33.6) y (33.8), respectivamente.

La expresión (33.14) se denomina característica de la corriente no automantenida. Está en buena concordancia con el experimento si se tiene en cuenta complementariamente las pérdidas de iones a causa de la difusión.

**Corriente automantenida.** Si para la densidad de corriente casi igual a la de la corriente de saturación, seguimos aumentando la intensidad del campo eléctrico, la densidad de corriente comienza a crecer de nuevo. Esto sucede

debido a que los electrones que existen en el gas, antes de recombinar con los iones del gas tienen tiempo de acelerarse, merced a la elevada intensidad del campo, hasta energías cuando, al chocar, ionizan las moléculas de gas: En definitiva, la velocidad de ionización comienza a depender de la intensidad. La corriente que surge en este caso se denomina automantenida. La parte inicial de la característica de dicha corriente se muestra en la fig. 130 con línea punteada. Empieza a un valor finito de  $\alpha$ .

**Acción de la carga espacial.** Como ya se señaló, la movilidad de los portadores positivos y negativos de las cargas es distinta y, por lo general,  $b^{(+)} > b^{(-)}$ . Debido a esto, la densidad de corriente, determinada por el movimiento de las cargas positivas, es inferior a la densidad de corriente, relacionada con el movimiento de las cargas negativas. Por eso la cantidad de cargas positivas que caen en el transcurso de un intervalo fijo de tiempo sobre el cátodo es menor que el número de cargas negativas que llegan al ánodo, a pesar de que la cantidad de iones que se forman y recombinan durante este intervalo de tiempo, es la misma. Es obvio que semejante estado no puede ser equilibrado. El estado de equilibrio se logra de la siguiente manera. Como consecuencia del movimiento de las cargas positivas hacia el cátodo y de las negativas hacia el ánodo, cerca del cátodo se forma un exceso de cargas positivas y cerca del ánodo, de negativas. Sin embargo, a causa de la mayor movilidad de las cargas negativas, el exceso de la carga negativa cerca del ánodo será inferior al exceso de la carga positiva en las proximidades del cátodo. Debido a semejante redistribución de la concentración de las cargas y la variación de la intensidad del campo eléctrico, relacionada con eso, se establece el equilibrio, durante el cual el número de cargas positivas y negativas que caen sobre los electrodos, se iguala.

**Movilidad de las cargas.** Un ion con cierta masa  $m$  y carga  $q$  en un campo homogéneo  $E$  se mueve con una aceleración constante

$$a = qE/m \quad (33.15)$$

y durante el tiempo  $\tau$  siendo la velocidad inicial nula, recorre el camino

$$s = qE\tau^2/(2m). \quad (33.16)$$

Si  $l$  es el recorrido libre medio del ion en el gas para el movimiento térmico desordenado y  $v$ , la velocidad media, puede considerarse que  $\tau = l/v$ . El tiempo y el recorrido libre medio se definen de manera que pueda considerarse que en cada choque el ion pierde totalmente su energía del movimiento ordenado. Por eso para la velocidad de deriva a título de velocidad media del movimiento ordenado en dirección colineal a la de la intensidad del campo, puede escribirse, basándose en (33.16):

$$v_{\text{der}} = s/\tau = qE\tau/(2m) = qlE/(2mv). \quad (33.17)$$

Las precisiones, introducidas por la distribución estadística de  $l$ , conducen sólo a un pequeño cambio del coeficiente numérico en (33.17). Por eso la movilidad de los iones es igual a

$$b = ql/(2mv). \quad (33.18)$$

De esta fórmula se ve que la movilidad de los iones positivos y negativos con las mismas masas debe ser igual. No obstante, la movilidad media de las cargas negativas es mayor que la de las positivas, debido a que la movilidad de las cargas negativas se forma no sólo por la contribución de los iones negativos, sino que también se tiene presente la contribución de los electrones. Pero la movilidad de los electrones a causa de su masa pequeña, es insignificante, lo que determina, a fin de cuentas, la gran movilidad de las cargas negativas.

**Comparación de las deducciones de (55.18) con el experimento.** De (33.18) se ve que la movilidad es inversamente proporcional a la densidad del gas, ya que la longitud del recorrido libre es inversamente proporcional a la densidad. Dicha deducción se confirma por el experimento.

En cambio, en total la fórmula (33.18) no explica todo el conjunto de hechos experimentales. Por ejemplo, la prueba nos ofrece para la movilidad un valor menor que la teoría. Para explicar la divergencia entre la teoría y el experimento, Langevin tuvo en cuenta la polarización de los iones, al acercarse durante las colisiones, merced a las cuales los iones adquieren ciertos momentos dipolares y el carácter de sus colisiones varía. La consideración de esta circunstancia introduce correcciones esenciales en las fórmulas. Pero la exposición de dicha teoría rebasa los márgenes del presente curso.

Para que el gas se convierta en conductor es necesaria la presencia de cualquier factor ajeno (elevada temperatura del gas, radiación ultravioleta o  $X$ , etc.). Sin embargo, para una intensidad suficientemente grande del campo eléctrico la ionización surge como resultado de la acción del campo. La corriente que aparece en este caso se denomina automantenida. Si existen factores ajenos de ionización, la corriente se denomina no automantenida.

¿Qué son en sí las corrientes automantenida y no automantenida?

¿Por qué entre los electrodos surge una carga espacial? ¿Cuál es su acción? ¿Debido a cuáles factores la movilidad de las cargas negativas resulta mayor que la de las positivas?

### § 34. Corriente eléctrica en el vacío

*Se examinan las regularidades fundamentales de la emisión termoiónica y su manifestación al circular la corriente entre los electrodos en el vacío.*

**Emisión termoiónica.** Si en el vacío no hay portadores de cargas eléctricas, no puede existir ninguna corriente eléctrica. Pero si existen electrones, su movimiento determina la aparición de la corriente, denominada corriente en el vacío.

En el metal hay gas electrónico. En condiciones de equilibrio, la distribución de los electrones respecto a los niveles de energía se determina por la estadística de Fermi—Dirac y se da mediante la fórmula

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp\{\beta(E_i - \mu)\} + 1}, \quad (34.1)$$

donde  $\beta = 1/(kT)$ ;  $n_i$  es el número de electrones que poseen la energía  $E_i$ ;  $g_i$ , la cantidad de estados cuánticos, correspondientes a la energía  $E_i$ ;  $\mu$ , la energía de Fermi a temperatura  $T$  que para  $T \rightarrow 0$  K, tiende a la energía de Fermi  $\mu_0$  para  $T = 0$  K conforme a la fórmula

$$\mu = \mu_0 \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right] \quad (33.2)$$

Tomando en consideración que en todos los casos, interesantes en la práctica,  $\mu \gg kT$ , la magnitud  $\mu$  en (34.1) puede estimarse igual a  $\mu_0$ .

Sea  $E_0$  la energía del electrón en reposo en las inmediaciones de la superficie fuera del metal (fig. 131). La fórmula (34.1) permite calcular la probabilidad de que el electrón posea la energía  $E_0$  si  $E_i$  se sustituye por  $E_0$ . Esta probabilidad no es nula y es tanto mayor, cuanto más alta es la temperatura (o sea, cuanto menor es  $\beta$ ). Así pues, en la proximidad de la superficie del metal existe una nube electrónica que se encuentra en equilibrio con el gas electrónico dentro del metal. Dicho equilibrio es dinámico: los electrones dentro del metal, que poseen una energía cinética suficientemente grande, superan las fuerzas que los sostienen dentro del metal, y rebasan sus límites; los electrones cerca del metal para las correspondientes direcciones de sus velocidades y posición son capturados por las fuerzas que mantienen los electrones dentro del metal. De esta manera, en condiciones de equilibrio dinámico la superficie del metal se atraviesa por las corrientes de dirección contraria, cuyas intensidades son iguales, según el módulo. La intensidad sumaria de la corriente a través de la superficie es nula. *El fenómeno de formación de una nube electrónica en las inmediaciones de la superficie metálica a causa del movimiento térmico de los electrones libres se denomina emisión termoiónica.* A 0 K no se observa ninguna emisión termoiónica, es decir, en la proximidad de la superficie metálica no existe ninguna nube electrónica.

Los electrones con una energía cinética  $W_{cin}$  en la proximidad de la superficie metálica poseen una energía total  $E_i = W_{cin} + E_0$  y la fórmula (34.1) para ellos adquiere el siguiente aspecto:

$$\frac{n}{g} \Big|_{W_{cin}} = \frac{1}{\exp[\beta(E_{cin} + \Phi)] + 1} \quad (33.3)$$

donde  $\Phi = E_0 - \mu$  es el trabajo de salida de los electrones del metal. De la fórmula (34.3) se ve que la densidad de la nube electrónica cerca de la superficie metálica depende mucho del trabajo de salida  $\Phi$  y disminuye bruscamente al aumentar éste.

Si en las inmediaciones de la superficie metálica existe un campo eléctrico, los electrones de la nube se ponen en movimiento y se forma una corriente eléctrica, denominada termoiónica. Así pues, si en el vacío existen dos placas metálicas, a las que se aplica una diferencia de potencial, entre ellas surge una corriente termoiónica. Es obvio que *la intensidad de la corriente debe crecer al*

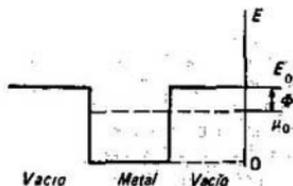


Fig. 131  
Niveles energéticos de los electrones libres en el metal

aumentar la diferencia de potencial. Existe una intensidad de la corriente máxima cuando todos los electrones que llegan a la nube electrónica a través de la superficie catódica, se arrastran por el campo eléctrico exterior hacia el ánodo, entonces no habrá ninguna corriente inversa de los electrones a través de la superficie al interior del cátodo. La mencionada intensidad de la corriente máxima se denomina intensidad de corriente de saturación; al aumentar posteriormente la diferencia de potencial entre el ánodo y cátodo, la intensidad de la corriente no varía, ya que todos los electrones que se suministran del cátodo debido a la emisión termiónica, se utilizan para formar la corriente eléctrica y para el ulterior aumento de la intensidad de la corriente no quedan ningunos portadores de la carga.

Para los metales  $\Phi$  constituye varios electrón-voltios. La energía de  $kT$  incluso a una temperatura de miles de kelvin constituye partes del electrón-voltio. Por consiguiente,  $\beta\Phi \gg 1$  y  $\exp\{\beta(W_{\text{cin}} + \Phi)\} \gg 1$ . Por eso en (34.3) en el denominador puede monospreciarse la unidad en comparación con  $\exp\{\beta(W_{\text{cin}} + \Phi)\}$  y escribir esta fórmula como

$$\frac{n}{g} \Big|_{W_{\text{cin}}} \approx e^{-\Phi/(kT)} e^{-W_{\text{cin}}/(kT)} \quad (34.4.)$$

Así, pues, la intensidad de la corriente de saturación depende en gran parte del trabajo de salida y de la temperatura, puesto que estas magnitudes entran en el exponente. Para los metales puros una corriente considerable puede obtenerse sólo a temperatura de un orden de 2000 K, es decir, en calidad de cátodos es necesario utilizar metales con elevada temperatura de fusión. Al mismo tiempo es deseable que su trabajo de salida sea el menor posible. Por ejemplo, el tungsteno puro, cuyo trabajo de salida es de 4,5 eV, debe trabajar a temperatura de 2500 K. Para disminuir la temperatura de funcionamiento del cátodo y reducir el trabajo de salida se hace uso de los cátodos revestidos de óxido, cuando con ayuda de los correspondientes procesos tecnológicos el soporte del cátodo se cubre de una capa de óxidos de metales alcalino-térreos (verbigracia, BaO, SrO y otros). Después el cátodo se activa dejando pasar por él una corriente termiónica a temperatura del cátodo de unos 1300 K. En definitiva, se forma una capa monoatómica de átomos alcalino-térreos que reducen considerablemente el trabajo de salida. Por ejemplo, los cátodos revestidos de óxidos de bario y estroncio poseen un trabajo de salida de unos 1,8 eV, merced a lo cual ya a una temperatura de cerca de 1100 K se logra obtener corrientes considerables. A esta misma temperatura se alcanza una densidad de corriente del orden de  $10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ . Por lo general, la capa de óxido de bario y estroncio se aplica a un tubo de níquel, dentro del cual se utiliza a título de calentador un filamento de tungsteno. Semejante estructura tiene una ventaja complementaria en comparación con el uso del filamento de tungsteno calentado como cátodo, ya que en este último caso a lo largo del filamento surge una caída de potencial grande y su superficie no será equipotencial. En el cátodo, recubierto de óxidos, la capa de éstos es una superficie equipotencial, lo que mejora bastante las condiciones de trabajo del cátodo en total.

**Características de la nube electrónica.** La nube electrónica en la proximidad de la superficie metálica se describe mediante la fórmula (34.4). El número de

estados cuánticos en un elemento de volumen fásico  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  es

$$g = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z. \quad (34.5)$$

Por esta razón, la cantidad de electrones, incluidos en el elemento del volumen fásico  $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ , se representa así

$$dn = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\Phi/(kT)} e^{-p^2/(2m_e kT)} \times \\ \times dx dy dz dp_x dp_y dp_z, \quad (34.6)$$

donde  $W_{cin} = p^2/(2m_e)$ .

La integración de la expresión (34.6) respecto a  $dx dy dz$  nos da como factor el volumen  $V$ . Por eso la cantidad de electrones en el volumen  $V$ , cuyos impulsos se encuentran en el elemento de volumen  $dp_x dp_y dp_z$  cerca del impulso  $p_x, p_y, p_z$  es igual a

$$dn_p = [2V/(2\pi\hbar)^3] \exp[-\Phi/(kT)] \exp[-p^2/(2m_e kT)] dp_x dp_y dp_z, \quad (34.7)$$

donde  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ . De aquí para la concentración de la nube electrónica en las inmediaciones de la superficie metálica obtenemos la expresión

$$n'_0 = \frac{1}{V} \int dn_p = \left[ \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e kT}\right) dp_x dp_y dp_z = \\ = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi m_e kT}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right). \quad (34.8)$$

La energía cinética media de los electrones

$$\langle W_{cin} \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{\int [p^2/(2m_e)] dn_p}{\int dn_p} = \frac{3}{2} kT. \quad (34.9)$$

**Densidad de la corriente de saturación.** Dirijamos el eje  $Z$  del sistema cartesiano de coordenadas perpendicularmente a la superficie metálica (fig. 132). Los electrones contribuyen en la densidad de la corriente de saturación mediante la componente  $v_z$  de la velocidad por el eje  $Z$ . La aportación de un electrón a la densidad de la corriente es igual a  $e v_z = e p_z / m_e$ . Por lo tanto, la densidad de la corriente de saturación se define por la fórmula

$$j_{sat} = \frac{e}{m_e} \int_{p_z > 0} p_z dn_p = \left[ \frac{2e}{m_e (2\pi\hbar)^3} \right] \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m_e kT}\right) dp_x \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{p_y^2}{2m_e kT}\right) dp_y \int_0^{\infty} p_z \exp\left(-\frac{p_z^2}{2m_e kT}\right) dp_z = \\ = \frac{em_e k^2}{2\pi^2 \hbar^3} T^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right), \quad (34.10)$$

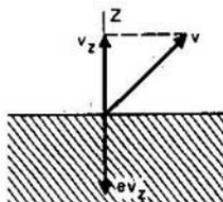


Fig. 132  
Para calcular la intensidad de la corriente de saturación

o bien

$$j_{sat} = AT^2 \exp[-\Phi/(kT)], \quad (34.11)$$

donde la constante

$$A = em_e k^2 / (2\pi \hbar^3) = 1,2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}. \quad (34.12)$$

La igualdad (34.11) se denomina fórmula de Richardson—Dushman.

Para la verificación experimental de dicha fórmula es cómodo representarla como

$$\ln(j_{sat}/T^2) = \ln A - \Phi/(kT). \quad (34.13)$$

En la gráfica, según la fórmula (34.13), la dependencia entre  $\ln(j_{sat}/T^2)$  y  $1/T$  se expresa por una línea recta (fig. 133). El experimento corrobora seme-

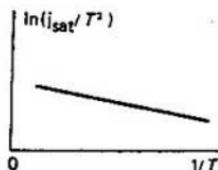


Fig. 133  
Dependencia entre la intensidad de la corriente de saturación y la temperatura

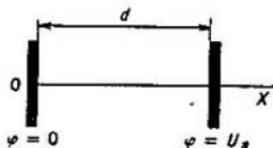


Fig. 134  
Para deducir la ley de Child — Langmuir

jante dependencia, teniendo en cuenta una pequeña variación de  $\Phi$ , determinada por la disminución de  $\mu$  con la temperatura [véase (34.2)]. Conforme a la fórmula (34.13), por el ángulo de inclinación de la recta se define el trabajo de salida  $\Phi$ . La intersección de la recta con el eje de ordenadas nos permite calcular  $\ln A$ . Según la fórmula (34.12), la magnitud  $A$  debe ser una constante universal, igual para todos los metales. Esta conclusión no se confirma por los ensayos. Para diferentes metales existe cierta divergencia de los valores de  $A$ . Por ejemplo, para el cobre  $A = 1,1 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$ , para el níquel  $A = 1,2 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$  y para el platino  $A = 0,3 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$ . Esta variación de  $A$  está determinada por los efectos superficiales. Además, la densidad de la corriente de saturación de los cristales se diferencia en cierto grado para distintas caras.

**Ley de Child—Langmuir.** Examinemos la dependencia de la intensidad de la corriente que circula en el vacío entre los electrodos, respecto a la diferencia de potencial aplicada. Consideremos que los electrodos son planos y dirijamos el eje  $X$  perpendicularmente a la superficie de los electrodos (fig. 134). Tomemos el potencial del cátodo por cero ( $\varphi_c = 0$ ) y el potencial del ánodo lo designemos por  $U$ .

El factor físico principal que influye sobre el movimiento de los electrones entre el cátodo y el ánodo, es la carga volumétrica: las fuerzas de interacción

con ella dificultan el movimiento de los electrones del cátodo al ánodo bajo la acción de la diferencia de potencial aplicada.

Supongamos que las áreas de las placas del cátodo y el ánodo son bastante grandes y durante el cálculo de la densidad de la corriente cerca de la línea que une los centros de los electrodos, se puede menospreciar la variación de las magnitudes en las direcciones perpendiculares a esta línea, es decir, examinar un problema unidimensional, cuando todas las magnitudes dependen sólo de la coordenada  $x$ . La ecuación de Poisson para el potencial tiene la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho e}{\epsilon_0} = \frac{n |e|}{\epsilon_0}, \quad (34.14)$$

donde  $n$  es la concentración de electrones. El principio de conservación de la energía para la deriva de los electrones tiene la forma

$$1/2 m_e v_{\text{der}}^2 = |e| \varphi, \quad (34.15)$$

donde  $v_{\text{der}}$  es la velocidad de deriva en el punto con potencial  $\varphi$ . La densidad volumétrica de corriente en ese punto es

$$|j| = n |e| v_{\text{der}}. \quad (34.16)$$

Todas las magnitudes en el segundo miembro de (34.16) son positivas. Calculando  $v_{\text{der}}$  de (34.15) y poniendo la ecuación obtenida en (34.16), hallamos

$$n |e| = |j| [m_e / (2 |e| \varphi)]^{1/2}. \quad (34.17)$$

Teniendo en cuenta (34.17), la ecuación (34.14) se transforma en

$$d^2\varphi/dx^2 = \alpha / \sqrt{\varphi}, \quad (34.18)$$

donde  $\alpha = (|j| / |e|) \sqrt{m_e / (2 |e|)}$ . Después de multiplicar los dos miembros de (34.18) por  $(d\varphi/dx) = \dot{\varphi}$ , obtenemos

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = \alpha \dot{\varphi} / \sqrt{\varphi}, \quad (34.19)$$

donde los puntos significan la diferenciación con relación a  $x$ . Tomando en consideración que

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2)^{\cdot} / 2, \quad \dot{\varphi} / \sqrt{\varphi} = 2(\sqrt{\varphi})^{\cdot}; \quad (34.20)$$

escribamos (34.19) así:

$$(\dot{\varphi}^2)^{\cdot} = 4\alpha (\sqrt{\varphi})^{\cdot}. \quad (34.21)$$

Ahora se puede integrar los dos miembros de (34.21) respecto a  $x$  en los límites desde 0 hasta el valor de  $x$  para el cual el potencial es igual a  $\varphi$ . Entonces,

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0^2 = 4\alpha \sqrt{\varphi}, \quad (34.22)$$

donde se tuvo en cuenta que  $\varphi(0) = 0$ . La derivada  $(d\varphi/dx)_0$  caracteriza la intensidad del campo eléctrico cerca del cátodo,  $\alpha$  es proporcional a  $j$ . Por eso la densidad volumétrica de la corriente  $j$  alcanza el valor máximo para  $(d\varphi/dx)_0 =$

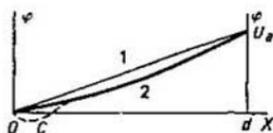


Fig. 135  
Influencia de la carga volumétrica sobre la distribución del potencial entre el ánodo y el cátodo

= 0 y entonces [véase (34.22)]

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{\alpha}\varphi^{1/4}, \quad (34.23)$$

o bien

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = 2\sqrt{\alpha} dx. \quad (34.24)$$

Al integrar los dos miembros de (34.24) dentro de los límites desde  $x = 0$  hasta  $x = d$ ,  $\varphi = U$ , obtenemos

$$U^{3/4} = \frac{3}{2} d\sqrt{\alpha}. \quad (34.25)$$

Elevando ambos miembros de (34.25) al cuadrado y teniendo en cuenta que

$$\alpha = (|j|/e_0)\sqrt{m_e/(2|e|)}, \quad (34.26)$$

obtenemos

$$|j| = \beta U^{3/2}, \quad (34.27)$$

donde

$$\beta = \frac{4e_0}{9d^2} \left( \frac{2|e|}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (34.28)$$

El cálculo de un problema semejante para los electrodos cilíndricos coaxiales, para los electrodos esféricos concéntricos conduce a la misma forma de dependencia entre la densidad volumétrica de la corriente y la diferencia de potencial elevada a la potencia de tres medios. A propósito, esta dependencia se podía esperar sin realizar cálculos algunos mediante el análisis de las dimensiones. El coeficiente  $\beta$  en todos los casos tiene la misma dimensión, como se desprende de la ecuación de Poisson, escrita en diversos sistemas de coordenadas.

En ausencia de la carga volumétrica entre el cátodo y el ánodo, la variación del potencial transcurre por una ley lineal (fig. 135; la recta 1). La carga volumétrica cambia ese curso. Está claro que en las proximidades del cátodo la carga volumétrica reduce las fuerzas que actúan sobre los electrones en ausencia de la carga volumétrica, mientras que en las inmediaciones del ánodo, las aumenta. Por eso la variación del potencial entre los electrodos, tomando en consideración la carga volumétrica, se caracteriza por la curva 2.

La deducción de la fórmula (34.27) fue hecha en suposición de que los electrones abandonan el cátodo con una velocidad nula. En cambio, ellos pueden abandonar el cátodo con la velocidad finita de emisión. En este caso la corriente existe incluso si cerca del cátodo hay un pequeño campo inverso. Por consiguiente, la densidad volumétrica de la carga puede cambiar hasta valores, para los cuales el potencial cerca del cátodo disminuya hasta valores negativos. Como consecuencia de esto, la marcha del potencial en la proximidad del cátodo se caracterizará por la curva punteada C.

Siendo la diferencia de potencial suficientemente grande, se observa una desviación de la ley de Child—Langmuir. Ella surge cuando la densidad volumétrica de la carga se reduce a tal grado, que resulta imposible mantener el campo

eléctrico nulo en la superficie del cátodo y, por lo tanto, no se cumple la condición  $(d\phi/dx)_0 = 0$ , para la cual se introdujo la ley de los tres medios. Durante el posterior aumento de la intensidad, la densidad volumétrica de corriente se hace independiente de la diferencia de potencial (la corriente de saturación).

La ley de Child—Langmuir se estudia aquí a título de ejemplo de una relación no lineal entre la intensidad de la corriente y la tensión. Dicha ley no tiene un carácter universal e incluso en el caso citado es válida sólo en un intervalo relativamente estrecho de tensiones y corrientes. La carencia de linealidad en la característica tensión-corriente es la peculiaridad más importante de muchos elementos de los circuitos radio y electrotécnicos, incluyendo los elementos de la electrónica de los sólidos.

¿En qué consiste el mecanismo de la emisión termoiónica? ¿Qué es lo que determina la existencia de corriente de saturación? ¿De qué factores depende su intensidad?

¿A qué condiciones se observan las desviaciones de la ley de Child—Langmuir?

## Problemas

- La concentración de electrones de conducción en el cobre es igual a  $n_0 = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . Determinar la velocidad de deriva de los electrones de conducción para la densidad de corriente  $j = 10 \text{ A/mm}^2$ .
- A través de un electrolito pasaron  $|Q|$  coulombios de electricidad. Las movilidades de los iones son  $b^{(+)}$  y  $b^{(-)}$ . ¿Qué cantidad de electricidad han traspasado los iones positivos y negativos?
- Dos baños electrolíticos (cubetas reográficas) con soluciones de  $\text{AgNO}_3$  y  $\text{CuSO}_4$  están acopladas en serie. Definir la masa de plata que se libera en el transcurso de un tiempo, durante el cual se desprendieron 10 mg de cobre.
- La electrólisis de  $\text{AgNO}_3$  se lleva a cabo a una diferencia de potencial de 4 V. ¿Qué energía se gasta para liberar 100 mg de plata?
- Una cinta metálica conductora de un grosor  $a = 0,1 \text{ mm}$  y anchura  $d = 5 \text{ cm}$  se coloca en un campo magnético homogéneo con inducción  $B = 1 \text{ T}$ , dirigida perpendicularmente a la superficie de la cinta. Por ésta circula una corriente de intensidad  $I = 1,6 \text{ A}$ . Hallar la diferencia de potencial de Hall.
- En un tubo de descarga de gases entre los electrodos con el área de la sección transversal de  $1 \text{ cm}^2$ , situados a la distancia de 3 cm uno del otro, la intensidad de la corriente de saturación es igual a  $I_{\text{sat}} = 10^{-7} \text{ A}$ . La descarga no es automantenida. ¿Cuántas cargas elementales de cada uno de los signos surge cada segundo en  $1 \text{ cm}^2$  del volumen del tubo?

## Respuestas

- 5.1.  $v_{\text{der}} = 0,0736 \text{ cm/s}$ . 5.2.  $|Q^{(+)}| = \frac{b^{(-)} |Q|}{b^{(-)} + b^{(+)}}$ ,  $|Q^{(-)}| = \frac{b^{(+)} |Q|}{b^{(-)} + b^{(+)}}$ . 5.3. 34 mg.  
5.4. 360 J. 5.5.  $10^{-3} \text{ V}$ . 5.6.  $N \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ .

## Campo magnético estacionario

El campo magnético estacionario se determina por las corrientes eléctricas. No se puede crear con el movimiento de una carga aislada, ya que en este caso el campo magnético será inevitablemente alternativo. A pesar de eso, mediante el principio de superposición se saca la conclusión de la formación del campo por una carga aislada en movimiento.

### § 35. Ley de la corriente total

*Se da la deducción de la forma diferencial de la ley de la corriente total. Se examina la verificación experimental de la ley de la corriente total.*

**Planteamiento del problema.** Lo mismo que en la electrostática, nos hace falta obtener la forma diferencial de las leyes del campo magnético. En la electrostática eso se ha hecho, partiendo de la ley de Coulomb y el principio de superposición como teorías experimentales. Su enunciación integral se da mediante el teorema de Gauss, del que se desprende la ecuación diferencial (13.20).

Para el campo magnético se puede, en principio, hacer lo mismo, a saber: puede partirse de la ley de Biot—Savart (10.10) ó (10.11) y el principio de superposición para el campo magnético como factores experimentales. Su enunciación integral se denomina ley de la corriente total (en este capítulo es para el caso de campos estacionarios) de los que se obtiene la ecuación diferencial correspondiente. Sin embargo, puede hacerse de otra manera y seguir la deducción teórica de las leyes del campo magnético basándose en las leyes del campo eléctrico mediante la teoría de la relatividad (véanse los §§ 8, 9). Por eso partimos de la fórmula (9.28) para la inducción del campo magnético de una corriente que pasa por un conductor infinito rectilíneo, la cual se obtuvo teóricamente.

**Forma integral de la ley de la corriente total.** Las líneas de inducción del campo magnético, originado por la corriente que pasa por un conductor fino ilimitado y rectilíneo, son circunferencias concéntricas, cuyo centro se encuentra en la línea de la corriente. El valor de la inducción se da mediante la fórmula (9.28). Calculemos la circulación del vector  $\mathbf{B}$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (35.1)$$

respecto a cierto circuito cerrado  $L$  alrededor de la corriente  $I$  (fig. 136). Dado que las líneas de  $\mathbf{B}$  yacen en los planos, perpendiculares a la línea de corriente  $I$ , es necesario elegir el circuito  $L$  yacente en uno de los planos.

Haciendo uso, para calcular la integral (35.1), de las designaciones mostradas en la fig. 137,  $\alpha$ , obtenemos

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl \cos(\widehat{\mathbf{B}, d\mathbf{l}}) = B dl_{\perp}. \quad (35.2)$$

Según la definición,  $d\alpha = dl_{\perp}/r$ . Tomando en consideración la fórmula (10.3), escribamos (35.2) de manera

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} dl_{\perp} = \frac{\mu_0}{2\pi} I d\alpha. \quad (35.3)$$

Entonces

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_L d\alpha = \mu_0 I, \quad (35.4)$$

donde se tiene en cuenta que la integral respecto a  $d\alpha$  por el circuito cerrado, que rodea el origen de coordenadas, es igual a  $2\pi$ . Por lo tanto, la circulación

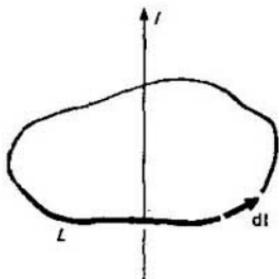


Fig. 136  
Cálculo de la circulación del vector  $\mathbf{B}$  por un circuito cerrado

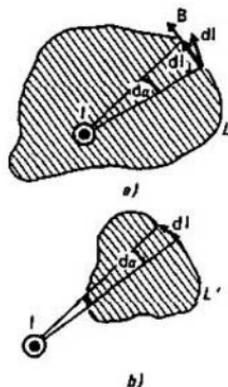


Fig. 137  
La corriente  $I$  está dirigida perpendicularmente al plano del dibujo hacia arriba. El rodeo positivo del contorno es en sentido contrario a las agujas del reloj

del vector  $\mathbf{B}$  por un circuito cerrado alrededor de una corriente no depende de la forma del circuito y se determina sólo por la intensidad de la corriente.

Si el circuito cerrado  $L'$  no abarca la corriente  $I$  (fig. 137, b), entonces

$$\oint_{L'} d\alpha = 0, \quad (35.5)$$



Fig. 138  
Generalización de la ley de la corriente total para un conjunto arbitrario de corrientes

es decir, la circulación del vector  $\mathbf{B}$  por un circuito cerrado, que no abarca la corriente, es nula. Por esta razón, los resultados obtenidos pueden enunciarse así:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} \mu_0 I & \text{(el circuito de integración abarca la corriente),} \\ 0 & \text{(el circuito de integración no abarca la corriente).} \end{cases} \quad (35.6)$$

Imaginémonos que existe una gran cantidad de corrientes y el circuito abarca sólo una parte de ellas (fig. 138). La inducción del campo magnético en cada punto del circuito, según el principio de superposición, es igual a la suma de inducciones de los campos magnéticos, creados por cada una de las corrientes:

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i. \quad (35.7)$$

Sustituyendo  $\mathbf{B}$  en el primer miembro de (35.6), obtenemos

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \left( \sum_i \mathbf{B}_i \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_L \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \mu_0 I_k = \mu_0 I, \quad (35.8)$$

donde con el índice  $k$  se designan sólo las corrientes que entraron en el circuito  $L$ . Las corrientes no abarcadas por dicho circuito, no dan aportación alguna en la integral. Por consiguiente, la intensidad de la corriente  $I$  en (35.8) es la suma de todas las intensidades de las corrientes que abarca el circuito. Por esta razón, en el caso general, la ley de la corriente total puede enunciarse como

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (35.9)$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente total que abarca el circuito  $L$ . Si la intensidad de la corriente total es nula, la circulación es también nula. Este caso se realiza no sólo cuando el circuito no abarca ninguna corriente, sino también cuando las corrientes rodeadas circulan en sentidos contrarios y en total se anulan. Por ejemplo, la circulación de  $\mathbf{B}$  por el contorno que rodea dos corrientes de igual intensidad que circulan en sentidos contrarios, es igual a cero. En la fórmula (35.9) el signo de la corriente  $I$  se considera según la regla general (véase el § 14): si la dirección del rodeo del contorno  $L$  y el sentido de la corriente están relacionados por la regla de Ampère, el signo de  $I$  es positivo.

En el caso contrario el signo de  $I$  es negativo.

La expresión (35.9) de la ley de la corriente total para el vacío en el caso estacionario es el corolario directo de la relación (9.28) y puede verificarse por vía experimental. La mencionada ley fue deducida antes para una corriente que

pasa por un conductor infinito recto, pero ahora quedará obvio que es válida también para una corriente arbitraria.

**Forma diferencial de la ley de la corriente total.** Escribamos la fórmula (35.9) para las corrientes volumétricas. Designemos por  $S$  la superficie encerrada por el contorno  $L$ . Como siempre, la normal positiva a la superficie está relacionada con la dirección del rodeo del circuito  $L$  mediante la regla de Ampère.

La intensidad de la corriente total  $I$ , que circula por la superficie, es

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (35.10)$$

donde  $\mathbf{j}$  es la densidad volumétrica de la corriente. Por lo tanto, la ley de la corriente total (35.9) adquiere la forma

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (35.11)$$

El primer miembro de la igualdad (35.11) puede transformarse por el teorema de Stokes en la integral por la superficie:

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (35.12)$$

y representar la igualdad (35.11) como

$$\int_S [\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (35.13)$$

La igualdad a cero de la integral (35.13) debe observarse para la elección arbitraria de la superficie  $S$ . Por consiguiente, el integrando es nulo:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}}. \quad (35.14)$$

La igualdad (35.14) es la forma diferencial de la ley de la corriente total. Tiene carácter diferencial y es válida en cada punto. De aquí se desprende que es correcta para un campo arbitrario a pesar de ser deducida para un campo, originado por la corriente que pasa por un conductor infinito rectilíneo.

Ahora puede demostrarse que la ley de la corriente total (35.9) es válida para las corrientes arbitrarias y no sólo para las rectilíneas. Para la demostración tomemos corrientes arbitrarias y tracemos una superficie  $S$  al azar, limitada por el contorno cerrado  $L$ . Multiplicando los dos miembros de (35.14) por el elemento  $d\mathbf{S}$  de esa superficie, e integrando respecto a  $d\mathbf{S}$ , hallamos

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (35.15)$$

El primer miembro de (35.15) se transforma por el teorema de Stokes (35.12) en la integral por el contorno y el segundo miembro, con ayuda de (35.10) se expresa mediante la corriente total  $I$  que interseca la superficie. En definitiva,



Fig. 139  
Espiral de Rogowski

(35.15) adquiere la forma (35.9). Eso demuestra que la ley (35.9) es válida para corrientes y contornos arbitrarios. Señalemos también que al calcular la intensidad de la corriente total por la fórmula (35.10), puede elegirse cualquier superficie  $S$ , tendida sobre el circuito  $L$ . De aquí se desprende que la ecuación (35.14) se recibió partiendo de la ley de Coulomb, el principio de superposición para la intensidad del campo eléctrico, la invariancia de la carga y las fórmulas de la teoría de la relatividad. La ley de Biot—Savart en forma (10.10) ó (10.11) se obtiene de (35.14) como solución de esta ecuación en caso de no haber corrientes en el infinito [véase (37.11, c)].

**Verificación experimental de la ley de la corriente total.** Para demostrar la ley de la corriente total y su comprobación experimental con una precisión no muy elevada puede hacerse uso de la espiral de Rogowski. Representa en sí una espiral de alambre flexible, confeccionada en forma de cinturón (fig. 139), cuyos extremos se conectan al galvanómetro. La acción de la espiral se funda en la ley de inducción electromagnética de Faraday (véase el capítulo 8) al cambiar el campo magnético, en el circuito de la espiral de Rogowski surge una corriente eléctrica. Según las indicaciones del galvanómetro puede determinarse

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad (35.16)$$

donde  $L$  es el contorno que coincide con el eje de la espiral de Rogowski.

Para mostrar la ley de la corriente total (35.9) es suficiente colocar la espiral de Rogowski en forma de circuito cerrado que coincida con los contornos  $L$  y  $L'$  (véase la fig. 137). Al conectar la corriente, en el caso mostrado en la fig. 137, *a*, se observa la desviación de la aguja del galvanómetro, por la que puede uno cerciorarse de que la integral es igual a  $\mu_0 I$ . Para el caso dado en la fig. 137, *b* la aguja del galvanómetro no se desvía, lo que significa la igualdad a cero de la circulación del vector  $\mathbf{B}$  por el contorno  $L'$ .

**Deducción de la forma diferencial, diferenciando directamente la fórmula de Biot—Savart.** La fórmula (35.14) se obtiene inmediatamente si se toma la operación rot de los dos miembros de la fórmula (10.11) que expresa la ley de Biot—Savart. En el segundo miembro la operación rot se aplica sólo al integrando, ya que el volumen  $V$  de la integración no depende de las variables, por las cuales se efectúa la operación. En el integrando  $\mathbf{j}$  no depende de dichas variables, sólo depende  $r$  y  $\gamma$ . Calculando rot y efectuando la integración, obtenemos la fórmula (35.14). Dichos cálculos pueden realizarse como ejercicios.

Si la permeabilidad magnética del cuerpo supera la del medio, el cuerpo se comporta como un paramagnético, pero si es inferior a la del medio, como un diamagnético.

La circulación del vector de inducción por un circuito cerrado alrededor de la corriente no depende de la forma del circuito y se determina sólo por la intensidad de la corriente.

**Ejercicio 35.1.** Aplicando la ley de la corriente total, hallar la inducción del campo magnético en un cable coaxial que se utiliza para transmitir la corriente continua (fig. 140). La corriente circula por el alma central de radio  $r_1$  y retorna por la envoltura, cuyos radios exterior e interior son iguales a  $r_2$  y  $r_3$ . El espacio entre el alma y la envoltura está lleno de dieléctrico.

Teniendo en cuenta la simetría axial del campo magnético, mediante la ley de la corriente total, obtenemos

$$B = \frac{\mu \cdot I_r}{2\pi r},$$

donde  $I_r$  es la intensidad de la corriente que se rodea por un contorno circular de radio  $r$ . La densidad de corriente en el alma  $j_1 = I/(\pi r_1^2)$ . Por eso para  $0 < r < r_1$ , tenemos  $I_r = j_1 \pi r^2 = I r^2 / r_1^2$  y, por consiguiente,

$$B = \mu I r / (2\pi r_1^2).$$

Para  $r_1 < r < r_2$  tenemos  $I_r = I = \text{const}$  y, por lo tanto,

$$B = \mu I / (2\pi r).$$

Para  $r_2 < r < r_3$  el contorno abarca la corriente de retorno, cuya densidad es

$$j_2 = I / [\pi (r_3^2 - r_2^2)].$$

Entonces la intensidad de la corriente que rodea el contorno para  $r_2 < r < r_3$  y la inducción del campo magnético son iguales a:

$$I_r = I - I \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2},$$

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right).$$

Fuera del cable la inducción del campo se anula.

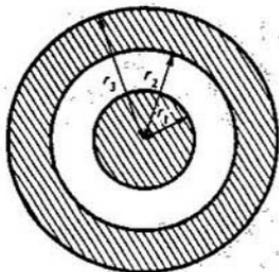


Fig. 140  
Cable coaxial

## § 36. Ecuaciones de Maxwell para un campo magnético estacionario

*Se da la enunciación de las ecuaciones de Maxwell para el caso particular del campo magnético estacionario y se discuten los tipos de problemas a resolver.*

**Ecuación para div B.** Calculemos la div B, partiendo de la fórmula (9.30):

$$\text{div B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{div} \left( i_x \cdot \frac{r}{r^3} \right) dx', \quad (36.1)$$

donde la operación de div se introdujo bajo el signo de la integral en virtud de que los límites de integración no dependen de las variables, respecto a las cuales

se efectúa la diferenciación al calcular  $\text{div}$ . Para las ulteriores transformaciones de las fórmulas es útil escribir en forma explícita las variables en la ecuación (36.1). Sea  $\mathbf{B}$  la inducción del campo en el punto  $(x, y, z)$ , es decir,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ . El cálculo de  $\text{div}$  se reduce a la diferenciación respecto a  $x, y, z$ . Las coordenadas corrientes de los puntos de integración en el integrando (36.1) se designan por  $x'$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}_x(x-x') + \mathbf{i}_y y + \mathbf{i}_z z, \\ r &= \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (36.2)$$

Según la fórmula (A.15) tenemos

$$\text{div} \left( \mathbf{i}_x \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \text{rot} \mathbf{i}_x - \mathbf{i}_x \text{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad (36.3)$$

ya que el primer término del segundo miembro es igual a cero debido a la independencia de  $\mathbf{i}_x$  respecto a las coordenadas  $(x, y, z)$ , por las que se efectúa la diferenciación para calcular  $\text{rot}$ . La igualdad a cero del segundo término se demuestra calculando directamente  $\text{rot} (r/r^3) = 0$ . La igualdad a cero de  $\text{rot} (r/r^3)$  es consecuencia de la simetría central del campo del vector  $r/r^3$ . No es difícil demostrar que cualquier campo simétrico central es potencial. Recomendamos, como ejercicio, demostrar eso.

Así pues, el integrando en (36.1) es idénticamente igual a cero y, por lo tanto,

$$\boxed{\text{div} \mathbf{B} = 0.} \quad (36.4)$$

Partiendo de la igualdad (36.4) sacamos la conclusión (véase el § 13) de que las líneas de  $\mathbf{B}$  no tienen fuentes. Eso significa que *no existen cargas magnéticas que creen un campo magnético, como las cargas eléctricas originan el campo eléctrico*. Las líneas de  $\mathbf{B}$  no tienen ni comienzo ni fin. Ellas son o bien líneas cerradas o bien parten al infinito. Es obvio la ausencia de los inicios y finales de semejantes líneas. Sin embargo, pueden existir líneas no cerradas, incluidas en una zona finita del espacio y, a pesar de eso, no tener ni comienzo, ni final. Examinemos, por ejemplo, un toro (fig. 141), en cuya superficie se enrolla una espiral. Si la relación de la longitud de la circunferencia mayor del toro respecto al paso de la espiral es un número irracional, la línea jamás será cerrada y enrollará el toro una cantidad de veces infinita. Semejante línea es un ejemplo de una línea sin cerrar que no tiene ni comienzo ni final y está incluida en una zona finita del espacio. Es fácil efectuar experimentalmente las líneas de  $\mathbf{B}$  de semejante tipo. Para ese fin es necesario dejar pasar una corriente  $I_1$  por el eje del toro, perpendicularmente a su plano, y por la circunferencia mayor, que coincide con el eje de la espiral del toro, una corriente

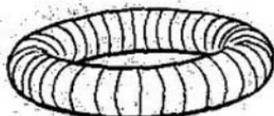


Fig. 141  
Para la relación irracional entre la longitud de la circunferencia del toro y el paso de la espiral la línea de fuerza no está cerrada

Experimentalmente las líneas de  $\mathbf{B}$  de semejante tipo. Para ese fin es necesario dejar pasar una corriente  $I_1$  por el eje del toro, perpendicularmente a su plano, y por la circunferencia mayor, que coincide con el eje de la espiral del toro, una corriente

$I_2$ . Para determinadas relaciones entre  $I_1$  e  $I_2$  se realizarán las condiciones mencionadas más arriba cuando las líneas de  $\mathbf{B}$  no estén cerradas.

**Ecuaciones de Maxwell.** Las ecuaciones (35.14) y (36.4) forman un sistema de ecuaciones de Maxwell para el campo magnético, originado por las corrientes continuas en el vacío:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (36.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (36.6)$$

La solución de estas ecuaciones permite hallar  $\mathbf{B}$  si  $\mathbf{j}$  es conocida. La cantidad de magnitudes escalares incógnitas en estas ecuaciones es igual a tres ( $B_x, B_y, B_z$ ) y el número total de ecuaciones escalares para definir las, es igual a cuatro [tres ecuaciones escalares que se obtienen de la primera ecuación vectorial y otra ecuación escalar más (36.6)]. De esta manera, la cantidad de ecuaciones supera el número de incógnitas, en cambio, el sistema no queda repleto (véase el § 58).

**Tipos de problemas a resolver.** Con ayuda de las ecuaciones (36.5) y (36.6) pueden resolverse dos problemas:

1. Sabiendo la inducción del campo magnético, hallar la densidad volumétrica de la corriente.

Para eso es necesario calcular  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  valiéndose de la ecuación (36.5).

2. Conociendo la densidad de las corrientes, hallar la inducción del campo magnético que engendran. Para ello es necesario resolver dichas ecuaciones para las incógnitas  $\mathbf{j}$ . Los métodos de solución de la ecuación se examinarán a continuación, ahora sólo señalemos que para el caso en que todas las corrientes se concentran en una zona finita del espacio, la solución se da por medio de la fórmula de Biot—Savart (10.11):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (36.7)$$

Los cálculos resultan muy voluminosos, debido a una estructura compleja del integrando y su carácter vectorial. Para simplificarlos, es útil introducir el potencial vectorial.

La ecuación  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  indica que las líneas del vector no tienen ni comienzo ni final: ellas son o bien cerradas, o bien tienden al infinito o están concentradas en una zona finita del espacio, pero sin comienzo y final. Esto significa que no existen cargas magnéticas que creen un campo magnético, lo mismo que las cargas eléctricas crean un campo eléctrico.

¿Puede Ud citar un ejemplo de líneas que se encuentre toda en una zona finita del espacio, pero que no tenga ni comienzo ni final?

### § 37. Potencial vectorial

*Se examinan las propiedades del potencial vectorial y su calibración.  
Se calcula la inducción del campo de una corriente elemental.*

Posibilidad de introducir el potencial vectorial. La identidad conocida del análisis vectorial  $\text{div rot} = 0$  muestra que la solución de la ecuación

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (37.1)$$

puede representarse como

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (37.2)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el potencial vectorial del campo magnético.

**Multiformidad del potencial vectorial.** El campo con una inducción prefijada  $\mathbf{B}$  puede describirse no por un potencial vectorial, sino que por muchos. Para cerciorarse de ello, demostremos que si el potencial  $\mathbf{A}$  describe un campo con inducción  $\mathbf{B}$ , el otro potencial

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi \quad (36.3)$$

para una función arbitraria  $\chi$  describe el mismo campo  $\mathbf{B}$ . Para demostrar eso calculemos la inducción del campo  $\mathbf{B}'$  que se describe por el potencial  $\mathbf{A}'$ :

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \chi = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (37.4)$$

dado que  $\text{rot grad} = 0$ .

La multiformidad del potencial vectorial es análoga a la del potencial escalar en la teoría del campo electrostático, sólo que *en aquel caso el potencial se determinaba con una precisión de hasta una constante arbitraria, mientras que en este caso, con una precisión de hasta una función arbitraria de cierta clase.*

**Calibración del potencial.** Haciendo uso de la multiformidad en la elección del potencial, puede imponerse una condición determinada sobre el potencial. En la magnetostática dicha condición se elige con más frecuencia en forma de

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (37.5)$$

y se denomina **condición de calibración del potencial**. Su papel es semejante al de la normación del potencial escalar en la electrostática. Por ejemplo, *la elección al azar del potencial vectorial muestra que el potencial vectorial posee sólo un valor auxiliar y no puede medirse experimentalmente.*

**Ecuación para el potencial vectorial.** Sustituyendo (37.2) en (36.5), obtenemos

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (37.6)$$

Del análisis vectorial se sabe que

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (37.7)$$

y por eso (37.6) toma la forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \quad (37.8)$$

donde se toma en consideración la calibración (37.5). Escribamos la ecuación (37.8) en coordenadas:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \quad (37.9)$$

Así, pues, cada una de las proyecciones del potencial vectorial se somete a la ecuación de Poisson (véase el § 15). En particular, si todas las corrientes se concentran en una zona finita del espacio, por analogía con la función (14.35) que es solución de (15.14), puede escribirse la solución de las ecuaciones (37.9) como:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_x dV}{r}, \quad A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_y dV}{r}, \quad A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_z dV}{r} \quad (37.10)$$

o en forma vectorial

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV. \quad (37.11a)$$

Para la corriente lineal

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \int_{L_i} \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (37.11b)$$

donde  $L_i$  son circuitos de las corrientes. En general, en cada uno de ellos la intensidad de corriente  $I_i$  es diferente. Al integrar por un contorno cerrado  $L_i$  de una corriente concreta, la intensidad de corriente  $I_i$  puede sacarse del signo de la integral como se hizo en la suma de (37.11b).

Después de hallar el potencial vectorial, por la fórmula (37.2) puede definirse la inducción del campo magnético, correspondiente a él.

**Ley de Biot-Savart.** De (37.11a) mediante la fórmula (37.2) obtenemos la siguiente expresión para la inducción del campo magnético:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] dx' dy' dz',$$

donde en forma explícita se han escrito las coordenadas del punto de observación en el que se calcula el rotor, y las coordenadas corrientes  $(x', y', z')$  del punto de integración. La operación de rotor incluye en sí el cálculo de las derivadas parciales respecto a  $(x, y, z)$ . Teniendo en cuenta la fórmula del análisis vectorial  $\text{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \text{rot} \mathbf{A} + \text{grad} \varphi \times \mathbf{A}$ , obtenemos

$$\text{rot} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{rot} \mathbf{j} + \text{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

donde  $\text{rot } \mathbf{j} = 0$ , ya que  $\mathbf{j}$  no depende de las variables, respecto a las cuales se calcula el rotor, y  $\text{grad } (1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ . Por lo tanto, recibimos la fórmula

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (37.11c)$$

que expresa la ley de Biot—Savart. De esta manera termina la deducción de las leyes principales del campo magnetostático partiendo de las leyes del campo electrostático con ayuda de la teoría de la relatividad.

**Campo de la corriente elemental.** Calculemos el potencial vectorial y la inducción del campo de una corriente cerrada elemental, es decir, de la corriente

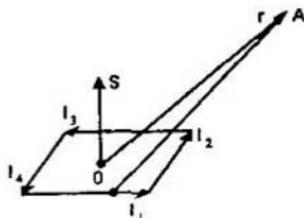


Fig. 142  
Corriente elemental

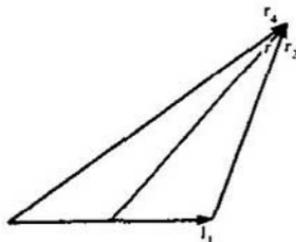


Fig. 143  
Cálculo de la diferencia de las distancias hasta dos puntos

lineal que rodea la superficie, cuyas dimensiones lineales en sentido físico son infinitamente pequeñas. El contorno por el que circula la corriente lineal  $I$ , se elige en forma de un paralelogramo con lados  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$  (fig. 142). El origen de coordenadas se coloca en el punto  $O$  de la superficie, rodeada por la corriente. La elección del punto  $O$  no tiene importancia, ya que el contorno y la superficie son infinitamente pequeños. El potencial se calcula en el punto que se caracteriza por el radio vector  $\mathbf{r}$ . Según la fórmula (37.11b) obtenemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{l_1 l_2 l_3 l_4} \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (37.12)$$

donde se ejecutó el paso a las corrientes lineales ( $\mathbf{j} dV \rightarrow I d\mathbf{l}$ ).

Dado que las longitudes de los lados del paralelogramo son ínfimas, al integrar (37.12) respecto a cada uno de sus lados, el valor  $r$  puede considerarse constante e igual, por ejemplo, a la distancia desde el punto en que se determina el campo hasta el medio del lado. Por eso [véase (37.12)]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{1}{r_1} \int_{l_1} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_2} \int_{l_2} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_3} \int_{l_3} d\mathbf{l} + \frac{1}{r_4} \int_{l_4} d\mathbf{l} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{l_1}{r_1} + \frac{l_2}{r_2} + \frac{l_3}{r_3} + \frac{l_4}{r_4} \right). \end{aligned} \quad (37.13)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{l}_1 = -\mathbf{l}_3$  y  $\mathbf{l}_2 = -\mathbf{l}_4$ , hallamos

$$\frac{\mathbf{l}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{l}_2}{r_2} = \mathbf{l}_1 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} \right) = \mathbf{l}_1 \left( \frac{r_3 - r_1}{r_1 r_3} \right) \approx \frac{\mathbf{l}_1 (-\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3} = -\frac{\mathbf{l}_1 (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^3},$$

$$\frac{\mathbf{l}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{l}_4}{r_4} = \mathbf{l}_2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_4} \right) = \mathbf{l}_2 \left( \frac{r_4 - r_2}{r_2 r_4} \right) = \frac{\mathbf{l}_2 (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^3}, \quad (37.14)$$

donde se toma en consideración que durante los cálculos se puede menospreciar las infinitésimas de órdenes superiores. Verbigracia, en la fig. 143 se muestran las construcciones geométricas que se han usado al calcular la segunda serie de las igualdades (37.14):

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{l}_1 + \mathbf{r}_2, \quad (37.15)$$

de donde

$$r_4^2 = l_1^2 + r_2^2 + 2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad (37.16)$$

y, por lo tanto,

$$r_4^2 - r_2^2 = (r_4 - r_2)(r_4 + r_2) = l_1^2 + 2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2. \quad (37.17)$$

Entonces

$$r_4 - r_2 = \frac{2\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + l_1^2}{r_4 + r_2} \approx \mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r} / r. \quad (37.18)$$

Aquí se conservan sólo los términos del primer orden de pequeñez respecto a  $\mathbf{l}_1$ . Con ayuda de las igualdades tipo (37.18) se obtienen las fórmulas (37.14). Más teniendo en cuenta (37.14), la expresión para el potencial (37.13) adquiere la forma

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [\mathbf{l}_2 (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{l}_1 (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r})]. \quad (37.19)$$

Del álgebra vectorial se conoce la descomposición del producto vectorial doble:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (37.20)$$

que muestra que la expresión entre corchetes de (37.19) puede representarse como

$$\mathbf{l}_2 (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{l}_1 (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1) = (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \times \mathbf{r}. \quad (37.21)$$

Tomando en consideración que

$$\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \mathbf{S} \quad (37.22)$$

es el vector del elemento superficial, rodeado de corriente, escribamos de nuevo (37.19), pero teniendo en cuenta (37.21) y (37.22):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IS \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (37.23)$$

La magnitud

$$IS = p_m \quad (37.24)$$

desempeña un papel muy importante en el magnetismo y se denomina momento magnético de la corriente elemental. Según el módulo, es igual al producto de la

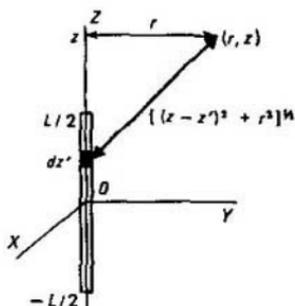


Fig. 144

Para calcular el potencial de la sección finita de una corriente rectilínea

la inducción del campo del momento magnético se compone de las inducciones de los campos de los elementos de las corrientes que circulan en sentidos opuestos a distancias muy pequeñas unas de otras.

**Ejemplo 37.1.** Hallar el vector potencial y la inducción del campo, creados por una sección rectilínea de un conductor lineal de longitud  $L$ , por el que pasa una corriente  $I$ .

Se comprende aquí que la sección dada forma parte del circuito cerrado. Según el principio de superposición, este potencial participa en calidad de sumando en el potencial total respecto a la corriente que circula por el contorno cerrado y por eso su cálculo tiene sentido físico, a pesar de que no existe una corriente continua que no sea cerrada.

Coloquemos el origen de coordenadas en el medio de la sección en cuestión, dirigiendo el eje  $Z$  a lo largo del conductor (fig. 144). Puesto que el campo magnético de la corriente rectilínea es axialmente simétrico, es suficiente calcular la inducción en los puntos del plano  $ZY$ . Las coordenadas del punto en este plano se caracterizan por la distancia  $r$  desde el eje  $Z$  y por la coordenada  $z$ . De la fórmula (37.11b) se desprende que sólo la componente  $A_z$  es distinta de cero, ya que la corriente circula en dirección del eje  $Z$ . Entonces

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{[(x-z')^2 + r^2]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4} \ln \left[ \frac{-z + L/2 + [(z-L/2)^2 + r^2]^{1/2}}{-(z+L/2) + [(z+L/2)^2 + r^2]^{1/2}} \right]. \quad (37.27)$$

La inducción se calcula valiéndose de la fórmula

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

que es necesario escribir en coordenadas cilíndricas. La única proyección diferente de cero de la inducción  $\mathbf{B}$  es  $B_\varphi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo axial del sistema de coordenadas cilíndricas, con la particularidad de que

$$B_\varphi = -\partial A_z / \partial r. \quad (37.28)$$

En la figura en los puntos del plano  $ZY$   $B_\varphi$  es una componente, dirigida perpendicularmente a dicho plano hacia los valores negativos del eje  $X$ . Conforme a la fórmula (37.28) y

intensidad de corriente en el contorno por el área que abarca el contorno. Coincide en dirección con el sentido de la normal positiva a la superficie.

Representemos el potencial vectorial de la corriente elemental en forma

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (37.25)$$

de donde

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right\}. \quad (37.26)$$

La fórmula (37.26) muestra que la inducción del campo del momento magnético disminuye inversamente proporcional al tercer grado de la distancia, mientras que la inducción del campo del elemento de la corriente decrece inversamente proporcional al cuadrado de las distancias.

Ello se determina por el hecho de que la inducción del campo del momento magnético se compone de las inducciones de los campos de los elementos de las corrientes que circulan en sentidos opuestos a distancias muy pequeñas unas de otras.

con ayuda de (37.27), obtenemos

$$B_{\varphi} = -\partial A_z / \partial r = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left[ \frac{-z + L/2}{[r^2 + (z - L/2)^2]^{3/2}} + \frac{z + L/2}{[r^2 + (z + L/2)^2]^{3/2}} \right]. \quad (37.29)$$

Para un conductor rectilíneo infinito hallamos, partiendo de (37.27) y (37.29):

$$A_z (L \rightarrow \infty) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{const}, \quad (37.30)$$

$$B (L \rightarrow \infty) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (37.31)$$

**Ejemplo 37.2.** Hallar el potencial vectorial y la inducción creados por la corriente que circula por un cable coaxial (fig. 140). El material de los conductores y el espacio entre ellos no son magnéticos.

El potencial se somete a la ecuación (37.8). Debido a la simetría axial del problema, es cómodo hacer uso del sistema de coordenadas cilíndricas, cuyo eje  $Z$  coincide con el eje del cable. Es evidente que, el potencial no depende de  $z$  y del ángulo axial  $\varphi$ , es decir,  $A = A(r)$ . Además, si sólo la componente  $j_z$  de la densidad de corriente es diferente de cero, se distinguirá de cero la componente  $A_z$  del potencial vectorial que es necesario buscar. Designemos esta componente por  $A$ . El índice indica la zona a la que pertenece dicha componente. De esta manera,  $A_1, A_2, A_3, A_4$  son los potenciales vectoriales en las zonas  $(0, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_3), (r_3, \infty)$ , respectivamente. Entonces, [véase (37.8)]

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_1 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi r_1^2} \quad (0 < r < r_1), \\ \nabla^2 A_2 &= 0 \quad (r_1 < r < r_2), \end{aligned}$$

donde  $j_1 = I/(\pi r_1^2)$ ,  $j_2 = 0$ ,  $j_3 = I/(r_3^2 - r_2^2)$ ,  $j_4 = 0$ .

La solución de las ecuaciones (37.32) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_3 &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\frac{\mu_0 I}{\pi (r_3^2 - r_2^2)} \quad (r_2 < r < r_3), \\ \nabla^2 A_4 &= 0 \quad (r_3 < r < \infty) \end{aligned} \quad (37.32)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi r_1^2} + C_1 \ln r + C_2 \quad (0 < r < r_1), \\ A_2 &= C_3 \ln r + C_4 \quad (r_1 < r < r_2), \end{aligned} \quad (37.33)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)} + C_5 \ln r + C_6 \quad (r_2 < r < r_3), \\ A_4 &= C_7 \ln r + C_8 \quad (r_3 < r < \infty). \end{aligned}$$

Hallamos la inducción del campo magnético por la fórmula  $B = \text{rot } A$  que en el caso dado se reduce a la expresión  $B_{\varphi} = -\partial A / \partial r$ .

Dado que  $B_{\varphi}$  es la única proyección de la inducción magnética distinta de cero, el índice  $\varphi$  en lo sucesivo se omite. El índice significa la zona a la que pertenece el valor de  $B$ . Entonces,

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2} - \frac{C_1}{r}. \quad (37.34)$$

Para  $r = 0$ , del carácter finito de  $B_1$ , sacamos la conclusión de que  $C_1 = 0$ . Elijamos a título de condición de la normalización  $A_1(0) = 0$ . Eso nos da que  $C_2 = 0$  y por eso las expresiones para  $A_1$  y  $B_1$  toman la forma:

$$A_1 = -\mu_0 I r^2 / (4\pi r_1^2), \quad B_1 = \mu_0 I r / (2\pi r_1^2). \quad (37.35)$$

Para la región  $r_1 < r < r_2$  obtenemos

$$B_2 = -C_3/r. \quad (37.36)$$

Haciendo uso de las condiciones de frontera para B y teniendo en cuenta que  $\mu = \mu_0$ , recibimos que  $B_2(r_1) = B_1(r_1) = -C_3/r_1 = \mu_0 I / (2\pi r_1)$ . Por lo tanto,  $C_3 = -\mu_0 I / (2\pi)$ .

Escribimos la condición de continuidad del potencial vectorial para  $r = r_1$  como  $C_3 \ln r_1 + C_4 = -\mu_0 I / (4\pi)$ , lo que conduce a la igualdad  $C_4 = -\mu_0 I / (4\pi) + [\mu_0 I / (2\pi)] \ln r_1$ . Por esta razón, las expresiones para el potencial vectorial y la inducción magnética para  $r_1 < r < r_2$  toman la forma

$$A_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (37.37)$$

La inducción en la envoltura del cable ( $r_2 < r < r_3$ ) es igual a

$$B_3 = -\frac{\partial A_3}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)} - \frac{C_5}{r}.$$

Partiendo de las condiciones de frontera  $B_2(r_2) = B_3(r_2)$  y  $A_2(r_2) = A_3(r_2)$ , hallamos:

$$C_5 = -\frac{\mu_0 I r_2^2}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)},$$

$$C_6 = -\frac{\mu_0 I r_2^2}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)} + \frac{\mu_0 I r_2^2}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)} \ln r_2 - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

de donde

$$A_3 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} + \frac{2r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r}{r_2} + 2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (37.38)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (r_3^2 - r^2)}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}.$$

Haciendo uso de las condiciones de frontera, hallamos para  $r = r_3$  para el potencial vectorial y la inducción del campo magnético siendo  $r_2 < r < \infty$  las expresiones

$$A_4 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \frac{r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right] = \text{const}, \quad (37.39)$$

$$B_4 = 0.$$

## § 38. Campo magnético en presencia de magnéticos

*Se examinan la influencia del magnético sobre el campo magnético y diversos mecanismos de la imanación. Se deduce la relación entre las densidades volumétrica y superficial de los flujos moleculares y la imanación. Se discuten los fenómenos en la superficie de separación entre los magnéticos y la medición de la inducción del campo magnético en el magnético. Se aclara la esencia del blindaje magnético.*

**Definición.** Se llaman magnéticos a las substancias que, introduciéndolas en un campo exterior cambian de manera que se convierten en fuentes de un campo magnético complementario. La inducción total del campo magnético es igual a la suma

de inducciones del campo magnético exterior y el campo magnético, originado por el magnético. La variación del estado del magnético, influido por el campo magnético, debido a lo cual el propio magnético se convierte en una fuente del campo magnético, se denomina imanación del magnético. Dicho fenómeno para una amplia clase de substancias fue descubierto experimentalmente por M. Faraday en 1845. El fue también quien estableció la existencia de cuerpos dia y paramagnético, para los que introdujo estos términos.

**Mecanismos de la imanación.** Existen diversos mecanismos de imanación. *Conforme a ellos los magnéticos se dividen en substancias dia, para, ferro y ferrimagnéticas. Las substancias antiferromagnéticas también pertenecen a los magnéticos, a pesar de que no crean campo magnético alguno en el espacio que les rodea (véase el capítulo 7).*

Desde el punto de vista cuantitativo la intensidad de imanación en todos los casos se caracteriza de la misma manera, a saber: bajo la acción del campo magnético todos los elementos del volumen adquieren un momento magnético. Eso puede determinarse por los siguientes mecanismos:

1. Al introducir el cuerpo en un campo magnético exterior, en las moléculas y los átomos el movimiento de los electrones cambia de tal manera, que se forma de modo determinado una corriente circular sumaria y orientada que se caracteriza por el momento magnético [véase (37.24)]. Puede decirse que, *siendo introducidas en el campo magnético, las moléculas reciben un momento magnético inducido.* Merced a ello, las moléculas se convierten en fuentes de un campo complementario, cuya inducción se define por la fórmula (37.26), es decir, la substancia se imana. Semejantes substancias se llaman diamagnéticas.

2. El movimiento de los electrones en las moléculas puede ser tal, que las moléculas poseen momento magnético en ausencia del campo magnético, o sea, *las moléculas poseen un momento magnético permanente.* Merced a eso, cada molécula es en sí una fuente del campo magnético. Si no existe un campo exterior, los momentos magnéticos de diversas moléculas están orientados de manera totalmente caótica, debido a lo cual la inducción sumaria del campo, creado por ellos, es igual a cero, es decir, los elementos del cuerpo, infinitesimales desde el punto de vista físico, no son fuentes del campo magnético y el cuerpo no se imana. *Al introducir semejante magnético en un campo exterior, los momentos magnéticos permanentes de las moléculas aisladas se reorientan en dirección de la inducción del campo, como resultado de lo cual se forma una dirección principal de la orientación de los momentos magnéticos.* En este caso los volúmenes físicos ínfimos adquieren un momento magnético que es igual a la suma de los momentos magnéticos de las moléculas, comprendidas en el volumen, convirtiéndose en fuentes del campo magnético, o sea, el magnético se imana. Semejantes substancias se denominan paramagnéticas.

3. La imanación de las substancias ferromagnéticas y ferrimagnéticas está relacionada con que los electrones poseen un momento magnético que se encuentra en una relación determinada con su momento mecánico: el spin. *La imanación de los magnéticos de esta clase está ligada con una determinada orientación de los spines y por eso se llama de spin.* La explicación del magnetismo de spin rebasa los márgenes de la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo y puede

discutirse sólo en la teoría cuántica. Por esta razón, en el presente manual se describen sólo las propiedades más importantes de esta clase de magnéticos sin ofrecer la teoría cuantitativa. Toda la teoría, expuesta a continuación, del campo magnético en presencia de magnéticos se refiere solamente a las sustancias día y paramagnéticas, si no se estipula lo contrario.

**Imanación.** Esta magnitud se determina por la razón entre el momento magnético del volumen físico elemental y el volumen:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_{mi}, \quad (38.1)$$

donde  $\Delta V$  es el volumen elemental y  $\mathbf{p}_{mi}$ , los momentos de las moléculas. La adición se extiende a todas las moléculas en el volumen  $\Delta V$ .

Con otras palabras, la definición (38.1) para la imanación puede enunciarse así: *la imanación es la densidad volumétrica del momento magnético del magnético.* De (38.1) se desprende que el momento magnético del elemento de volumen  $\Delta V$  es igual a

$$d\mu_m = \mathbf{J} dV. \quad (38.2)$$

**Potencial vectorial en presencia de magnéticos.** Éste es igual a la suma del potencial  $\mathbf{A}_0$ , creado por las corrientes de conducción, y el potencial  $\mathbf{A}_m$ , originado por el magnético como consecuencia de la imanación:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_m, \quad (38.3)$$

con la particularidad de que basándose en (37.11), (37.25) y (38.2) puede escribirse:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV, \quad (38.4a)$$

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (38.4b)$$

**Densidad volumétrica de los flujos moleculares.** Como se ha dicho antes, la aparición de los momentos magnéticos está relacionada con la existencia de las corrientes circulares. Las corrientes en los volúmenes elementales que conducen al surgimiento del momento de necesario valor, obtuvieron el nombre de flujos moleculares. Pero no hay que comprender a pie de letra dicha expresión. En el sentido estricto de la palabra, los flujos moleculares pueden estar sólo dentro de las moléculas. Al definir la imanación y otras magnitudes se comprenden valores promedios, merced a lo cual *los momentos magnéticos de las moléculas aparentan estar dispersados por todo el volumen y los flujos moleculares, fluir por el volumen del magnético como en un medio continuo.* A pesar de eso, esas corrientes conservaron el nombre de flujos moleculares.

Examinemos un contorno cerrado infinitésimo  $L$  que rodea  $\Delta S$  (fig. 145) y calculemos la circulación de la imanación respecto al contorno:

$$\int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \int_L J_\tau dl, \quad (38.5)$$

donde  $J_\tau$  es la componente tangencial de  $\mathbf{J}$  a lo largo del circuito de integración. Ella se origina por las corrientes que circulan por contornos cerrados alrededor de la línea, a lo largo de la cual se efectúa la integración de (38.5) (fig. 145;  $\delta S$  es el área rodeada por la corriente en el plano perpendicular a la línea de integración). Después de multiplicar el numerador y el denominador en (38.5) por  $\delta S$ , ejecutemos las siguientes transformaciones:

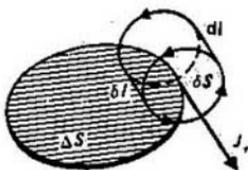


Fig. 145  
Determinación de la expresión para la densidad volumétrica de los flujos moleculares

$$\int_L J_\tau dl = \int_L J_\tau \frac{dl \delta S}{\delta S} = \int_L \frac{J_\tau dV}{\delta S} = \int_L \frac{dp_{m\tau}}{\delta S}, \quad (38.6)$$

donde se toma en consideración la fórmula (38.2). Según la definición del momento magnético, tenemos  $dp_{m\tau} = \delta I \delta S$  ( $\delta I$  es la intensidad de la corriente que rodea el área  $\delta S$  en la longitud  $dl$ , con la particularidad de que  $\delta I$  interseca  $\Delta S$  por la normal). Por eso

$$\int_L \frac{dp_{m\tau}}{\delta S} = \int_L \frac{\delta I \delta S}{\delta S} = \int_L \delta I = \Delta I_n, \quad (38.7)$$

donde  $\Delta I_n$  es la componente normal de la intensidad de la corriente que interseca el área  $\Delta$ . Así, pues, (38.5), teniendo en cuenta (38.6) y (38.7), adquiere el aspecto

$$\int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \Delta I_n. \quad (38.8a)$$

Hallemos la componente del rot  $\mathbf{J}$  en dirección de la normal al área  $\Delta S$ . Haciendo uso de la definición (14.6) para el rotor y la igualdad (38.8a), encontramos

$$\text{rot}_n \mathbf{J} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} j_{mn}. \quad (38.8b)$$

La magnitud

$$j_{mn} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_n}{\Delta S} \quad (38.9)$$

es, por lo visto, la componente normal de la densidad de los flujos moleculares, ya que precisamente estos flujos son los que impulsan la aparición de la imanación. La igualdad (38.8b) es válida para cualquier orientación arbitraria del área  $\Delta$ , es decir, para cualesquiera componentes de rot  $\mathbf{J}$  y  $j_m$ . Por esta razón, tiene lugar la igualdad vectorial

$$j_m = \text{rot } \mathbf{J}. \quad (38.10)$$

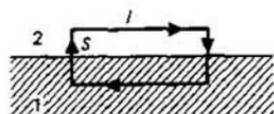


Fig. 146  
Para deducir la fórmula para la densidad superficial de las corrientes

mediante el índice  $1$  y las referentes al magnético  $2$ , por el índice  $2$ . Tracemos en el plano, perpendicular a la superficie de separación, un contorno  $L$ . Las superficies de separación paralelas de una parte del contorno son iguales a  $l$  y las perpendiculares son muy pequeñas y tienden a cero. Este circuito limita el área superficial  $S$ , perpendicular a la superficie de separación de los magnéticos. Sea  $dS$  el elemento de dicha superficie que, según la dirección del rodeo del contorno, elegida en la fig. 146, está dirigido a partir de nosotros. Al multiplicar los dos miembros de (38.10) por  $dS$  e integrar respecto a  $S$ , hallamos

$$\int_S \text{rot } \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}. \quad (38.11)$$

El primer miembro de (38.11) puede transformarse por el teorema de Stokes en una integral por el contorno  $L$  y calcularse

$$\int_L \text{rot } \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = (J_{2\tau} - J_{1\tau}) l + (J)_{1at} \Delta l_{1at}, \quad (38.12)$$

donde  $J_{1\tau}$  y  $J_{2\tau}$  son las componentes tangenciales al circuito de integración en los medios primero y segundo, con la particularidad de que el signo menos de  $J_{1\tau}$  apareció al cambiar la dirección de integración por la contraria, al pasar al segundo medio. La magnitud  $(J)_{1at} \Delta l_{1at}$  tiene en cuenta las integrales por las secciones verticales del camino. No se necesita escribirlas con más detalle, ya que se anulan al unir las secciones horizontales de integración hacia la superficie. El segundo miembro de (38.11) de la proyección del flujo en dirección de la normal a la superficie  $S$ . Esta orientación es también tangencial a la superficie de separación de los magnéticos, por eso

$$\int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \Delta I_{m.\text{sup}}. \quad (38.13)$$

Tomando en consideración (38.12) y (38.13), la igualdad (38.11) después de ser dividida por  $l$ , toma la forma

$$J_{1\tau} - J_{2\tau} + (J)_{1at} \Delta l_{1at} / l = \Delta I_{m.\text{sup}} / l = i_{m.\text{sup}}, \quad (38.14)$$

donde

$$i_{m.\text{sup}} = \Delta I_{m.\text{sup}} / l \quad (38.15)$$

Esta fórmula expresa la densidad volumétrica de los flujos moleculares que engendran la imanación  $J$ .

**Flujos moleculares superficiales.** Los flujos moleculares pueden también circular por la superficie de separación entre magnéticos o por la superficie de separación entre el magnético y el vacío.

La fig. 146 muestra la superficie de separación entre los magnéticos  $1$  y  $2$ . Todas las magnitudes, referentes al magnético  $1$ , se designan mediante el índice  $1$  y las referentes al magnético  $2$ , por el índice  $2$ . Tracemos en el plano, perpendicular a la superficie de separación, un contorno  $L$ . Las superficies de separación paralelas de una parte del contorno son iguales a  $l$  y las perpendiculares son muy pequeñas y tienden a cero. Este circuito limita el área superficial  $S$ , perpendicular a la superficie de separación de los magnéticos. Sea  $dS$  el elemento de dicha superficie que, según la dirección del rodeo del contorno, elegida en la fig. 146, está dirigido a partir de nosotros. Al multiplicar los dos miembros de (38.10) por  $dS$  e integrar respecto a  $S$ , hallamos

es la proyección de la densidad superficial de la corriente sobre la dirección, perpendicular a la superficie  $S$ . Al comprimir en (38.14) el contorno hacia la superficie ( $\Delta l_{lat} \rightarrow 0$ ), obtenemos

$$J_{2x} - J_{1x} = i_{m-sup}. \quad (38.16)$$

Esta fórmula es correcta para una orientación arbitraria del contorno respecto a distintas direcciones a lo largo de la superficie de separación. Por eso es más cómodo escribirla en forma vectorial. Designemos por  $n$  el versor de la

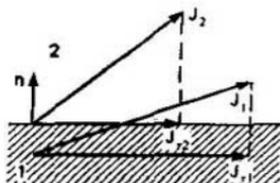


Fig. 147  
Para deducir la escritura vectorial para la densidad superficial de los flujos moleculares

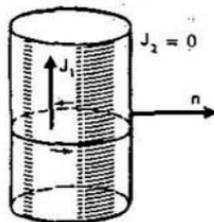


Fig. 148  
Flujos moleculares superficiales por un cilindro imantado homogéneamente

normal a la superficie de separación, dirigido hacia el segundo medio (fig. 147). De la construcción en la fig. 147 y el sentido de las magnitudes que participan en las fórmulas anteriores se ve que la expresión (38.16) en forma vectorial se escribe de la siguiente manera:

$$i_m = n \times (J_2 - J_1). \quad (38.17)$$

**Cilindro homogéneamente imantado.** Como ejemplo del cálculo empleando la fórmula (38.17) hallemos la densidad superficial del flujo molecular de un cilindro homogéneamente imantado (fig. 148) que puede realizarse en forma de un imán permanente. A pesar de que la naturaleza del ferromagnetismo que determina la existencia de los imanes permanentes, no puede comprenderse en los márgenes de la teoría clásica del magnetismo, el campo, engendrado por las sustancias ferromagnéticas imantadas en el espacio, puede describirse por la teoría clásica. *La imanación del material ferromagnético que se supone conocida, se considera como una fuente del campo magnético en el mismo sentido, como la imanación de las sustancias dia y paramagnéticas es la fuente del campo magnético. La imanación de las sustancias dia y paramagnéticas existe sólo en presencia del campo exterior, mientras que la de las sustancias ferromagnéticas se conserva en ausencia del campo exterior, y el campo originado por dicha imanación, existe independientemente.* La tarea consiste en describir ese campo.

Un cilindro homogéneamente imantado puede representarse como una sustancia dia o paramagnética, colocada en un campo exterior que, con una ele-

vada precisión, garantiza una imanación continua. En este caso en el espacio fuera del cilindro se determina la inducción no del campo completo, sino que de su parte, definida por la imanación.

En la fig. 148 la imanación  $J_1$  del cilindro se muestra por la flecha, en el vacío  $J_2 = 0$  y la normal  $n$  a la superficie de separación es la normal exterior respecto al cilindro. Según la fórmula (38.17) la densidad del flujo molecular superficial que circula por el cilindro, es

$$i_m = -n \times J_1 = J_1 \times n. \quad (38.18)$$

Una de las líneas de esta corriente se da en la fig. 148 como cierta circunferencia con flechas. Es evidente que la imanación  $J_1$  con la corriente que circula por la superficie del cilindro forma un sistema a la derecha. La fórmula (38.10) muestra que los flujos volumétricos moleculares dentro del cilindro están ausentes, ya que  $\text{rot } J_1 = 0$ . Por lo tanto, todo el campo fuera del cilindro se crea por los flujos laterales, que circulan por circunferencias. De esta manera se ha demostrado la equivalencia de los campos de un imán cilíndrico permanente y las corrientes circulares (campos del solenoide). Esta afirmación es correcta para cualesquiera magnéticos, incluyendo las substancias ferromagnéticas.

**Intensidad del campo magnético.** En ausencia de magnéticos se efectúa la relación

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

que describe el campo magnético originado por las corrientes de conducción. En presencia de magnéticos, a la par con las corrientes de conducción  $\mathbf{j}$ , el campo se engendra también por los flujos moleculares  $\mathbf{j}_m$  [véase (38.10)]. Por consiguiente, en presencia de magnéticos (38.18) debe escribirse como

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) = \mu_0 (\mathbf{j} + \text{rot } \mathbf{J}). \quad (38.19)$$

Dividamos los dos miembros de (38.19) por  $\mu_0$  y pasemos  $\text{rot } \mathbf{J}$  al primer miembro:

$$\text{rot } (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J}) = \mathbf{j}.$$

donde

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J} \quad (38.21)$$

es la intensidad del campo magnético. Ella no es una magnitud puramente de campo, ya que incluye en sí el vector  $\mathbf{J}$  que caracteriza la imanación del medio. Por eso, según su significado, el vector  $\mathbf{H}$  desempeña en la teoría del campo magnético el mismo papel que el vector  $\mathbf{D}$  en la teoría del campo eléctrico, por lo que no debería llamarse intensidad. Sin embargo, este nombre se apoderó de esa magnitud ya históricamente.

**Ecuación para la intensidad.** Teniendo en cuenta (38.21), la ecuación (38.20) toma la forma

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (38.22a)$$

Esta ecuación es muy cómoda para calcular la intensidad del campo en presencia de magnéticos. La ley de la corriente total en presencia de magnéticos se deduce de la misma manera que fue obtenida en ausencia de los mismos,

partiendo de (35.14) y pasando posteriormente a (35.15):

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I. \quad (38.22b)$$

**Dependencia entre la imanación y la intensidad.** Por las mismas causas, por las que el vector  $\mathbf{H}$  fue denominado intensidad del campo magnético, se acostumbró considerar que no es  $\mathbf{B}$  la fuente de imanación, sino  $\mathbf{H}$ . Por eso la dependencia entre  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{H}$  se representa como

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (38.23)$$

donde  $\chi$  es la susceptibilidad magnética. La dependencia entre  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  se acostumbra escribir en forma de

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (38.24)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio. Estas magnitudes para las sustancias dia y paramagnéticas no dependen de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$ . Para hallar la relación entre ellas sustituycamos (38.23) y (38.24) en (38.21) y reduzcamos los dos miembros de la igualdad obtenida por  $\mathbf{H}$ :

$$1 = \mu/\mu_0 - \chi, \quad (38.25)$$

o bien

$$\chi = (\mu - \mu_0)/\mu_0 = \mu_r - 1, \quad (38.26)$$

donde  $\mu_r = \mu/\mu_0$  es la permeabilidad magnética relativa del medio. Observemos que en el sistema de unidades electrostáticas la susceptibilidad magnética se expresa por un número que es  $4\pi$  veces inferior al del SI.

*Distintos mecanismos de imanación conducen a diferentes dependencias entre  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{H}$  (véase el capítulo 7). Ahora sólo señalemos que la imanación de las sustancias diamagnéticas está dirigida de manera contraria a  $\mathbf{H}$ . Las sustancias diamagnéticas poseen  $\chi < 0$  [véase (38.23)] y, por lo tanto, conforme a (38.26) la permeabilidad magnética  $\mu < \mu_0$  ( $\mu_r < 1$ ). Esto significa que el campo, originado por la sustancia diamagnética tiene orientación contraria a la inicial, es decir, la sustancia diamagnética debilita el campo exterior. El módulo de su susceptibilidad  $\chi$  es muy pequeño y tiene el orden de  $\sim 10^{-5}$ . La susceptibilidad no depende de la temperatura. Todas las sustancias poseen diamagnetismo.*

*En las sustancias paramagnéticas  $\mathbf{J}$  coincide en dirección con  $\mathbf{H}$ . Para ellas  $\chi > 0$ ,  $\mu > \mu_0$ ,  $\mu_r > 1$ . El campo complementario de las sustancias paramagnéticas coincide en dirección con el inicial. Por lo tanto, la sustancia paramagnética amplifica el campo. La susceptibilidad  $\chi$  de las sustancias paramagnéticas depende de la temperatura. A temperatura ambiente la susceptibilidad paramagnética de las sustancias en estado sólido tiene el orden de  $\sim 10^{-3}$ , es decir, es aproximadamente dos órdenes superior a la susceptibilidad diamagnética. Por eso el papel de la susceptibilidad diamagnética en las sustancias paramagnéticas es relativamente pequeño y se puede menospreciar.*

*En las sustancias ferromagnéticas  $\mathbf{J}$  coincide en dirección con  $\mathbf{H}$  y es muy grande. Para ellas  $\chi \gg 1$ ,  $\mu \gg \mu_0$ . Es característico que  $\chi$  y  $\mu$  dependen del cam-*

po y de la prehistoria de la imanación. Merced a ello, poseen imanación remanente, o sea, *la imanación del modelo se conserva en total incluso después de anular el campo exterior. Por sus propiedades formales, las substancias ferromagnéticas son parecidas a las substancias ferroeléctricas* (véase el § 23).

**Campo en el magnético.** En el vacío  $J = 0$  y la fórmula (38.21) permite determinar la intensidad del campo en el vacío mediante la igualdad  $H_0 = B/\mu_0$ . En un magnético homogéneo infinito las corrientes de conducción engendran un campo  $H$  [véase (38.22)]. Las mismas corrientes de conducción en el vacío originan el campo  $H_0$  [véase (35.14)]. La ecuación (35.14) puede escribirse de nuevo como

$$\text{rot } H_0 = j. \quad (38.27)$$

Comparando (38.22) con (38.27), sacamos la conclusión de que las mismas corrientes de conducción excitan las mismas intensidades del campo magnético en el vacío y en un magnético homogéneo ilimitado:

$$H = H_0. \quad (38.28)$$

Por consiguiente, las inducciones en el magnético y en el vacío  $B$  y  $B_0$  se encuentran en una relación:

$$B = \mu B_0/\mu_0 = \mu_r B_0. \quad (38.29)$$

Esta igualdad muestra que en las substancias diamagnéticas ( $\mu_r < 1$ ) la inducción del campo disminuye en comparación con la inducción en el vacío, mientras que en las substancias paramagnéticas ( $\mu_r > 1$ ), aumenta.

Si todos los magnéticos y las corrientes de conducción se encuentran en una zona finita del espacio y son conocidas tanto las corrientes de conducción como la imanación de todos los magnéticos como función del punto [ $J = J(x, y, z)$ ], en principio, la inducción del campo magnético puede siempre hallarse fácilmente. El potencial vectorial se da como las fórmulas (38.3), (38.4a) y (38.4b), las cuales es útil escribirlas de otra manera. Puede decirse que el potencial vectorial  $A$  es la suma de los potenciales creados por las corrientes de conducción (38.4a), los flujos moleculares (38.10) y por los flujos moleculares superficiales (38.17), con la particularidad de que todas corrientes originan el potencial por una misma ley (38.4a). Por eso la fórmula para el potencial tiene el aspecto

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int_V \frac{1}{r} dV + \int_V \frac{\text{rot } J}{r} dV + \int_S \frac{n \times (J_1 - J_2)}{r} dS \right), \quad (38.30a)$$

donde la última integral tiene en cuenta los flujos moleculares superficiales y  $S$  significa el conjunto de superficies de separación entre los magnéticos.

En cambio, la facilidad de hallar el potencial con ayuda de (38.30a) es aparente, puesto que así él puede ser hallado sólo cuando se conoce  $J$ . Pero en muchos casos esta magnitud es desconocida y su determinación es una tarea difícil.

**Imanes permanentes.** Están hechos de substancia o bien ferromagnética, o ferrimagnética y la teoría expuesta no se les puede aplicar directamente. *A pesar de ello, por las fórmulas, obtenidas más arriba, se puede calcular de manera for-*

mal del potencial del campo engendrado por los imanes permanentes en el espacio que les rodea. Las propiedades magnéticas de los imanes permanentes, al igual que los de los magnéticos, se caracterizan por su imanación  $J_{\text{cont}}$  que engendra el campo de la misma manera como si fuese la imanación de la substancia dia o paramagnética. Por eso, haciendo uso de (38.30a), para el potencial vectorial originado por los imanes permanentes, puede escribirse la fórmula

$$A_{\text{cont}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } J_{\text{cont}}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_{\text{cont}} \times \mathbf{n}}{r} dS. \quad (38.30b)$$

En particular, si la imanación del imán permanente es la misma por todo el volumen, el primer término en (38.30b) se reduce a cero y todo el campo magnético aparenta creado por las corrientes que circulan por la superficie del imán conforme a la segunda integral de (38.30b). No obstante, no existen ningunas corrientes reales que circulen por las superficies del imán permanente, en el caso dado ellas son sólo una magnitud auxiliar para calcular la intensidad del campo. El sentido físico del carácter auxiliar de esta magnitud puede comprenderse del siguiente ejemplo. Imaginémonos un imán permanente en forma de un cilindro largo que crea cierto campo en el espacio que lo rodea. Si se toma un solenoide cilíndrico del mismo diámetro y longitud con un bobinado bastante denso y un núcleo hecho de cierta substancia dia o paramagnética, eligiendo la intensidad de corriente, puede lograrse que la inducción del campo en el espacio que rodea el solenoide coincida prácticamente con la inducción del campo del imán permanente. La corriente que circula por el solenoide por conductores finos puede considerarse como una corriente superficial, equivalente a la imaginaria que recorre la superficie del imán cilíndrico permanente. Esto es el sentido matemático de la presencia del segundo sumando en el segundo miembro de (38.30b). *El carácter imaginario de la corriente se descubre cuando surge el interrogante sobre el campo dentro del magnético y del solenoide.* Estos campos son diferentes.

Al tener en cuenta los imanes permanentes, la ecuación para la inducción queda invariable ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ), pero la ecuación que expresa el enlace de la inducción y la intensidad del campo magnético, varía en cierto grado. El imán permanente es una fuente complementaria del campo magnético y por eso, en lugar de (38.21), es necesario escribir la ecuación

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cont}}, \quad (38.31a)$$

donde  $J_{\text{cont}}$  es la imanación por contacto. Tomando en consideración que  $\mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J} = \mu \mathbf{H}$ , obtenemos

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}_{\text{cont}}. \quad (38.31b)$$

Señalemos que en esta fórmula  $\mu$  es sólo la permeabilidad dia y paramagnética de la substancia, pero no la permeabilidad ferromagnética, que se tiene en cuenta mediante el término  $\mu_0 J_{\text{cont}}$ . Por eso, si por  $J_{\text{tot}}$  se comprende la imanación total ( $J_{\text{tot}} = J + J_{\text{cont}}$ ), la fórmula (38.31a) se representa mejor como

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \mu_0 J_{\text{tot}}. \quad (38.31c)$$

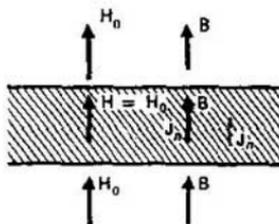


Fig. 149  
Campo magnético en presencia de material ferromagnético

imán permanente es igual a (véase la fig. 149):

$$H = H_0 - J_{\text{cont.}}$$

**Condiciones de frontera para los vectores de campo.** En la superficie de separación entre los magnéticos con distintas  $\mu$  los vectores  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  sufren unas variaciones a salto que se caracterizan por las condiciones de frontera. Para deducirlas partimos de las ecuaciones (36.4) y (38.22) que son válidas tanto para el vacío, como para el medio lleno de magnético. Desde el punto de vista metódico, la deducción de las condiciones de frontera se efectúa de la misma manera que para el campo eléctrico [véase el § 17, (17.21) y (17.30)].

**Condición de frontera para la componente normal del vector  $\mathbf{B}$ .** Se deduce de la misma manera que (17.21), partiendo de (17.17), sólo que ahora en lugar de (17.17), es necesario hacer uso de la ecuación

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (38.32)$$

Como consecuencia, obtenemos

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}. \quad (38.33)$$

**Condición de frontera para la componente tangencial del vector  $\mathbf{H}$ .** Se deduce análogamente a (17.30), partiendo de (17.29), sólo que ahora es necesario, en vez de (17.29), utilizar la ecuación

$$\int_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (38.34)$$

que se obtiene de (38.22) si sus dos miembros se multiplican por  $d\mathbf{S}$  e integran por el área, limitada por el contorno  $ABCD$  (véase la fig. 83), transformando su primer miembro según el teorema de Stokes. En definitiva, recibimos

$$\boxed{H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{\text{sup}}}. \quad (38.35)$$

donde  $i_{\text{sup}}$  es la densidad superficial de la corriente en dirección perpendicular a la orientación en la que se eligen las componentes tangenciales de la intensidad del campo magnético. También es necesario tener en cuenta que son corrientes superficiales de conducción y no flujos superficiales moleculares  $i_m$  [véase (38.16)].

**Refracción de las líneas de fuerza magnética.** En la superficie de separación de los magnéticos las líneas de fuerza sufren una refracción que se determina con ayuda de las condiciones de frontera de la misma manera como fue hecho al analizar la fórmula (17.31).

**Medición de la inducción del campo magnético.** El método más sencillo y evidente para medir la inducción se basa en la aplicación de la ley de inducción

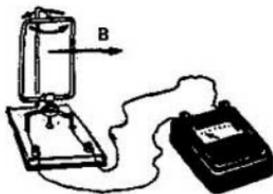


Fig. 150  
Cambio de la inducción con ayuda de la ley de Faraday

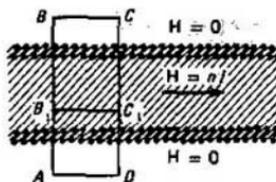


Fig. 151  
Campo de un solenoide infinito

electromagnética de Faraday. Si un conductor en forma de un bucle pequeño (fig. 150), unido con un galvanómetro, se orienta en el plano, perpendicular a  $B$ , y luego se gira a  $90^\circ$  alrededor del eje, yacente en este plano, por el galvanómetro pasa un impulso de corriente, por el cual se puede determinar  $B$  en la región del bucle (véase el capítulo 8). Aplicando este método, se mide la inducción media del campo en el área limitada por el bucle. En vez de girar el cuadro, puede desconectarse el campo.

**Campos de un solenoide infinito y de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado.** Supongamos que el campo se crea por una corriente que circula por el devanado de un solenoide infinito (fig. 151). La cantidad de espiras del conductor en 1 m de longitud, la intensidad de corriente y la permeabilidad magnética del núcleo las denotaremos por  $n$ ,  $I$  y  $\mu$ , respectivamente. El campo magnético es axialmente simétrico y puede tener sólo la componente, paralela al eje del solenoide (las espiras se devanan con gran densidad).

Para hallar la intensidad del campo hacemos uso de (38.22a) y, efectuando la integración respecto al contorno  $ABCD$ , obtenemos

$$\int_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (38.36)$$

ya que por las partes opuestas del solenoide las corrientes circulan en direcciones contrarias y, por lo tanto, la intensidad sumaria de las corrientes a través de la superficie, tendida sobre el contorno  $ABCD$  es igual a cero. La contribu-

ción a la integral por parte de las secciones de integración  $BC$  y  $DA$  es nula, puesto que el vector  $\mathbf{H}$  puede dirigirse sólo perpendicularmente a  $BC$  y  $DA$ . Por eso queda sólo la aportación de las secciones  $AB$  y  $CD$ :

$$H_{BC}l - H_{AD}l = 0, \quad (38.37)$$

donde  $H_{BC}$  y  $H_{AD}$  son las intensidades del campo en las secciones  $BC$  y  $AD$ , y  $l$ , la longitud de dichas secciones. El signo menos apareció como consecuencia de que las direcciones de integración en las secciones son contrarias. Estirando el contorno a lo largo de  $AB$  y  $CD$ , por ejemplo, alejando  $AD$  del cilindro, vemos que para que (38.37) sea idénticamente válida es necesario que  $H$  no dependa de la distancia, es decir,  $H$  fuera del solenoide debe ser una magnitud constante. A una distancia infinitamente grande del solenoide no habrá campo alguno, y por lo tanto, éste está ausente en todo el espacio fuera del solenoide.

Para determinar la intensidad del campo dentro del solenoide apliquemos la ley (38.22a) al contorno  $AB_1C_1DA$  (fig. 151). La integral no es nula solamente en la sección  $B_1C_1$  y por eso

$$H_{B_1C_1}l = nI,$$

ya que la superficie, limitada por el contorno  $AB_1C_1DA$ , se interseca por  $nI$  espiras con corriente  $I$ . De la fórmula (38.38) se ve que el campo dentro del solenoide es homogéneo y su intensidad es igual a

$$H = nI. \quad (38.39)$$

Esta fórmula permite medir la intensidad del campo magnético en amperio-vueltas, lo que se utiliza con frecuencia en la técnica. De (38.39) vemos que la intensidad del campo magnético dentro del solenoide no depende del material de que está hecho, y, a igualdad de las demás condiciones, es la misma para todos los materiales. Pero la inducción del campo dentro del solenoide, teniendo en cuenta (38.24) y (38.39), es igual a

$$B = \mu H = \mu nI \quad (38.40)$$

y depende del material del núcleo. Para las sustancias diamagnéticas es inferior a la inducción en un solenoide vacío, mientras que para las sustancias paramagnéticas, es mayor.

La inducción del campo de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado se encuentra de la misma manera, pero con la diferencia de que las corrientes superficiales están ausentes. La relación (38.77) no cambia y la intensidad del campo fuera del cilindro, lo mismo que para el solenoide infinitamente largo, es nula. En vez de la fórmula (38.38), obtenemos  $Hl = 0$  ó  $H = 0$ . Esto significa que la intensidad del campo dentro de un cilindro infinitamente largo y homogéneamente imantado es nula, mientras que en el solenoide difiere de cero. Sin embargo, la inducción dentro del cilindro no es nula ( $B = \mu_0 J$ ). Si la longitud del cilindro es finita, la intensidad del campo magnético es diferente de cero tanto dentro del cilindro, como fuera de él.

**Medición de la permeabilidad magnética, inducción e intensidad del campo dentro de un magnético.** Imaginémosnos un solenoide infinito, en cuyo núcleo

paralelamente al eje del solenoide se hizo un canal extremadamente estrecho (fig. 152). El campo dentro del solenoide se crea por la corriente del devanado. En el canal se introduce una bobina medidora, conectada al galvanómetro.

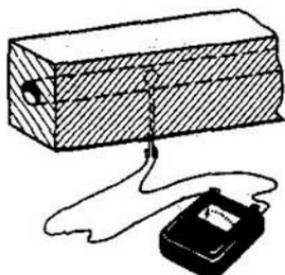


Fig. 152  
Variación de la intensidad del campo magnético dentro del magnético

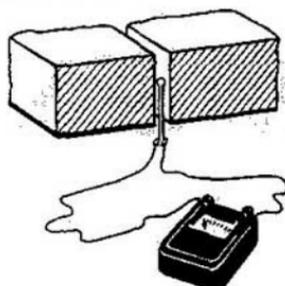


Fig. 153  
Cambio de la inducción del campo magnético dentro del magnético

La condición de frontera (38.35) muestra que la intensidad en el canal es igual a la intensidad en el magnético. La inducción en el canal es igual a  $B_{\parallel} = \mu_0 H$ . Se puede medir, haciendo girar a  $90^\circ$  el bucle o desconectando el campo. La intensidad del campo dentro del magnético se calcula por la fórmula

$$H = B_{\parallel} / \mu_0. \quad (38.41)$$

Para medir la inducción dentro del magnético hagamos un pequeño corte transversal en el solenoide infinito (fig. 153). La condición de frontera (38.33) muestra que en este corte la inducción  $B_{\perp}$  es igual a la inducción  $B$  dentro del magnético. Por eso es suficiente medir la inducción en el corte transversal.

Sabiendo la inducción y la intensidad del campo en el magnético, puede determinarse la permeabilidad magnética:

$$\mu = B/H = \mu_0 B_{\perp} / B_{\parallel}. \quad (38.42)$$

**Esfera de magnético en un campo homogéneo.** Supongamos que una esfera de radio  $R$ , hecha de magnético, con una permeabilidad magnética  $\mu_1$  se coloca en un medio infinito con permeabilidad magnética  $\mu_2$ , en el cual se engendra un campo magnético homogéneo con intensidad  $H_0$  (fig. 154, a, b). Se necesita determinar la inten-

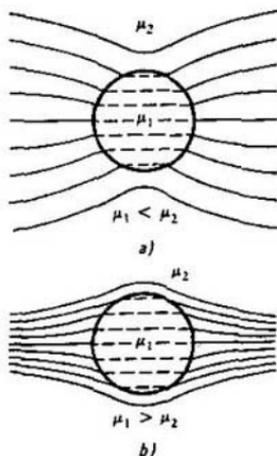


Fig. 154  
Esfera de magnético en un campo magnético homogéneo

alidad del campo magnético tanto dentro de la esfera, como fuera de ella. Las corrientes de conducción se suponen ausentes.

En este caso la ecuación (38.22) adquiere el aspecto

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (38.43)$$

es decir, el campo magnetostático en el espacio donde están ausentes las corrientes de conducción, es de potencial. Las corrientes de conducción no existen ni dentro de la esfera, ni fuera de ella, y, por lo tanto, el campo es potencial en todo el espacio. Designemos el potencial de este campo por  $\varphi_m$ . Entonces

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m. \quad (38.44)$$

Para un medio homogéneo ( $\mu = \text{const}$ ) la ecuación  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (38.45)$$

Sustituyendo (38.44) en (38.45), obtenemos para todos los puntos fuera de la esfera ( $\mu_2 = \text{const}$ ) y para todos los puntos dentro de la esfera ( $\mu_1 = \text{const}$ ) la ecuación

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (38.46)$$

Así pues, el potencial del campo magnético satisface la ecuación de Laplace.

Señalemos que si la permeabilidad magnética no es constante, en lugar de (38.46) se recibe otra ecuación. Para deducirla tomemos en consideración la ecuación (38.21), que puede escribirse así

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (38.47)$$

Tomando la divergencia de los dos miembros de dicha igualdad, obtenemos,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} = -\mu_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi_m + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (38.48a)$$

donde se tuvo en cuenta la relación (38.44) y la ecuación  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ . Por consiguiente, la ecuación para  $\varphi_m$  tiene la forma

$$\nabla^2 \varphi_m = \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (38.48b)$$

lo que complica considerablemente la solución del problema para el magnético con una permeabilidad magnética variable.

Coloquemos el origen de coordenadas en el centro de la esfera y dirijamos el eje polar del sistema de coordenadas esféricas en dirección del vector  $\mathbf{H}_0$ . A causa de la simetría axial, la ecuación de Laplace (38.46) toma la forma de (17.42). Esta ecuación debe resolverse para las condiciones de frontera (38.33) y (38.25) sobre la superficie de la esfera, que coinciden totalmente con las condiciones de frontera para  $D_n$  y  $E_r$  [véase (17.42)]. Dado que las corrientes superficiales de conducción están ausentes, en (38.35) puede ponerse  $i_{\text{sup}} = 0$ . Por eso la solución de este problema es semejante a la del problema sobre la esfera

dieléctrica en un campo eléctrico homogéneo. Sólo que en la solución de la ecuación (17.42) hay que sustituir  $\varphi \rightarrow \varphi_m$ ,  $E \rightarrow H$ ,  $D \rightarrow B$  y  $\epsilon \rightarrow \mu$ .

La intensidad del campo magnético dentro de la esfera es constante y, por analogía con (17.51) es igual a

$$H_{iz} = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0. \quad (38.49)$$

Es la suma de las intensidades del campo exterior  $H_0$  y del campo, originado por la esfera a causa de su imanación. El campo, creado dentro de la esfera merced a su imanación, se denomina «campo desmagnetizante  $H_{desm}$ ». Este nombre es convencional, ya que no existe ninguna desmagnetización, sino que simplemente el magnético se imanta en el campo exterior, originando un campo complementario que se suma al inicial. Pero por cuanto la denominación del campo  $H_{desm}$  ya se estableció hace años, no queda más remedio que utilizarla. Entonces

$$H_{desm} = H_{iz} - H_0 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0. \quad (38.50)$$

Esta expresión puede escribirse de otra forma. Basándose en (38.23) y teniendo en cuenta (38.26), tenemos

$$J_1 = (\mu_1/\mu_0 - 1) H_{1z}, \quad J_2 = (\mu_2/\mu_0 - 1) H_0, \quad (38.51)$$

de donde

$$J_2 - J_1 = \frac{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_0 + 2\mu_2)}{\mu_0(\mu_1 + 2\mu_2)} H_0. \quad (38.52)$$

Por consiguiente, la fórmula (38.50) puede representarse como

$$H_{desm} = [\mu_0/(\mu_0 + 2\mu_2)] (J_2 - J_1). \quad (38.53)$$

Por ejemplo, si la esfera se encuentra en el vacío,  $\mu_2 = \mu_0$  y  $J_2 = 0$ , por eso

$$H_{desm} = -J_1/3.$$

**Blindaje magnético.** De (38.50) se ve que para  $\mu_1 > \mu_2$  el campo magnético dentro de la esfera se debilita, es decir, la esfera aparenta apantallar su parte interior contra el campo magnético exterior. Si se calcula la inducción del campo dentro de la cavidad, rodeada por una envoltura de magnético con una permeabilidad bastante grande  $\mu_1$ , resulta que las líneas magnéticas se concentran, en general, en la envoltura (fig. 155) sin penetrar hacia dentro de la cavidad. Eso significa que la envoltura hecha de magnético, con gran  $\mu$  actúa como un blindaje que no permite al campo magnético penetrar al espacio, limitado por la envoltura.

¿Qué magnitud en la teoría del campo eléctrico corresponde a la permeabilidad magnética  $\mu$  en la teoría del campo magnético? ¿Por qué los flujos moleculares no pueden representarse en circulación sólo en el volumen de las moléculas?

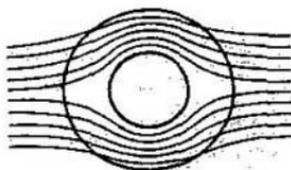


Fig. 155  
Blindaje magnético

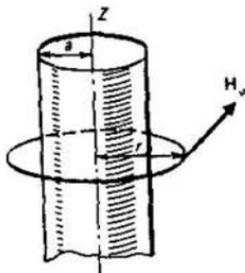


Fig. 156  
Para determinar el campo de la corriente que circula por un cilindro de sección circular

La imanación de las sustancias diamagnéticas se orienta contra la intensidad del campo magnético y la inducción del campo exterior disminuye.

La imanación de las sustancias paramagnéticas está dirigida por la intensidad del campo magnético y la inducción del campo exterior aumenta.

La teoría clásica no puede explicar el ferromagnetismo, pero está en condición de describir el campo magnético fuera de las sustancias ferromagnéticas si se considera conocida la imanación de la sustancia ferromagnética.

**Ejemplo 38.1.** A lo largo del eje de un cilindro recto circular infinito de radio  $a$  circula una corriente lineal de intensidad  $I$ . La permeabilidad magnética de la sustancia del cilindro es  $\mu$ . Fuera del cilindro se encuentra el espacio libre. Hallar la intensidad del campo magnético, la inducción y la imanación en todos los puntos del espacio.

Dirijamos el eje  $Z$  del sistema de coordenadas cartesianas a lo largo del eje del cilindro en dirección de la corriente  $I$  (fig. 156). Elijamos a título de contorno de integración  $L$  la circunferencia de radio  $r$  con centro en el eje del conductor y yacente en el plano, perpendicular a la corriente. Entonces la intensidad del campo magnético en todos los puntos se determina por la ley de la corriente total:

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi 2\pi r = I,$$

de donde

$$H_\varphi = I / (2\pi r) \quad (38.54)$$

es la intensidad del campo magnético orientada por la tangente a la circunferencia. Las circunferencias concéntricas con corriente son las líneas de intensidad.

La inducción es igual a

$$B_\varphi = \begin{cases} \mu H_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi r} & (0 < r < a), \\ \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (a < r). \end{cases} \quad (38.55)$$

Es cómodo hallar la imanación, partiendo de la relación (38.21):

$$J_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} H = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{I}{2\pi r} & (0 < r < a), \\ 0 & (a < r). \end{cases} \quad (38.56)$$

¿Por qué el diamagnetismo de las sustancias paramagnéticas es pequeño en comparación con el paramagnetismo? Presente estimaciones cuantitativas.

¿De qué manera puede medirse la inducción y la intensidad del campo magnético dentro del magnético?

Enumeren las circunstancias merced a las que  $H$  desempeña en la teoría del campo magnético el mismo papel que  $D$  en la teoría del campo eléctrico.

En el sentido literario, los flujos moleculares pueden circular sólo dentro de las moléculas. En cambio, en el modelo del medio continuo se trata de magnitudes, promedias respecto a volúmenes infinitesimos y por eso los flujos moleculares se representan como circulantes por el volumen del magnético como si fuese en un medio continuo.

Según su valor, la intensidad del campo magnético desempeña el mismo papel en la teoría del campo magnético que el desplazamiento en la teoría del campo eléctrico.

La densidad volumétrica de los flujos moleculares se encuentra con ayuda de (38.10). Tomando en consideración que la imanación se da en (38.56) en coordenadas cilíndricas, es cómodo calcular el rotor en (38.10) también en coordenadas cilíndricas. Tenemos

$$j_m = \text{rot } \mathbf{J} = -i_r \frac{\partial J_\varphi}{\partial z} + i_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_\varphi) = 0. \quad (38.57)$$

Así pues, no hay flujos moleculares volumétricos. Sin embargo, existe el flujo molecular superficial, cuya densidad, basándose en (38.17) y teniendo en cuenta (38.56), es igual a

$$i_{mz} = -\frac{(\mu - \mu_0) I}{\mu_0^2 r a}. \quad (38.58)$$

## § 39. Fuerzas en un campo magnético

*Se examinan las fuerzas que actúan sobre las corrientes y las fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos incompresibles.*

**Fuerzas que actúan sobre la corriente.**

$$\mathbf{dF} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}, \quad (39.1a)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (39.1b)$$

**Fuerza de Lorentz.** Sobre una carga puntual  $q$  que se mueve con una velocidad  $\mathbf{v}$ , actúa una fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (39.2)$$

con la particularidad de que  $q$  incluye en sí el signo de la carga, o sea, puede ser tanto positiva, como negativa. La fórmula (39.2) se obtiene de (39.1b) si se tiene en cuenta que  $\mathbf{j} = nq\mathbf{v} dV = \rho\mathbf{v} dV$ , donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de las cargas y, por lo tanto,  $\rho dV$  es la carga en el volumen  $dV$  y  $\int \rho dV = q$ .

**Fuerza y momentos de fuerza que actúan sobre el momento magnético.** Supongamos que la corriente elemental circular que crea un momento magnético, circula por un cuadro cuadrado con el lado  $l$ . Coloquemos el origen de coordenadas en el centro del cuadrado y dirijamos el eje  $Z$  perpendicularmente al plano del cuadro (fig. 157). La dirección de la corriente  $I$  en el cuadro se indica por las flechas. El campo magnético es arbitrario, las corrientes extrañas y las substancias ferromagnéticas están ausentes en la zona del cuadro ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ ). Determinemos la fuerza y el momento de fuerzas que actúan sobre el momento magnético del cuadro con corriente. Las dimensiones del cuadro son

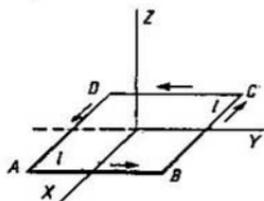


Fig. 157

Para calcular la acción de la fuerza sobre el momento magnético

pequeñas y es necesario tener en cuenta la variación de la inducción del campo magnético en los límites del cuadrado sólo hasta las magnitudes del primer orden de pequeñez respecto a las dimensiones del cuadrado.

Conforme a la fórmula (39.1) sobre los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $DA$  del cuadrado por parte del campo magnético actúan las fuerzas:

$$F_{AB} = Ii_y \times \mathbf{B}(i_x l/2),$$

$$F_{BC} = Il[-i_x \times \mathbf{B}(i_y l/2)],$$

$$F_{CD} = Il[-i_y \times \mathbf{B}(-i_x l/2)],$$

$$F_{DA} = Il[i_x \times \mathbf{B}(-i_y l/2)],$$

donde  $i_x$ ,  $i_y$  son versores en direcciones de los ejes  $X$  e  $Y$ . En los argumentos de  $\mathbf{B}$  se señalan las distancias entre el centro del cuadrado y los lados correspondientes, teniendo en cuenta la dirección. La fuerza completa que actúa sobre el cuadrado es

$$\mathbf{F} = F_{AB} + F_{BC} + F_{CD} + F_{DA} = Ii_y \times [\mathbf{B}(i_x l/2) - \mathbf{B}(-i_x l/2)] + \\ + Ii_x \times [\mathbf{B}(-i_y l/2) - \mathbf{B}(i_y l/2)]. \quad (39.3)$$

Teniendo en cuenta que al conservar sólo los términos del primer orden de pequeñez,

$$\mathbf{B}\left(\pm \frac{i_x l}{2}\right) = \mathbf{B}(0) \pm \frac{l}{2} \frac{\partial \mathbf{B}(0)}{\partial x},$$

$$\mathbf{B}(\pm i_y l/2) = \mathbf{B}(0) \pm \frac{l}{2} \frac{\partial \mathbf{B}(0)}{\partial y},$$

transformemos (39.3) a la forma

$$\mathbf{F} = Il^2 \left( i_y \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} - i_x \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right). \quad (39.4)$$

Tomando en consideración que  $Il^2 = p_m$  es el valor absoluto del momento magnético del cuadrado con corriente, así como las relaciones bien conocidas entre los versores de coordenada ( $i_x \times i_y = i_z$ ,  $i_y \times i_x = -i_z$ ,  $i_x \times i_x = i_y$ ), transformemos (39.4) así:

$$\mathbf{F} = (p_m \times i_x) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = (p_m \times i_y) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y},$$

donde  $p_m = i_x p_m$  es el momento magnético del cuadrado. Descomponiendo el producto vectorial doble por la fórmula del álgebra vectorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ , obtenemos

$$\mathbf{F} = i_x \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) - p_m \left( i_x \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + i_y \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) - p_m \left( i_y \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) = \\ = i_x \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + i_y \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) - p_m \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right), \quad (39.5)$$

donde  $i_x \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial x) = \partial B_x / \partial x$ ,  $i_y \cdot (\partial \mathbf{B} / \partial y) = \partial B_y / \partial y$ . Puesto que  $\text{div } \mathbf{B} = \partial B_x / \partial x + \partial B_y / \partial y + \partial B_z / \partial z = 0$ , entonces

$$-p_m \left( \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = p_m \frac{\partial B_z}{\partial z} = p_m \left( i_z \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right) = i_z \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right),$$

de donde

$$\mathbf{F} = i_x \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + i_y \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + i_z \left( p_m \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right). \quad (39.6)$$

Esta fórmula muestra que sobre el momento magnético la fuerza actúa sólo en un campo heterogéneo. Dado que la fórmula (39.6) expresa la fuerza por medio del momento magnético  $p_m$ , la forma especial, elegida antes, del circuito de corriente no tiene ninguna importancia, por lo que (39.6) es válida para un momento magnético arbitrario, cuyas dimensiones espaciales son suficientemente pequeñas.

Para calcular el momento de las fuerzas que actúan sobre el momento magnético, hacemos lo mismo. Colocamos el origen de coordenadas en el centro del cuadro y calculamos el momento de fuerzas según la fórmula

$$\mathbf{M} = I \int_L \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \quad (39.7)$$

No obstante, ahora los cálculos se simplifican, ya que la distancia  $r$  tiene el orden de las dimensiones  $l$  del cuadro, y la magnitud  $\mathbf{B}$  debe tenerse en cuenta sólo en el orden nulo según las dimensiones del cuadro, es decir, se debe considerarla constante. Como consecuencia obtenemos

$$\mathbf{M} = p_m \times \mathbf{B}. \quad (39.8)$$

Esta fórmula muestra que el momento de fuerzas tiende a girar el momento magnético hasta que éste coincida con el vector de inducción magnética del campo.

**Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos incompresibles.** Dado que el elemento de volumen  $dV$  del magnético con una imanación  $\mathbf{J}$  posee un momento magnético

$$d\mathbf{p}_m = \mathbf{J} dV, \quad (39.9)$$

sobre él [véase (39.6)] actúa una fuerza

$$dF_x = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} dV, \quad dF_y = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} dV, \quad dF_z = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} dV. \quad (39.10)$$

Es obvio que estas expresiones son válidas en todo caso para los magnéticos rígidos, ya que la fórmula (39.6) se obtuvo como resultado de la diferenciación para  $p_m = \text{const.}$

Representemos (39.10) en forma vectorial. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{J} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B}, \quad (39.11)$$

hallamos para la densidad volumétrica de la fuerza la expresión

$$f_x = \frac{dF_x}{dV} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x}, \quad (39.12)$$

etc. Así pues, la densidad volumétrica de la fuerza que actúa sobre el magnético es igual a

$$f = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu\mu_0} \text{grad } B^2. \quad (39.13)$$

Esto significa que:

a) *las sustancias paramagnéticas poseen  $\mu > \mu_0$  y por eso la densidad volumétrica de la fuerza está dirigida hacia el aumento de la inducción del campo;*

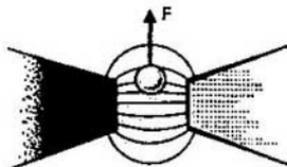


Fig. 158  
Expulsión de un cuerpo dinámico fuera de la zona del campo máximo

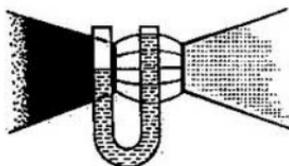


Fig. 159  
Refracción del líquido paramagnético a la zona del campo máximo

b) *las sustancias diamagnéticas poseen  $\mu < \mu_0$  y por eso la densidad volumétrica de la fuerza está dirigida hacia la disminución de la inducción del campo.*

Muchos experimentos muestran con evidencia el distinto comportamiento de las sustancias dia y paramagnéticas en un mismo campo. Sea que el campo magnético se crea en el vacío entre los polos de un imán fuerte (fig. 158). Está claro que entre los polos del imán la inducción del campo disminuye desde la línea central que une los polos, hasta la periferia. Una bola de bismuto ligera que es en sí un cuerpo diamagnético, se expulsa de la zona del campo con inducción máxima (fig. 158). Un líquido paramagnético, por ejemplo, una solución acuosa de cloruro ferroso, se atrae a la zona del campo con inducción máxima (fig. 159).

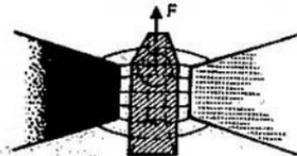


Fig. 160  
Un cuerpo paramagnético colocado en un medio paramagnético, cuya permeabilidad magnética supera a la del cuerpo, se comporta como un diamagnético

Si el espacio entre los polos del imán está lleno de un medio material, la dirección de las fuerzas depende de la relación entre las permeabilidades magnéticas del medio y del cuerpo. Si la permeabilidad magnética del cuerpo supera la del medio, el cuerpo se comporta como una sustancia paramagnética, pero si es inferior a la del medio, como sustancia diamagnética. Por ejemplo, si entre los polos del imán se coloca un líquido paramagnético con una permeabilidad suficientemente grande (fig. 160), sobre una bola para-

magnética, cuya permeabilidad es inferior a la del líquido, la fuerza actúa de la misma manera que sobre una bola diamagnética en el vacío.

La fuerza actúa sobre el momento magnético sólo en un campo magnético heterogéneo. El momento de fuerzas que surge como consecuencia de la acción del campo magnético sobre el momento magnético, tiende a dar vuelta al momento magnético hasta que coincida con el vector de la inducción magnética del campo.

Las fuerzas volumétricas que actúan sobre la sustancia paramagnética, están orientadas hacia el aumento de la inducción del campo magnético, mientras que las que actúan sobre las sustancias diamagnéticas, hacia la disminución.

¿Cómo varía la acción de las fuerzas sobre un magnético si la permeabilidad magnética del medio se diferencia de la constante magnética y se hace mayor o menor que la permeabilidad magnética del magnético?

**Ejemplo 39.1.** Por un anillo de radio  $r_0$ , hecho de un alambre muy fino, circula una corriente de intensidad  $I$ . La resistencia del alambre a la ruptura es igual a  $f_0$ . El anillo se ubica en un campo magnético, cuya inducción es perpendicular al plano del anillo de manera que las fuerzas que actúan tienden a romper el anillo. Determinar la inducción para la cual el anillo se rompe. Considerar que  $f_0 = 1,5 \text{ N}$ ;  $r_0 = 15 \text{ cm}$ ;  $I = 10 \text{ A}$ .

Las fuerzas actúan sobre el anillo por el radio. Designando por  $dl$  el elemento de longitud del anillo, hallamos que el elemento de fuerza que actúa sobre el elemento  $dl$  en dirección radial es igual a  $dF = I dl \times B$ . Tracemos el eje  $X$  a través del centro del anillo en su plano. La proyección del elemento de la fuerza  $dF$  sobre el eje  $X$  es igual a  $dF_x = dF \cos \alpha = IB dl \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre el eje  $X$  y el radio, trazado al elemento  $dl$ .

Puesto que  $dl = r_0 d\alpha$ , la expresión para la fuerza que actúa sobre el semianillo en dirección de los valores positivos del eje  $X$ , es  $F_x = IB r_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2IB r_0$ . Esta fuerza se distribuye en dos secciones del alambre en los lugares donde él se interseca con el eje  $Y$ . Por eso la condición de ruptura tiene la forma  $2IB r_0 = 2f_0$  y, por lo tanto,  $B = f_0 / (I r_0) = 1 \text{ T}$ .

## Problemas

- Hay una espiral de cobre de radio  $a$  y densidad  $n$  de espiras por 1 m. Las espiras están enrolladas de tal manera que entre ellas existe un espacio muy pequeño. El extremo superior de la espiral está sujeto, mientras que el inferior está unido con una carga conductora de masa  $m$ , yacente en una mesa metálica. En esta posición sobre la carga por parte de la espiral no actúan ningunas fuerzas elásticas. Considerando que los espacios entre las espiras disminuyen uniformemente, determinar la intensidad de la corriente que debe recorrer la espiral para elevar la carga de la mesa. Menospreciar la masa de la espiral.
- Dos imanes pequeños con iguales momentos magnéticos  $p_m$  y masas  $m$  están suspendidos de hilos largos y ligeros. La distancia  $d$  entre los puntos de suspensión es muy grande. Las longitudes de los hilos son iguales. Mostrar que los imanes se orientarán de manera que se atraerán mutuamente. Definir el ángulo de desviación de los hilos respecto a la dirección vertical. Menospreciar la influencia del campo magnético de la Tierra.
- Una esfera de radio  $a$ , cargada uniformemente con una densidad superficial de la carga  $\sigma$ , gira alrededor del eje que atraviesa el centro de la esfera con una velocidad angular  $\omega$ . Hallar la inducción magnética en el centro de la esfera en rotación.
- ¿Cuál es el momento magnético, originado por una carga puntual  $q$  que se mueve por una circunferencia de radio  $r_0$  con una velocidad angular constante  $\omega$ ?

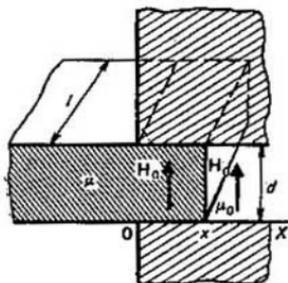


Fig. 161  
Para calcular la fuerza de interacción entre los imanes

- 6.5. En el espacio entre los polos de un imán permanente en el que existe un campo magnético  $H_0$  se introduce una placa de magnético con permeabilidad magnética  $\mu$  (Fig. 161). Hallar la fuerza que actúa sobre el magnético.
- 6.6. Hallar la fuerza en el problema 6.5 si la placa es un imán permanente, cuya imanación  $J_{\text{cont}}$  coincide en dirección con  $H_0$ .
- 6.7. Hallar la fuerza, con que la corriente superficial homogénea  $i_{\text{sup}}$ , que circula por un plano infinito, actúa sobre la longitud  $l$  de la corriente de intensidad  $I$ , paralela a aquélla y que pasa por un conductor lineal infinito a una distancia  $d$  del plano. Designese la normal a la superficie en dirección del conductor lineal por  $n$ .
- 6.8. La corriente de intensidad  $I_1$  circula por un conductor anular de radio  $a$ , yacente en el plano  $(x, y)$  con centro en el origen de coordenadas, y forma el tornillo derecho con dirección positiva del eje  $Z$ . La corriente de intensidad  $I_2$  recorre el conductor recto infinitamente largo en sentido paralelo al eje  $X$  en dirección de sus valores positivos, intersectando el eje  $Z$  en el punto  $x = d$ . Definir la fuerza que actúa sobre la corriente rectilínea.
- 6.9. Hallar la inducción magnética en el centro de un solenoide de longitud  $L$  con  $n$  espiras que tiene una sección cuadrada con el lado  $a$ . La intensidad de corriente que circula por el devanado del solenoide es igual a  $I$ .
- 6.10. Un disco de radio  $r$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje, perpendicular a la superficie del disco y que atraviesa su centro. Hallar la inducción del campo magnético en el eje de rotación del disco a la distancia  $h$  de su plano. La densidad superficial de la carga es igual a  $\sigma$ .
- 6.11. Una esfera dieléctrica polarizada de radio  $a$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje que atraviesa su centro. La polarización  $P$  es constante y coincide con la dirección de  $\omega$ . Hallar la inducción magnética en los puntos de intersección de la superficie de la esfera con el eje de rotación.
- 6.12. Un haz cilíndrico rectilíneo infinito de una sección transversal circular de radio  $a$  con una densidad volumétrica de la carga  $\rho$  se mueve en dirección de su eje con una velocidad  $v$ . Hallar la inducción magnética.
- 6.13. Por un conductor cilíndrico rectilíneo infinito de radio  $a$ , cuyo eje coincide con el eje  $Z$  del sistema cartesiano de coordenadas, circula una corriente de intensidad  $I$  en sentido positivo del eje  $Z$ . Hallar el potencial vectorial.
- 6.14. Hallar la componente axial del potencial vectorial en el centro de la espiral por la que circula la corriente de intensidad  $I$ . Los datos de la espiral se citan en el problema 1.7.
- 6.15. Una esfera dieléctrica de radio  $a$  gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje que atraviesa su centro. La densidad volumétrica de la carga de la esfera es igual a  $\rho$ . Hallar la inducción dentro de la esfera en el eje de rotación.
- 6.16. Un cilindro circular homogéneamente cargado de radio  $a$  y longitud  $l$ , cuya carga es  $Q$ , gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor de su eje. Hallar su momento magnético dipolar.
- 6.17. Hallar, en aproximación dipolar, la inductancia mutua de dos corrientes circulares de radios  $a_1$  y  $a_2$ , yacentes en un mismo plano. La distancia entre las espiras es igual a  $r$ .
- 6.18. El eje de un cilindro circular recto coincide con el eje  $Z$  del sistema cartesiano de coordenadas, cuyo origen se encuentra en el centro del cilindro. El cilindro está imantado homogéneamente. El vector de imanación coincide con la dirección positiva del eje  $Z$ :  $J = J_1 z$ . Hallar la inducción magnética en el eje del cilindro si el radio de su sección transversal es  $a$  y la longitud  $l$ .
- 6.19. Una capa esférica de magnético, cuyos radios de las superficies concéntricas exterior e interior son  $r_1$  y  $r_2$ , está homogéneamente imantada. El vector de imanación es para-

- lelo al eje  $Z$  del sistema de coordenadas cartesianas, cuyo centro coincide con el de las superficies y es igual a  $J_1$ . Hallar la intensidad del campo magnético en el eje  $Z$  para los valores positivos de  $z$ .
- 6.20. Un cilindro recto, cuya longitud es  $l$  y el radio de la sección circular  $a$ , está homogéneamente imantado. El vector de imanación es paralelo al eje del cilindro e igual a  $J$ . Hallar la inducción magnética en el centro del cilindro, considerando  $l \gg a$ .
- 6.21. Una esfera con densidad superficial de la carga  $\sigma$  gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular  $\omega$ . Hallar su momento magnético dipolar.
- 6.22. Una corriente de intensidad  $I$  circula por un conductor rectilíneo infinito, paralelo a la superficie de separación plana de los medios, uno con la permeabilidad magnética  $\mu_0$  en el que se encuentra el conductor con corriente, y el otro con la permeabilidad magnética  $\mu$ . Hallar la fuerza que actúa sobre la sección  $l$  del conductor. La distancia entre el conductor y la superficie de separación es  $d$ .
- 6.23. Sobre la superficie de una esfera de madera se enrollan con gran densidad en una capa las espiras de un alambre muy fino. Los planos de todas las espiras pueden considerarse perpendiculares a un mismo diámetro de la esfera. Las espiras cubren toda la superficie de la esfera. El radio de la esfera es  $a$  y la cantidad total de espiras es  $n$ . Una corriente de intensidad  $I$  circula por el devanado. Hallar la inducción magnética en el centro de la esfera.
- 6.24. En un conductor cilíndrico de radio  $a$  hay una cavidad cilíndrica de radio  $b$ , cuyo eje es paralelo al eje del conductor y se sitúa a una distancia  $d$  respecto a éste. El conductor es recorrido por una corriente con una densidad volumétrica  $j$ . Hallar la inducción magnética en los puntos del diámetro de la cavidad que coincide con el diámetro del conductor.

## Respuestas

- 6.1.  $I = \frac{1}{na} \sqrt{\frac{2mg}{\pi\mu_0}}$ . 6.2.  $\theta = \frac{3}{2} \frac{P_m^2}{\pi\mu_0 d^4} \frac{1}{mg}$ . 6.3.  $B = \frac{2}{3}\mu_0\sigma a\omega$ . 6.4.  $p_m = q\omega a^3/2$ . 6.5.  $F_x = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0)H_0^2 d$ . 6.6.  $F_x = \mu_0 J_n (H_0 + J_n) ld$ . 6.7.  $F = -\frac{1}{2}\mu_0 \epsilon_{\text{sup}} I n l$ . 6.8.  $F = -\frac{1}{2}\mu_0 I_1 I_2 (1 - d/\sqrt{d^2 + a^2})$ . 6.9.  $B = \mu_0 n I \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a^2}{L^2 + a^2}\right)$ . 6.10.  $B_h = \sigma\omega \left(\frac{h^2 + a^2/2}{\sqrt{h^2 + a^2}} - h\right)$ . 6.11.  $B_1 = \frac{2}{3}\mu_0 P a\omega$ ,  $B_2 = -\frac{2}{3}\mu_0 P a\omega$ . 6.12.  $B = \frac{1}{2}\mu_0 \rho v \times r$  para  $0 < r < a$ ,  $B = \frac{1}{2}\mu_0 \rho a^2 v \times r/r^3$  para  $a < r < \infty$ . 6.13.  $A_z = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^3}{a^2} + \text{const}$  para  $r < a$ ,  $A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{const}$  para  $a < r < \infty$ , donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 6.14.  $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(n\pi \alpha + \sqrt{1 + \pi^2 n^2 \tan^2 \alpha})$ . 6.15. 0. 6.16.  $Qa^2\omega/4$ . 6.17.  $L_{12} = \pi\mu_0 a_1^2 a_2^2 / (4r^3)$ . 6.18.  $B_z = \frac{\mu_0}{2} J \times \left(\frac{z+l/2}{\sqrt{a^2 + (z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{a^2 + (z-l/2)^2}}\right)$ . 6.19.  $H_z = 0$  para  $0 < z < r_1$ ,  $H_z = -\frac{J(z^2 + 2r_1^2)}{3z^3}$  para  $r_1 < z < r_2$ ,  $H_z = 2J(r_2^2 - r_1^2)/(3z^3)$  para  $r_2 < z < \infty$ . 6.20.  $B = \mu_0 J (1 - a^2/l^2)$ . 6.21.  $p_m = 4/3\pi\sigma a^4\omega$ . 6.22.  $F = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I^2$ . 6.23.  $\mu_0 n I / (4a)$ . 6.24.  $\mu_0 d/2$ .

# Magnéticos

Desde el punto de vista fenomenológico, las propiedades del magnético en un campo magnético se tienen en cuenta mediante la permeabilidad magnética. Las dependencias con respecto a diversos parámetros son muy variadas como son multiformes los propios magnéticos. Estas dependencias se interpretan construyendo modelos de los magnéticos que tienen en cuenta las peculiaridades de su comportamiento en el campo magnético.

## § 40. Substancias diamagnéticas

*Se examinan la naturaleza física de la susceptibilidad diamagnética y sus propiedades*

**Precisión de Larmor.** En el campo magnético la frecuencia de rotación de los electrones en el átomo se distingue de su frecuencia de rotación en ausencia del mencionado campo. Para cerciorarse de ello examinemos el caso más sencillo cuando en ausencia del campo magnético el electrón se mueve alrededor del núcleo por una órbita circular de radio  $r$  y la frecuencia de su rotación es igual a  $\omega_0$  (fig. 162). La ecuación de Newton para el movimiento del electrón tiene la forma

$$m\omega_0^2 r = F_{\text{cent}}, \quad (40.1)$$

donde  $F_{\text{cent}}$  es la fuerza centrípeta que surge como consecuencia de la atracción del electrón por el núcleo. Esta fuerza es bastante grande en comparación con las fuerzas que actúan sobre el electrón por parte de los campos exteriores, por eso *los radios de las órbitas de los electrones no varían al colocar el átomo en un campo exterior. Con respecto a los campos exteriores, el átomo con gran precisión puede considerarse rígido.*

Ahora sea que el átomo se encuentre en un campo exterior, cuyo vector de inducción  $B$  es perpendicular al plano de la órbita del electrón. La fuerza de Lorentz actúa a lo largo del radio  $y$ , según su dirección o bien coincide con la fuerza centrípeta, o bien tiene sentido contrario en función de la orientación relativa de los vectores de velocidad angular del movimiento del electrón por la órbita y la inducción magnética. Por su valor absoluto, esta fuerza es igual a

$$F = |e| \omega r B, \quad (40.2)$$

donde  $|e|$  es la carga del electrón y  $\omega$ , la frecuencia de rotación del electrón por la órbita en el campo magnético, diferente de  $\omega_0$ .

La ecuación del movimiento del electrón en el campo magnético tiene la forma

$$m\omega^2 r = F_{\text{cent}} \pm |e| \omega r B, \quad (40.3)$$

donde el radio  $r$  de la órbita del electrón es el mismo que en (40.1) y los signos ( $\pm$ ) se eligen conforme a la orientación relativa de los vectores de velocidad angular del movimiento del electrón por la órbita y la inducción magnética. Claro está que la fuerza centrípeta  $F_{\text{cent}}$  en (40.3) es la misma que en (40.1), ya que es la fuerza de atracción que proviene del núcleo y la distancia  $r$  no cambió. Excluyendo  $F_{\text{cent}}$  de dichas ecuaciones, recibimos

$$m\omega^2 r - m\omega_0 r = \pm |e| \omega r B. \quad (40.4)$$

Teniendo en cuenta que  $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\Delta\omega\omega$ , donde  $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0| \ll \omega$ , de (40.4) hallamos  $\Delta\omega = \pm |e| B / (2m)$ .

Así pues, en el campo magnético el electrón adquiere una velocidad angular complementaria de movimiento que se caracteriza por la frecuencia

$$\omega_L = |e| B / (2m), \quad (40.6)$$

que se denomina frecuencia de Larmor. No es difícil determinar la dirección del vector de velocidad angular. Verbigracia, si la inducción  $\mathbf{B}$  (véase la fig. 162) está dirigida en sentido contrario a la velocidad angular de movimiento del electrón alrededor del núcleo, la fuerza  $\mathbf{F}$  está dirigida en sentido contrario a  $\mathbf{F}_{\text{cent}}$  y, por lo tanto, la velocidad del electrón y la frecuencia de rotación deben disminuir. Ello significa que  $\omega_L$  coincide con la dirección de  $\mathbf{B}$ . Si la dirección de  $\mathbf{B}$  es contraria a la inicial, llegamos a la misma conclusión. Por esta razón, puede escribirse

$$\omega_L = -e\mathbf{B}/(2m), \quad (40.7)$$

donde se tiene en cuenta que la carga del electrón  $e$  es negativa. La formación de esta velocidad angular complementaria de rotación sin cambiar el radio de la órbita puede representarse como una rotación complementaria del átomo como algo entero con una frecuencia  $\omega_L$  en el campo magnético. La frecuencia total de rotación del electrón es igual a la suma de su frecuencia de rotación  $\omega_0$  en el átomo y la frecuencia de rotación  $\omega_L$  del átomo. Todo ello es correcto sólo para cuando los vectores de velocidad angular y de inducción del campo magnético son colineales.

Dado que la velocidad del electrón en el átomo, ubicado en un campo magnético, varía, cambia también su energía cinética. Por otra parte, ya que  $r$  permanece invariable, la energía potencial no cambia. Se pregunta, ¿debido a qué cambia la energía del electrón en el átomo si se sabe que el campo magnético

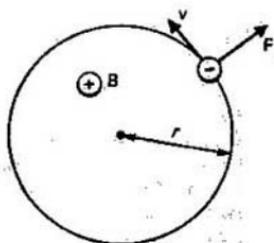


Fig. 162  
Aparición de la velocidad angular complementaria de rotación de los electrones en un campo magnético

tico actúa siempre perpendicularmente a la velocidad y no efectúa trabajo? La respuesta a este interrogante puede darse sólo en los márgenes de la teoría de la inducción electromagnética (véase el capítulo 8): *al surgir el campo magnético, se engendra el campo eléctrico, cuya acción cambia la velocidad de movimiento de los electrones en el átomo.*

Para imaginarnos cuál será el movimiento del átomo siendo arbitraria la orientación mutua de la velocidad angular del electrón alrededor del núcleo y la inducción del campo exterior, generalicemos los resultados obtenidos para un caso cualquiera. El átomo con el electrón que se mueve en él por una circunferencia, puede examinarse como un giróscopo que posee un momento magnético.

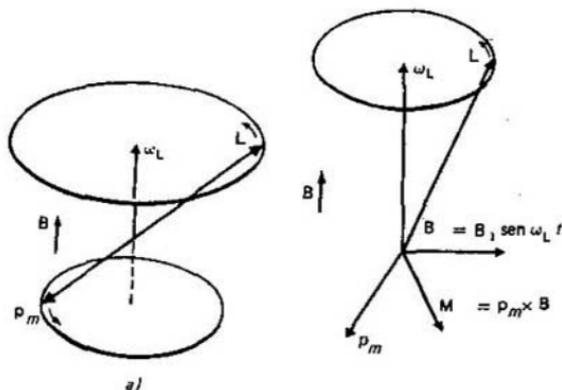


Fig. 163  
Precesión de Larmor (a); surgimiento de la resonancia paramagnética (b)

El momento de impulso del electrón es igual a  $m\omega r^2$ . El electrón en movimiento por la órbita equivale a la corriente circular de una intensidad  $e/T = e\omega/(2\pi)$  y, por lo tanto, el momento magnético del átomo es igual a  $\pi r^2 e\omega/(2\pi)$ . Teniendo en cuenta la dirección de los momentos magnético y mecánico del átomo, determinados por el movimiento del electrón, escribimos

$$L = mr^2\omega, \quad p_m = (er^2/2)\omega. \quad (40.8)$$

Aquí se toma en consideración que la carga  $e$  del electrón es negativa y el momento mecánico  $L$  y el momento magnético  $p_m$  tienen direcciones contrarias (fig. 163, a).

La ecuación de movimiento del átomo, considerado como un giróscopo, tiene el aspecto

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (40.9)$$

donde  $M$  es el momento de fuerzas [véase (39.8)]. De (40.8) se desprende que

$$p_m = eL/2m \quad (40.10)$$

y, por lo tanto, la ecuación (40.9) toma la forma

$$\frac{dL}{dt} = \frac{e}{2m} L \times B = -\frac{e}{2m} B \times L \quad (40.11)$$

La comparación de (40.11) con la ecuación del movimiento de los puntos de un sólido que gira con una velocidad angular  $\omega$ ,

$$v = dr/dt = \omega \times r \quad (40.12)$$

muestran que el extremo del vector  $L$  se mueve alrededor de la dirección del vector de inducción con una frecuencia

$$\omega_L = -eB/(2m). \quad (40.13)$$

Por consiguiente, el átomo efectúa en el campo magnético un movimiento de precesión semejante a un giroscopo (fig. 163, b). Dicho movimiento se denomina precesión de Larmor.

**Diamagnetismo.** Como consecuencia de la precesión de Larmor, cada electrón en el átomo crea una corriente circular que con la dirección del vector de inducción del campo magnético forma un sistema inverso. Por lo tanto, la inducción complementaria del campo magnético, originada por esa corriente circular, está dirigida en oposición al vector de inducción del campo magnético exterior. El momento magnético del átomo que surge como consecuencia de la precesión, y la imanación están también orientados en sentido contrario al vector de inducción del campo magnético exterior. Este cuadro de aparición de la precesión de Larmor, asimismo el momento magnético y el campo magnético complementario, relacionados con ella, forman la esencia del diamagnetismo. Es evidente que toda substancia posee diamagnetismo. La cuestión consiste sólo en la estimación de su magnitud.

**Susceptibilidad diamagnética.** Cada electrón en el átomo realiza un movimiento de Larmor alrededor del eje que coincide con la dirección del campo magnético (fig. 164). El momento magnético que surge como resultado de esto es

$$p_{mi} = S_i I_i = \pi r_i^2 e / T = e r_i^2 \omega_L / 2, \quad (40.14)$$

de donde

$$J = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} p_{mi} = -\frac{e^2}{4m} BN \left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle, \quad (40.15)$$

donde  $N$  es la concentración de átomos. En (40.15) se utiliza la expresión para la frecuencia de Larmor y bajo el signo de la suma del término medio se encuentra la suma de los cuadrados de las distancias de los electrones en el átomo desde el eje de precesión de Larmor. De la fig. 164 se ve que

$$R_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad (40.16)$$

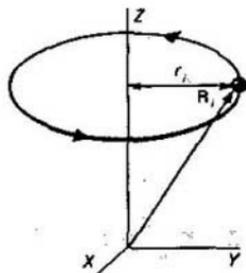


Fig. 164  
Para calcular la susceptibilidad diamagnética

donde  $R_i$  es la distancia del electrón respecto al núcleo. Tomando en consideración la orientación caótica de los átomos en el espacio, tenemos

$$\langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \langle z_i^2 \rangle = \langle R_i^2 \rangle / 3 \quad (40.17)$$

y, por lo tanto,

$$\langle r_i^2 \rangle = \langle x_i^2 + y_i^2 \rangle = 2 \langle R_i^2 \rangle / 3 = 2 \langle R^2 \rangle / 3, \quad (40.18)$$

de donde

$$\left\langle \sum_i r_i^2 \right\rangle = 2Z \langle R^2 \rangle / 3, \quad (40.19)$$

donde  $Z$  es el número de electrones en el átomo. Por esta razón, en definitiva, obtenemos para la imanación la siguiente fórmula

$$J = -\frac{e^2}{6m} NZ \langle R^2 \rangle \mu H. \quad (40.20)$$

Comparando (40.20) con la fórmula

$$J = \chi_d H, \quad (40.21)$$

obtenemos para la susceptibilidad diamagnética la expresión

$$\chi_d = -\frac{e^2}{6m} NZ \langle R^2 \rangle \mu_0, \quad (40.22)$$

donde se tiene en cuenta que  $\mu \approx \mu_0$ , ya que la permeabilidad de los diamagnéticos se diferencia poco de la permeabilidad del vacío. La fórmula (40.22) concuerda bien con el experimento si bajo  $\langle R^2 \rangle$  se comprende el cuadrado medio de la distancia del electrón respecto al núcleo en el átomo, calculado por la teoría cuántica. Para los sólidos y líquidos la susceptibilidad diamagnética tiene el orden de  $\sim 10^{-5}$ , mientras que para los gases es considerablemente inferior, debido a la menor concentración de átomos [es decir, menores valores de  $N$  en la fórmula (40.22)].

Independencia de la susceptibilidad diamagnética con respecto a la temperatura. La fórmula (40.22) muestra que  $\chi_d$  no depende de la temperatura, ya que ninguna de las magnitudes que entran en la fórmula puede ser función de la temperatura. Eso se explica por el hecho de que el movimiento de Larmor de los electrones se establece muy pronto, durante lapsos, característicos para los procesos atómicos. Por eso el movimiento térmico y las colisiones de los átomos no les sacan del estado de precesión de Larmor para cierto tiempo notorio. Esto se confirma bien por el experimento: La independencia de la susceptibilidad diamagnética respecto a la temperatura fue descubierta experimentalmente en 1895 por P. Curie (1859—1906).

La variación de la frecuencia de rotación del electrón en el átomo que determina el diamagnetismo, surge al cambiar la inducción del campo magnético en el momento de introducir el átomo en el campo magnético o en el momento de aparecer el campo magnético. El campo magnético por sí mismo no efectúa trabajo alguno y no puede cambiar la velocidad de movimiento de los electrones en el átomo.

La susceptibilidad diamagnética no depende de la temperatura, ya que el movimiento térmico y las colisiones de los átomos no los sacan para un tiempo algo notorio del estado de precesión de Larmor.

## § 41. Substancias paramagnéticas

*Se examinan la naturaleza física de la susceptibilidad paramagnética y sus propiedades. Se describen el magnetismo, determinado por los electrones libres, y la resonancia paramagnética.*

**Mecanismo de la imanación.** Las substancias, cuyas moléculas poseen momentos magnéticos permanentes, se denominan paramagnéticas. La energía del momento magnético en el campo magnético exterior es

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}. \quad (41.1)$$

El mínimo de energía se alcanza cuando  $\mathbf{p}_m$  coincide con la inducción del vector de inducción, merced a lo cual al introducir el cuerpo paramagnético en un campo magnético conforme a la distribución de Boltzmann, surgen una orientación principal de los momentos magnéticos de sus átomos en dirección de la inducción y la imanación correspondiente. La inducción del campo magnético a causa de la imanación coincide en dirección con la inducción del campo exterior y la amplifica. En cambio, el ángulo entre la dirección del momento magnético del átomo y la inducción del campo magnético bajo la acción del campo no varía: el momento magnético sufre sólo un movimiento de precesión alrededor de la dirección del vector de inducción sin cambiar el ángulo entre ellos [véase (40.11)]. La reorientación de los momentos magnéticos, conforme a la distribución de Boltzmann, transcurre como consecuencia de las colisiones e interacción de los átomos entre sí.

**Dependencia entre la susceptibilidad paramagnética y la temperatura.**

El mecanismo de imanación de las substancias paramagnéticas es semejante al mecanismo de la electrización de los dieléctricos polares (véase el § 22). La diferencia consiste sólo en que es necesario utilizar la fórmula (41.1) en lugar de la (22.1). Por eso las fórmulas para la susceptibilidad paramagnética se obtienen, sustituyendo las magnitudes  $p \rightarrow \mathbf{p}_m$ ,  $E \rightarrow \mathbf{B}$  en las fórmulas del § 22 para la susceptibilidad dieléctrica.

En vez de (22.10) obtenemos la fórmula

$$\langle p_{mz} \rangle = p_m L(\beta), \quad (41.2)$$

donde  $L(\beta)$  es la función de Langevin (véase el § 22) para  $\beta = p_m B / (kT)$ . Para temperaturas relativamente altas y campos pequeños, cuando  $p_m B \ll kT$ , o sea,  $\beta \ll 1$ , en lugar de (22.13) obtenemos la fórmula

$$\langle p_{mz} \rangle = p_m^2 B / (3kT) \approx p_m^2 \mu_0 H / (3kT), \quad (41.3)$$

donde  $\mu \approx \mu_0$  ya que la permeabilidad magnética de los cuerpos paramagnéticos no se diferencia mucho de  $\mu_0$ . Para la imanación recibimos la fórmula

$$J = N \langle p_{mz} \rangle = [p_m^2 N \mu_0 / (3kT)] H, \quad (41.4)$$

cuya comparación con la igualdad

$$J = \chi_p H \quad (41.5)$$

conduce a la siguiente expresión para la susceptibilidad paramagnética:

$$\chi_p = p_m^2 N \mu_0 / (3kT) = C/T, \quad (41.6)$$

donde  $C$  es la constante de Curie.

La dependencia  $\chi_p \sim 1/T$  se denomina ley de Curie, pues fue descubierta experimentalmente en 1896 por P. Curie.

El valor de los momentos magnéticos atómicos tiene el orden de  $p_m \sim 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ , por eso a temperatura ambiente,  $\chi_p \sim 10^{-8}$ , es decir,  $\chi_p$  es dos órdenes mayor que la susceptibilidad diamagnética. Eso significa que en las sustancias paramagnéticas se puede prescindir de la susceptibilidad diamagnética.

La teoría de Langevin describe con bastante precisión sólo los gases, cuya interacción entre las moléculas es menospreciablemente pequeña debido a las grandes distancias entre ellas. En los líquidos y sólidos semejante interacción puede ser considerable. La consideración de esa interacción modifica en muchos casos la dependencia (41.6) de la susceptibilidad respecto a la temperatura. Dicha dependencia adquiere la forma de la ley de Curie-Weiss:

$$\chi_p = \text{const}/(T - T_0), \quad (41.7)$$

donde la temperatura  $T_0$  es característica para la sustancia y se determina por sus propiedades.

**Momentos magnéticos de los átomos libres.** Los momentos magnéticos de los átomos surgen debido a dos factores:

1) al movimiento orbital de los electrones. El momento magnético orbital total del átomo es la suma de los momentos magnéticos orbitales de electrones aislados;

2) a la presencia de momento magnético propio en cada electrón, relacionado con el spin, es decir, de un momento mecánico propio del electrón.

Los momentos magnéticos de los electrones aislados se enlazan entre sí, formando un momento magnético de spin total del átomo. Cada electrón, moviéndose en un campo magnético, originado por el movimiento orbital de todos los demás electrones, merced a la existencia del momento magnético de spin, está en interacción con dicho campo. Esta interacción se denomina spin-orbital. *Gracias a ella el momento orbital de los electrones se enlaza con su momento magnético de spin, formando el momento magnético total del átomo. Sobre semejante forma de crear el momento magnético total del átomo se habla como del enlace LS.* En principio puede haber otro camino de aparición del momento magnético total del átomo: *primero el momento magnético de spin de cada electrón se enlaza con el momento orbital del mismo electrón, formando el momento magnético total del electrón y luego los momentos magnéticos totales de los electrones se unen entre sí y se crea el momento magnético total del átomo.* Pero en la mayoría de los casos, a excepción de los elementos más pesados, esta forma no se realiza, ya que la intensidad de interacción del momento magnético de spin del electrón con su propio momento orbital resulta más débil que su interacción con los momentos magné-

ticos de spin de los demás electrones y el momento magnético total para cada electrón por separado no surge. Por esta razón, *en la mayoría de los casos se realiza el enlace LS.*

La cuestión sobre la adición del momento magnético orbital total con el momento de spin total exige tener en cuenta la circunstancia de que el factor de proporcionalidad en la relación lineal entre el momento magnético orbital total y el momento mecánico orbital total se diferencia del factor de proporcionalidad en la relación lineal entre el momento magnético de spin total y el spin total. Según la regla de adición de los vectores, en el átomo se suman los momentos mecánicos totales, mientras que la adición de los momentos magnéticos se obtiene como consecuencia de la adición de los momentos mecánicos. En definitiva, *el momento magnético total del átomo puede ser no colineal con su momento mecánico interno total.*

El problema de los momentos magnéticos de los átomos libres se simplifica merced a que, desde el punto de vista energético, es ventajoso el relleno de las capas atómicas por los electrones, para el cual el momento total posee el valor mínimo. Debido a esto, los momentos de spin y orbital total de las capas llenas cerradas del átomo, así como el momento total de las capas completamente llenas son nulos. Por lo tanto, *el momento magnético del átomo se determina sólo por los electrones de las capas que no están llenas por completo.* En la mayoría de los casos semejantes capas son exteriores. La simplificación posterior del cuadro se obtiene debido a que los spines de los electrones y los momentos orbitales en la capa exterior tienden a orientarse en direcciones contrarias para compensarse en lo máximo. Por esta razón, *el momento magnético del átomo libre se determina, en lo principal, por los spines no compensados de los electrones exteriores.*

Momentos magnéticos de las moléculas. El momento magnético de la molécula no es igual a la suma de los momentos magnéticos de los átomos, ya que la realización del enlace químico entre los átomos requiere cierta reestructuración de las capas atómicas exteriores. Por ejemplo, la molécula de nitrógeno  $N_2$  se efectúa por el enlace covalente y los dos electrones generalizados poseen spines antiparalelos. Los momentos orbitales están también compensados y se anulan. Como consecuencia, resulta que las moléculas de  $N_2$  no poseen un momento magnético permanente, o sea, el nitrógeno no es una sustancia paramagnética. En las moléculas con enlace iónico se observa la misma tendencia de compensar los momentos magnéticos. Verbigracia, la molécula de sal común NaCl se realiza mediante el enlace iónico entre  $Na^+$  y  $Cl^-$ . Los dos iones poseen capas electrónicas cerradas, debido a lo cual el momento magnético total es nulo. Puede decirse que *la tendencia general al formarse las moléculas consiste en garantizar un momento total nulo.* Entre los gases difundidos sólo el oxígeno  $O_2$ , cuyos spines de los electrones generalizados no están compensados, posee propiedades paramagnéticas, asimismo NO y  $NO_2$ , cuya cantidad total de electrones es impar y, por lo tanto, el spin de uno de los electrones resulta no compensado.

La mayoría de los sólidos consta de iones con capas cerradas, merced a lo cual no poseen propiedades paramagnéticas, sino que son sólo sustancias diamagnéticas. La excepción principal de dicha regla la forman los compuestos, en

cuya composición entran los elementos de transición. La capa electrónica de estos elementos está llena sólo parcialmente, por lo que son multivalentes y sus iones poseen momentos magnéticos permanentes. Así pues, *el paramagnetismo de los compuestos de elementos de transición se determina por los momentos magnéticos de sus iones*. Los iones con configuraciones parecidas de las capas electrónicas exteriores conducen a semejantes propiedades paramagnéticas de los compuestos.

**Magnetismo determinado por los electrones libres.** A pesar de que los electrones en el campo magnético, influidos por la fuerza de Lorentz, se mueven por circunferencias, la teoría clásica predice la ausencia del efecto diamagnético a causa de la reflexión de los electrones en las fronteras de la zona, mientras que la teoría cuántica afirma su existencia. La susceptibilidad diamagnética resulta ser igual a

$$\chi_d = -\frac{\mu_0 e^2}{6\pi m^*} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}, \quad (41.8)$$

donde  $m^*$  es la masa efectiva de los electrones libres y  $n$ , su concentración. Para una inducción del campo magnético no muy grande la susceptibilidad diamagnética es constante y no depende de la temperatura.

Otro efecto magnético, relacionado con los electrones de conducción, se determina por la interacción del momento magnético de spin del electrón con el campo magnético, merced a lo cual surge un exceso de electrones, cuyos momentos magnéticos de spin están orientados respecto a la dirección de la inducción del campo, en comparación con los electrones con momentos magnéticos de spin contrarios. Este fenómeno se denomina **paramagnetismo de los electrones de conducción**. Como muestran los cálculos, en condiciones de laboratorio la susceptibilidad paramagnética de los electrones de conducción no depende prácticamente de la temperatura. El paramagnetismo de los electrones de conducción se manifiesta con más intensidad en los metales de transición. En condiciones de laboratorio la susceptibilidad diamagnética de los electrones de conducción casi siempre es inferior a su susceptibilidad paramagnética (aproximadamente tres veces) y por eso su susceptibilidad sumaria resulta ser positiva (paramagnética).

**Resonancia paramagnética.** Imaginémosnos que en la substancia paramagnética, ubicada en un campo magnético, se crea un campo magnético periódico complementario, cuyo vector de inducción es perpendicular al vector de inducción del campo continuo. Debido al campo magnético continuo (fig. 163, b) los momentos magnéticos de los átomos realizan la precesión de Larmor. Como resultado de la interacción del momento magnético  $p_m$  del átomo con la inducción  $B$  del campo magnético alternativo se origina el momento de fuerzas  $M$  que tiende a cambiar el ángulo entre  $p_m$  y  $B$ . Si la frecuencia del campo magnético alternativo se diferencia de la frecuencia de la precesión de Larmor, una parte del tiempo este momento tiende a aumentar el ángulo entre  $p_m$  y  $B$ , y otra parte del tiempo, a disminuirlo, así, en término medio, no se observa ningún efecto. Pero si las frecuencias del campo magnético alternativo y de la precesión de Larmor coinciden, el momento de fuerzas, creado por el campo magné-

tico alternativo, o aumenta todo el tiempo el ángulo entre el momento atómico y la inducción del campo magnético continuo, o bien lo disminuye, en función de la relación de las fases en la precesión de Larmor y la inducción del campo magnético alternativo. *Como consecuencia de semejante acción, relativamente larga, del momento de fuerzas suceden la reorientación del momento magnético del átomo y la variación del ángulo entre éste y el vector de inducción del campo magnético continuo.* Este fenómeno se denomina **resonancia paramagnética**. La reorientación del momento magnético conforme a la fórmula (41.1) está ligada con la variación de la energía del momento magnético en un campo magnético continuo, lo que, según el principio de conservación de la energía, va acompañada por el intercambio de energía con el campo magnético alternativo. Dicho campo se efectúa en forma de ondas electromagnéticas estacionarias, cuyo vector magnético es perpendicular al vector de inducción del campo magnético continuo. Así pues, *el intercambio de energía ocurre con la onda electromagnética.*

Como consecuencia de ello, se forman grupos de átomos con una orientación de los momentos magnéticos, paralela a la inducción del campo magnético y antiparalela, es decir, que poseen, conforme a (41.1) distinta energía de interacción con el campo magnético. Las energías de los átomos con orientación antiparalela son mayores que con orientación paralela.

Además del mecanismo de reorientación de los momentos magnéticos mediante el campo electromagnético alternativo, actúa constantemente el mecanismo de reorientación de los momentos magnéticos mediante el movimiento térmico y la interacción entre los átomos. En condiciones de la acción simultánea de dichos mecanismos, el movimiento térmico y la interacción de los átomos efectúan principalmente la reorientación de los momentos magnéticos, antiparalelos al vector de inducción. La energía que se libera en este caso se transforma en calor. La reorientación de los momentos magnéticos, paralelos a la inducción, se realiza con preferencia como consecuencia de la absorción de la energía de la onda electromagnética. Por eso *la observación de la resonancia paramagnética se reduce a la medición de la intensidad de la onda electromagnética que pasa por la sustancia paramagnética en el campo magnético.* Desde el punto de vista experimental, es más fácil utilizar la onda electromagnética de frecuencia fija y lograr la resonancia cambiando la inducción del campo magnético. En el momento cuando la frecuencia de Larmor, correspondiente a la inducción del campo, es igual a la frecuencia de la onda electromagnética, se observa un brusco debilitamiento de su intensidad, que testimonia el comienzo de la resonancia paramagnética.

La resonancia paramagnética permite obtener una información extensa y variada sobre las propiedades de la sustancia paramagnética y se utiliza ampliamente en las investigaciones científicas.

Este cuadro clásico del surgimiento de la resonancia paramagnética sólo tiene carácter cualitativo. Un enfoque más estricto puede efectuarse en los márgenes de la teoría cuántica, basada en la representación de la absorción y la emisión de cuantos de la radiación electromagnética por los sistemas atómicos con la correspondiente reorientación a salto de los momentos magnéticos que aseguran el cumplimiento del principio de conservación de la energía. En los már-

genes de estas representaciones se logra obtener relaciones cuantitativas que caracterizan la resonancia paramagnética.

De la fórmula (40.13) se desprende que siendo la inducción del campo magnético de 1 T, la frecuencia de la resonancia paramagnética tiene el orden de  $10^{10}$  Hz. Al disminuir la inducción, esa frecuencia se reduce respectivamente y puede tenerse la esperanza de observar la resonancia paramagnética a frecuencias relativamente bajas. Sin embargo, no se acierta observarla a frecuencias inferiores a  $10^8$  Hz, es decir, para la inducción del campo continuo aproximadamente igual a 0,01 T.

Esto está en concordancia con la teoría cuántica de la resonancia paramagnética que predice una disminución considerable de la absorción de las ondas electromagnéticas al reducir su frecuencia, merced a lo cual a frecuencias relativamente bajas, la resonancia se manifiesta de manera bastante débil. Las frecuencias del orden de  $10^{10}$  Hz (la longitud de onda es de 3 cm) son las que más se utilizan en las investigaciones.

## § 42. Substancias ferromagnéticas

*Se analizan los hechos experimentales fundamentales del ferromagnetismo y se da su interpretación elemental teórica. Se introduce la idea sobre el anti-ferromagnetismo, ferrimagnetismo y la resonancia ferromagnética.*

**Definición.** *Los magnéticos, cuya permeabilidad magnética alcanza grandes valores y depende del campo magnético exterior y de la prehistoria, se denominan substancias ferromagnéticas. Ellas poseen imanación residual, es decir, su imanación puede ser diferente de cero en ausencia del campo magnético exterior. En este caso son imanes permanentes. Así pues, según sus manifestaciones formales, las substancias ferromagnéticas se parecen a las ferroeléctricas (véase el § 23). Hay que señalar que el ferromagnetismo fue descubierto y estudiado mucho antes que la ferroelectricidad. En 1878 A.G. Stolétov (1839—1896) investigó la imanación de los ferromagnéticos. Construyó la curva de la permeabilidad magnética (fig. 168), llamada más tarde curva de Stolétov. La histéresis fue descubierta en 1880 por Warburg (1846—1934).*

**Curva de imanación y ciclo de histéresis.** *La susceptibilidad magnética de las substancias ferromagnéticas es función de la intensidad del campo exterior y la dependencia de  $J(H)$  tiene la forma dada en la fig. 165. Al crecer la intensidad, la imanación no aumenta ilimitadamente, sino que tiene un límite, denominado imanación de saturación. Su existencia por analogía con las substancias paramagnéticas, muestra que la imanación de las substancias ferromagnéticas se determina también por la reorientación de ciertos momentos magnéticos elementales.*

Dado que

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J, \quad (42.1)$$

la curva de la dependencia  $B(H)$  no llega a la saturación, a pesar de que  $J$  sufre la saturación. La gráfica de dicha dependencia se denomina *curva de imanación* (fig. 166).

Si efectuamos la remagnetización de la muestra en un campo magnético periódico, en analogía completa con las sustancias ferroeléctricas, la curva de

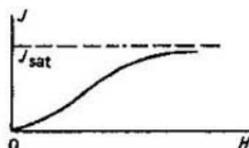


Fig. 165  
Saturación de la imanación

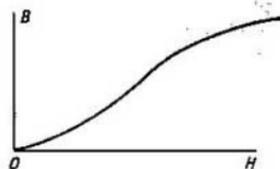


Fig. 166  
Curva de imanación

la dependencia  $B(H)$  tiene forma de un ciclo, llamado *ciclo de histéresis* (fig. 167). La sección  $OA$  es la curva de imanación, ya que la conexión del campo se efectúa a un valor nulo de la inducción, o sea, en ausencia de imanación permanente. La curva cerrada  $ACDFGKA$  es el ciclo de histéresis. Su demostración se lleva

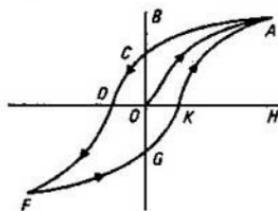


Fig. 167  
Ciclo de histéresis

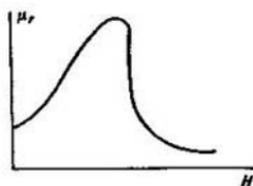


Fig. 168  
Curva de permeabilidad magnética (curva de Stolétov)

a cabo por el mismo esquema que al demostrar el ciclo de histéresis de las sustancias ferroeléctricas, sustituyendo los condensadores por las bobinas (véase el § 23).

Al disminuir la intensidad  $H$  del campo magnético desde cierto valor (punto  $A$ ) hasta cero, la inducción  $B$  del campo se reduce sólo un poco, hasta el valor de inducción, descrito por el segmento  $OC$ . Esa inducción se denomina *residual*. El cuerpo ferromagnético en este estado se llama *imán permanente*.

Para liquidar el campo residual, es necesario aplicar un campo inverso, cuya intensidad se prefija por el segmento  $OD$ . Dicha intensidad se denomina

de retardo o fuerza coercitiva de la sustancia ferromagnética. La forma del ciclo de histéresis, la inducción residual y la fuerza coercitiva dependen del material de la sustancia ferromagnética y cambian para distintos materiales en amplios límites.

**Curva de la permeabilidad magnética.** La permeabilidad magnética relativa  $\mu_r = \mu/\mu_0 = B/(\mu_0 H)$  como función de  $H$  puede construirse por medio de los datos de la curva de imanación (fig. 166) y tiene la forma que ofrece la fig. 168. Al crecer  $H$ , el valor de  $\mu_r$  alcanza el máximo y luego, al alcanzar la saturación de la imanación, disminuye rápidamente. Las sustancias ferromagnéticas con frecuencia poseen  $\mu_r$  del orden de  $10^4$  en el máximo.

**Clasificación de los materiales ferromagnéticos.** Los materiales ferromagnéticos pueden dividirse en dos grupos:

- 1) materiales magnéticamente blandos con una permeabilidad magnética grande que se imantan y desimantan fácilmente y poseen pequeña fuerza coercitiva;
- 2) materiales magnéticamente duros con una permeabilidad magnética relativamente baja que se imantan y desimantan con dificultad y poseen una fuerza coercitiva grande.

Los materiales del primer grupo se utilizan principalmente en la electrotecnia de los campos alternativos, en particular, en los transformadores, y los del segundo grupo, para confeccionar imanes permanentes.

**Interacción de los electrones.** El ferromagnetismo puede examinarse sólo en los márgenes de la teoría cuántica. Pues *dentro de la teoría clásica se puede únicamente describir las propiedades de las sustancias ferromagnéticas y discutir desde el punto de vista cualitativo el mecanismo de su aparición.*

En los ensayos de Einstein y de Haas por primera vez se estableció experimentalmente que el ferromagnetismo se determina por los spines de los electrones. Las sustancias ferromagnéticas poseen la propiedad de la imanación espontánea cuando en ausencia de campos magnéticos exteriores, influidos por causas internas, los spines de los electrones tienden a orientarse en una dirección común. Sin embargo, al modelo en total no le es energéticamente ventajoso estar imantado. Por eso él se divide en pequeñas zonas imantadas, dominios. Cada dominio se imanta en un sentido determinado, pero la dirección del vector de imanación en los dominios vecinos es diferente, por lo que el momento magnético de los pequeños volúmenes físicos resulta ser nulo, es decir, el magnético en total, no está imantado.

Lo dicho demuestra que *la cuestión principal de la teoría del ferromagnetismo consiste en explicar la tendencia de los spines de los electrones a orientarse en una dirección común.* Ya que en el sistema se realiza el estado con la energía mínima, la tarea consiste en hallar tal interacción, para la que sea ventajosa la orientación paralela de los momentos magnéticos de spin de los diversos átomos. Para eso es necesario que la energía total sea mínima para la orientación paralela de los momentos.

La aparición de semejante situación está relacionada con la interacción de cambio. Debido a que los electrones se someten a la estadística de Fermi-Dirac que no permite que dos partículas se encuentren en un mismo estado, los

electrones con spines paralelos resultan como separados en el espacio, merced a lo cual disminuye su energía de interacción coulombiana en comparación con los electrones que poseen spines antiparalelos, cuando pueden estar situados en el espacio uno más cerca del otro. Se llama energía de interacción de cambio la diferencia de energías entre las configuraciones con spines paralelos y antiparalelos.

No obstante, semejante situación por sí misma no asegura el surgimiento del ferromagnetismo, ya que al disminuir la interacción coulombiana para los spines paralelos tiene lugar el aumento de su energía cinética. En la mayoría de los casos tampoco resulta ventajosa la energía total de las configuraciones con spines paralelos. Sólo en raros casos, cuando la reducción de la energía potencial para los spines paralelos es considerablemente mayor que el aumento de la energía cinética, la energía total disminuye. Entonces las configuraciones con spines paralelos se convierten en ventajosas desde el punto de vista energético, y surge el ferromagnetismo. La investigación de las condiciones, para las que puede realizarse semejante situación constituye el objeto de la teoría del ferromagnetismo. Aquí el papel principal lo desempeña la elección correcta de la expresión para la energía de interacción.

**Teoría elemental del ferromagnetismo.** La energía de cambio en la teoría del ferromagnetismo se da mediante la fórmula

$$W_{\text{cam}} = -2I_{\text{cam}} S_1 \cdot S_2, \quad (42.2)$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son los spines de los electrones en interacción e  $I_{\text{cam}}$ , la integral de la interacción de cambio. De la fórmula (42.2) se ve que para  $I_{\text{cam}} > 0$  la energía potencial alcanza el mínimo para los spines paralelos. Dicha energía se condiciona por la interacción del momento magnético del electrón con el campo magnético y se expresa por medio de la fórmula (41.1), en la cual, en cambio, por inducción  $B$  se comprende la inducción  $B_{\text{cam}}$  del campo de cambio. El propio momento magnético  $p_m^{(0)}$  del electrón está ligado con su propio momento mecánico o con el spin  $S$  mediante la relación tipo (40.10), pero siendo el factor de proporcionalidad dos veces mayor:

$$p_m^{(0)} = (e/m) S. \quad (42.3)$$

Por esta razón, interpretando la energía de interacción (42.2) como la energía del momento magnético del segundo electrón que se encuentra en el campo magnético, creado a cuenta de la interacción de cambio, por el primer electrón, tenemos

$$V_{\text{cam}} = -\frac{2I_{\text{cam}} S_1 m}{e} \cdot \frac{e}{m} S_2 = -p_m^{(0)} \cdot B_{\text{cam}}, \quad (42.4)$$

donde

$$B_{\text{cam}} = (2I_{\text{cam}} m/e) S_1. \quad (42.5)$$

La inducción completa del campo magnético se compone de la inducción  $B$  del campo en ausencia de interacción de cambio y la inducción  $B_{\text{cam}}$  del campo de cambio. La relación (38.21) teniendo en cuenta (38.23) puede representarse como

$$\mu_0 (1 + \chi) \mathbf{J} = \chi \mathbf{B}, \quad \text{o bien} \quad \mu_0 \mathbf{J} = [\chi/(1 + \chi)] \mathbf{B}. \quad (42.6)$$

Esta relación se generaliza en presencia de la interacción de cambio mediante la fórmula

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi/(1 + \chi)] (\mathbf{B} + \mathbf{B}_{\text{cam}}), \quad (42.7)$$

con la particularidad de que la susceptibilidad magnética  $\chi$  en esta fórmula se considera igual a su valor en (42.6) para la substancia paramagnética en ausencia de interacción de cambio.

El posterior examen se lleva a cabo en una aproximación del campo medio, cuya suposición principal consiste en que la inducción del campo de cambio es proporcional a la imanación:

$$\mathbf{B}_{\text{cam}} = \lambda \mu_0 \mathbf{J}, \quad (42.8)$$

donde  $\lambda$  es la constante de la interacción de cambio. Sustituyendo (42.8) en (42.7), hallamos la relación

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi/(1 + \chi - \lambda\chi)] \mathbf{B}, \quad (42.9)$$

que es útil representar como [de manera análoga a (42.7)]:

$$\mu_0 \mathbf{J} = [\chi'/(1 + \chi')] \mathbf{B}, \quad (42.10)$$

donde

$$\chi'/(1 + \chi') = \chi/(1 + \chi - \lambda\chi) \quad (42.11)$$

caracteriza la susceptibilidad, teniendo en cuenta la interacción de cambio. De la fórmula (42.11) hallamos

$$\chi' = \frac{\chi}{1 - \chi\lambda} = \frac{C}{T - \lambda C}, \quad (42.12)$$

donde  $\chi = C/T$ .

En el intervalo de temperaturas  $T > \lambda C$  el cuerpo se comporta como paramagnético con una disminución característica de la susceptibilidad magnética al aumentar la temperatura. Al aproximarse a  $T = \lambda C$ , la susceptibilidad  $\chi' \rightarrow \infty$ . Eso significa que los campos tan pequeños como se quiera provocan una imanación finita. Con otras palabras, para  $T = \lambda C$  sucede el surgimiento de la imanación espontánea, es decir, el paso al estado ferromagnético. La teoría elemental expuesta no permite analizar cuantitativamente el cambio de la imanación espontánea al disminuir ulteriormente la temperatura en el intervalo  $T < \lambda C$ . La teoría más precisa muestra que la imanación espontánea para  $T = \lambda C$  crece a salto hasta el valor finito y luego, al bajar  $T$ , sigue creciendo, pero la velocidad de crecimiento disminuye poco a poco. Así pues, para  $T < \lambda C$  el magnético se encuentra en la fase ferromagnética.

**Ley de Curie-Weiss.** Para cada substancia ferromagnética existe una temperatura, pasando por la cual ella sufre una transición de fase (de segundo género) y se convierte en paramagnética. La susceptibilidad magnética en la zona paramagnética en las inmediaciones de la temperatura de transición, denominada temperatura de Curie, se describe por la relación tipo (42.12), llamada ley de Curie-Weiss. La magnitud  $\lambda C = \Theta$  se denomina temperatura de Curie-Weiss. La teoría muestra que la transición de fase no se efectúa a la temperatura de Curie-Weiss, sino que a una temperatura próxima a ella.

Por esta razón, a veces puede no hacerse diferencia entre la temperatura de Curie, durante la cual transcurre la transición de fase, y la temperatura de Curie—Weiss.

**Anisotropía de la imanación.** Al investigar las curvas de imanación de los monocristales ferromagnéticos, se mostró que para diversas orientaciones del campo magnetizante respecto a los ejes del cristal, las curvas de imanación son diferentes, es decir, las propiedades ferromagnéticas del cristal dependen de la dirección de la imanación. *La dirección, en la que la imanación es máxima para el*

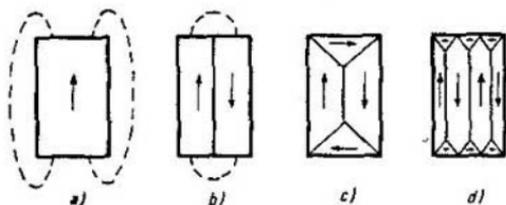


Fig. 169  
Estructuras idealizadas de los dominios en un monocristal

campo dado, se llama dirección o eje de imanación fácil, mientras que la dirección, en la que la imanación es mínima para el campo dado, se denomina dirección o eje de imanación difícil.

**Dominios.** Las estructuras idealizadas de los dominios en el monocristal se muestran en la fig. 169 (las flechas indican las direcciones de la imanación):  
a — la inducción del campo magnético exterior es grande;

b — el campo exterior está concentrado principalmente cerca de las paredes inferior y superior y posee una energía considerablemente menor que en el caso a;

c — no hay polos libres y el campo no sale de la zona de los dominios;

d — se efectúa la misma situación que en el caso c, pero dividiendo la estructura en dominios más pequeños.

**Fronteras.** Para minimizar la energía del campo magnético es útil disminuir al máximo las dimensiones del dominio. Sin embargo, a esto obstaculiza la necesidad de gastar energía para formar las fronteras entre los dominios, ya que la imanación por las diferentes partes de la frontera tiene diversa dirección. La frontera entre los dominios posee un grosor finito  $d$ , dentro de cuyos límites la imanación varía paulatinamente su dirección desde la orientación en un dominio a la orientación en el otro, es decir, las fronteras entre los dominios son paredes de grosor finito. Las paredes se clasifican por las peculiaridades del giro del vector de imanación en ellas. Si la componente de imanación, perpendicular a la pared, no varía durante su giro, la pared se denomina pared de Bloch. Con otras palabras, la rotación de la imanación en la pared de Bloch sucede en el plano, paralelo a la pared (fig. 170, a). Si el cambio de la dirección de la imanación transcurre al variar su componente, perpendicular a la pared, ésta se denomina pared de Néel (fig. 170, b).

**Remagnetización.** El aumento de la imanación del modelo al crecer la intensidad del campo magnético transcurre primero a causa del desplazamiento reversible de las fronteras y los giros de las paredes fronteras (fig. 171; sección  $OA$ ). En la sección  $AC$  se efectúa el desplazamiento irreversible de las fronteras y la desaparición de algunos dominios y, por fin, en la sección  $CD$ , que precede a la saturación, se observa la variación del sentido de la imanación dentro de los dominios.

**Antiferromagnetismo.** A condiciones determinadas la interacción de cambio lleva a una situación cuando la orientación antiparalela del momento de

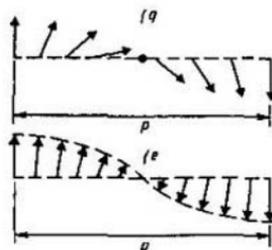


Fig. 170  
Variación de la imanación en la pared: de Bloch (a); de Neel (b)

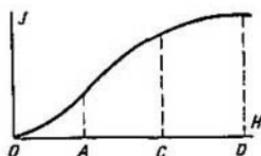


Fig. 171  
Zonas de diversos mecanismos de la remagnetización

spin de los átomos vecinos resulta ser energéticamente útil. Para eso es necesario realizar las condiciones, semejantes a las del surgimiento del ferromagnetismo, pero para las configuraciones con spines antiparalelos. Como consecuencia de eso, los momentos magnéticos de spin de los átomos vecinos resultan orientados en direcciones contrarias (fig. 172).

*Semejante situación puede interpretarse como la existencia simultánea de dos subredes que se imantan espontáneamente en direcciones contrarias con la misma intensidad. La imanación sumaria es nula.* Esta situación se llama antiferromagnetismo y los cuerpos en los que se efectúa, antiferromagnéticos.

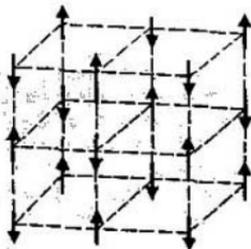


Fig. 172  
Antiferromagnetismo

En las sustancias ferromagnéticas el vector de inducción del campo de cambio está orientado de manera contraria al vector de imanación  $J$ . Por eso en lugar de (42.8) para ellas es válida la relación

$$B_{\text{cam}} = -\lambda_a \mu_0 J. \quad (42.13)$$

Realizando los mismos cálculos que condujeron de (42.8) a (42.12), obtenemos para la susceptibilidad de la sustancia antiferromagnética la fórmula (42.12), pero sustituyendo  $\lambda$  por  $-\lambda_a$ :

$$\lambda_a = C/(T + \lambda_a C) = C/(T + \Theta), \quad (42.14)$$

donde  $\Theta = \lambda_a C$  es la temperatura de Curie—Weiss. Lo mismo que para las substancias ferromagnéticas, el paso al estado antiferromagnético transcurre a una temperatura que se diferencia de la temperatura de Curie—Weiss. La temperatura de paso al estado antiferromagnético se denomina temperatura de Néel  $T_N$ .

En un campo nulo a una temperatura inferior a la de Néel la imanación espontánea total de la substancia antiferromagnética es nula, ya que las imanaciones contrarias de las subredes se compensan mutuamente por completo. Al superponer el campo exterior, surge una pequeña imanación, correspondiente a la susceptibilidad positiva.

En muchos casos para explicar el antiferromagnetismo es suficiente el modelo de dos subredes. Sin embargo, a veces, cuando el caso se reduce sólo a los

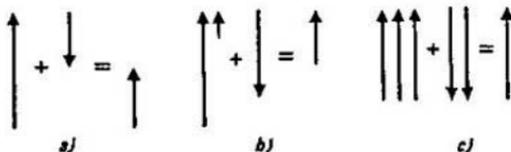


Fig. 173  
Posibilidades elementales de ejecución del ferromagnetismo

momentos magnéticos colineales y es necesario asegurar la igualdad a cero de la suma vectorial de varios momentos magnéticos, que es en sí un resgo característico del antiferromagnetismo, se tiene que utilizar un modelo de más de dos subredes.

**Ferrimagnetismo.** Puede ocurrir que las subredes poseen una imanación espontánea de dirección contraria y de distinta intensidad, por lo que no sucede la liquidación total de la imanación, como tiene lugar en las substancias ferromagnéticas. Las mencionadas substancias tienen una *imanación espontánea, aunque menos intensa en comparación con las substancias, todos los momentos magnéticos de las cuales estuviesen orientados en un mismo sentido.* Esos materiales poseen propiedades, semejantes a las de los ferromagnéticos, en particular, tienen imanación residual, se caracterizan por la fuerza coercitiva, etc. Los mencionados materiales se denominan **ferrimagnéticos** o **ferritas**. A veces, *el ferrimagnetismo se comprende como el antiferromagnetismo no compensado.*

*Las ventajas muy esenciales de las ferritas en comparación con las substancias ferromagnéticas están relacionadas con su extremadamente pequeña conductividad eléctrica, mientras que los materiales ferromagnéticos son buenos conductores de la corriente eléctrica, ya que la buena conductividad eléctrica de dichos materiales es un estorbo para utilizarlos en la radiotecnia.*

Se comprende como **subred** el conjunto de todos los iones dentro del cristal, mutuamente equivalentes, tanto en el sentido cristalográfico, como en el sentido de las interacciones magnéticas y electrostáticas y con los iones circundantes. De aquí se desprende que para que exista el ferrimagnetismo es necesario que haya por lo menos dos subredes no equivalentes. En la fig. 173, a — c se dan las posibilidades más sencillas de realización del ferrimagnetismo.

**Resonancia ferromagnética.** Está condicionada por la interacción de los momentos magnéticos de spin de los electrones con un campo electromagnético alternativo. No obstante, en las sustancias ferromagnéticas dicha resonancia es mucho más complicada que en las paramagnéticas. Esto se debe a que en la sustancia ferromagnética existe la imanación espontánea y una estructura de dominio, y los spines de los electrones están unidos intensamente con la interacción de cambio. Por eso *en el cuerpo ferromagnético el fenómeno de resonancia desde el principio tiene carácter colectivo y la precesión de los spines se determina no sólo por el campo exterior, sino que por el campo efectivo, dependiente tanto del campo exterior, como también de los campos interiores del cuerpo ferromagnético, tales como por ejemplo el campo de anisotropía.*

La resonancia ferromagnética se observa a frecuencias de varios miles de Megahertzios. Si el campo de hiperfrecuencia es homogénea según la amplitud, en todo el modelo ferromagnético se observa una precesión homogénea de spines que provoca la aparición del pico correspondiente de resonancia. Pero a la par con él, se forman otros picos de resonancia complementarios, determinados por las paredes de dominio (resonancia de las paredes de dominio). La heterogeneidad del campo de hiperfrecuencia conduce al surgimiento de picos de resonancia complementarios, condicionados por la forma y dimensiones del modelo. La decodificación de este cuadro bastante complejo de la resonancia ferromagnética permite obtener una información valiosa sobre las propiedades de la sustancia ferromagnética y medir muchas magnitudes que la caracterizan, tales como la imanación de saturación, la relación giromagnética, la constante de anisotropía, etc.

Lo mismo que el ferromagnetismo, la resonancia ferromagnética puede describirse sólo mediante la teoría cuántica.

La peculiaridad característica de la curva de imanación de las sustancias ferromagnéticas es la existencia de saturación, y la de la curva de remagnetización, el ciclo de histéresis.

## § 43. Efectos giromagnéticos

*Se describen los efectos giromagnéticos y su observación experimental*

**Relación entre los momentos magnéticos y mecánicos.** La imanación del magnético está siempre relacionada con la reorientación de los momentos magnéticos en cierta dirección. Sólo en el fenómeno del diamagnetismo se forman nuevos momentos magnéticos que desde su aparición tienen la misma dirección. El momento magnético del movimiento orbital del electrón está ligado con el momento mecánico de dicho movimiento por medio de la relación (40.10). El momento magnético propio del electrón está unido con su momento mecánico propio también mediante una relación lineal. Por eso está claro que el momento magnético del átomo está también enlazado con su momento mecánico mediante una relación determinada. Ello significa que *la reorientación de los momentos magnéticos su-*

cede de mismo tiempo que la reorientación de los correspondientes momentos mecánicos.

El momento magnético total del átomo se compone de los momentos magnéticos de los movimientos orbitales de los electrones y sus momentos magnéticos de spin. Así mismo se suman los momentos mecánicos. En cambio, teniendo en cuenta que los factores de proporcionalidad entre los momentos mecánicos y magnéticos del movimiento orbital y del spin son diferentes, en general, el momento magnético total del átomo no es colineal a su momento mecánico,

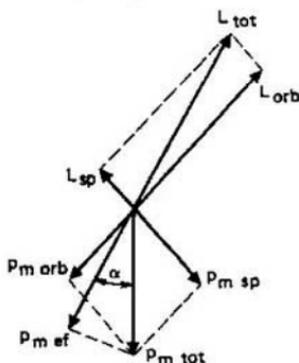


Fig. 174  
Diagrama de adición de los momentos mecánicos y magnéticos en el átomo

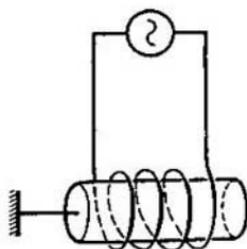


Fig. 175  
Experimento de Einstein — Haas

sino que forma con él cierto ángulo (fig. 174). El momento mecánico del sistema aislado se conserva. Por consiguiente, en el átomo libre  $L_t$  conserva su dirección en el espacio. Por eso, como consecuencia del movimiento de los electrones en el átomo,  $\mathbf{p}_{mt}$  precesa alrededor de la dirección del momento mecánico total, con la particularidad de que la velocidad angular de esa precesión se define por los tiempos de los procesos interatómicos, o sea, es muy grande. Por esta razón, durante la interacción del momento magnético con los campos exteriores, el valor efectivo lo tiene sólo la componente  $\mathbf{p}_{met}$  en dirección del momento mecánico total del átomo. Durante la interacción con los campos exteriores el momento magnético efectivo del átomo es el momento  $\mathbf{p}_{met}$ , colineal a  $L_t$ . De esta manera, en todos los casos la relación entre las componentes puede representarse como

$$\mathbf{p}_m = g e L / (2m), \quad (43.1)$$

donde  $e$  y  $m$  son la carga y la masa del electrón, respectivamente y  $g$ , la relación giromagnética. Para el movimiento orbital del electrón  $g = 1$ , para el spin  $g = 2$  y para los átomos esta magnitud tiene un valor intermedio entre 1 y 2, en función de en qué proporción y de qué manera se presentan las contribuciones

del movimiento orbital de los electrones y sus spines en los momentos totales. Recordemos una vez más que *para el átomo en (43.1) por  $p_m$  se comprende no el momento magnético total verdadero del átomo, sino que su proyección sobre la dirección del momento mecánico total, designado en la fig. 174 por  $p_{met}$ .*

**Experimento de Einstein—Haas.** Examinemos un cilindro hecho de magnético y suspendido de un hilo elástico (fig. 175). La relación (43.1) entre los momentos mecánico y magnético muestra que la imanación del cilindro largo del eje conduce a que los átomos adquieren no sólo momento magnético a lo largo del eje del cilindro, sino que también un momento mecánico correspondiente, dirigido a lo largo del eje. El momento mecánico total de la barra se compone de los momentos mecánicos de los átomos aislados y del momento mecánico de la barra como un cuerpo entero. Antes de la imanación el momento mecánico total de la barra es nulo. Para el sistema aislado el momento total se conserva. En el caso en cuestión el sistema aislado consta de la barra y un campo imantado que se crea mediante las corrientes en el solenoide.

Señalemos, sin demostración alguna (véase el capítulo 9) que el momento de impulso del campo electromagnético del eje del cilindro es nulo y, por lo tanto, no influye sobre el principio de conservación del momento de impulso en el sistema en cuestión. Eso significa que la suma de los momentos mecánicos de todos los átomos y el momento mecánico de la barra en total debe ser constante, o sea, después de la imanación dicha suma debe ser también nula. Pero por cuanto el momento mecánico de los átomos, como consecuencia de la imanación, cambia, varía también el momento de la barra como un todo. De (43.1) se desprende que durante la imanación se cumple la relación

$$\Delta p_{mz} = g [e/(2m)] \Delta L_z, \quad (43.2)$$

donde  $\Delta L_z$  y  $\Delta p_{mz}$  son los momentos mecánico y magnético, adquiridos por cada átomo durante la imanación a lo largo del eje  $Z$ . Al sumar los dos miembros de (43.2) por todos los átomos, obtenemos

$$VJ = \sum \Delta p_{mz} = g [e/(2m)] \sum \Delta L_z, \quad (43.3)$$

donde  $J$  es la imanación de la barra y  $V$ , su volumen. Según el principio de conservación del momento de impulso, el momento de impulso de la barra como algo entero, adquirido a causa de la imanación, es igual a

$$L_z = - \sum \Delta L_z = -[2m/(eg)] VJ. \quad (43.4)$$

La velocidad angular  $\omega$  de rotación de la barra está ligada con su momento de impulso  $L_z$  respecto al eje de rotación y el momento de inercia  $I_z$  mediante la relación

$$L_z = I_z \omega. \quad (43.5)$$

La energía cinética de rotación es

$$W = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (43.6)$$

Por otra parte, el módulo de torsión  $D$  del hilo está relacionado con la frecuencia  $\omega_0$  de las vibraciones torsionales libres mediante la expresión

$$I_z \omega_0^2 = D. \quad (43.7)$$

La barra, como resultado del adquirimiento de energía cinética (43.6), retorcerá el hilo a un ángulo  $\theta$ , definido por el principio de conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} D \theta^2. \quad (43.8)$$

Partiendo de (43.8) y teniendo en cuenta (43.7), (43.4) y (43.3), obtenemos

$$I_z \omega = D \theta^2 / \omega = -2mVJ(eg), \quad (43.9)$$

de donde

$$g = -2mVJ\omega / (e\theta^2 D). \quad (43.10)$$

Todas las magnitudes en el primer miembro o son conocidas o, en principio, pueden medirse, lo que permite definir  $g$ .

El efecto de torsión del hilo durante la imanación es pequeño. Por eso, de hecho, la prueba se efectúa imantando no una vez, como se describió antes, sino remagnetizando múltiples veces el modelo con una frecuencia  $\omega_0$ . Como consecuencia sucede el incremento de las vibraciones de torsión del modelo, con la particularidad de que la amplitud de las oscilaciones forzadas en la resonancia, siendo bastante bueno el factor  $Q$ , puede medirse ya fácil y fiablemente. En el sentido principal, el paso a la intensificación de resonancia no trae ningún cambio en los razonamientos citados.

Los ensayos de Einstein—Hass se efectuaron con barras ferromagnéticas, cuyo efecto de imanación se nota muy bien. Fue obtenido experimentalmente

$$g = 2. \quad (43.11)$$

Este valor supera dos veces el que se debería esperar si el magnetismo se determinase por el movimiento orbital de los electrones en el átomo. Cuando se realizaron por primera vez esos ensayos (1915) aún no se sabía nada sobre el spin del electrón y el resultado del experimento parecía misterioso. A continuación fue descubierto el spin y se mostró que para él  $g = 2$ . Después de eso quedó claro que el resultado del ensayo de Einstein—Haas es la indicación experimental directa de que el ferromagnetismo se determina por el momento magnético propio de los electrones y no por su movimiento orbital.

Para otros magnéticos la relación giromagnética en ensayos semejantes se obtuvo entre 1 y 2. El signo en todos los casos testimonia que el magnetismo se determina por el movimiento de los electrones.

**Efecto Barnett.** Cualquier magnético posee diamagnetismo. Si es una substancia paramagnética, su diamagnetismo se provoca por la precesión de los momentos magnéticos de los átomos alrededor de la dirección del vector de inducción del campo magnético, creado en el sistema de coordenadas donde el magnético, como algo entero, está en reposo. Con otras palabras, su diamagnetismo es consecuencia de la precesión de los átomos respecto a la red cristalina del magnético. Pongamos en rotación el magnético un todo único. Los átomos aisla-

dos son de por sí unos giróscopos pequeños que tienden a conservar la dirección de su eje de rotación en el espacio. Por esta razón, la orientación de los momentos magnéticos de átomos aislados en el espacio permanece invariable. Como consecuencia, dichos momentos magnéticos respecto a la red cristalina del magnético ejecutarán un movimiento de precesión con la frecuencia de rotación del magnético. Pero semejante precesión ordenada de los átomos respecto al magnético como un todo conduce a la imanación. Por lo tanto, *como consecuencia de la rotación, el magnético se imanta*. En esto consiste el efecto que observó por primera vez en 1909 el científico Barnett.

De lo expuesto antes queda claro que al girar el magnético con una frecuencia  $\omega$ , su imanación será la misma que al introducir un cuerpo diamagnético en el campo magnético con la inducción

$$B = 2m_e\omega / (|e|g). \quad (43.12)$$

Subrayemos que *al girar un cuerpo paramagnético, en él surge sólo imanación diamagnética*. Es aproximadamente dos órdenes inferior a la imanación a causa del efecto paramagnético (reorientación de los momentos magnéticos).

¿Qué causas conducen a que el momento magnético total y el momento mecánico total del átomo no sean colineales?

¿Cuál es la magnitud que desempeña el papel de momento total eficaz del átomo habiendo una interacción con los campos magnéticos exteriores?

¿Por qué en el experimento de Einstein—Haas se hace uso de la remagnetización en un campo exterior periódico? ¿Cuáles exigencias satisface la frecuencia del campo exterior? ¿Cuál es la naturaleza de la imanación en el efecto Barnett?

## Problemas

- La susceptibilidad diamagnética del cobre (en estado sólido) es igual a  $\chi_d = -8.8 \times 10^{-9}$ . Determinar la distancia media de los electrones respecto al núcleo en el átomo de cobre.
- El momento magnético de la molécula de oxígeno es igual a  $p_m = 2.6 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Definir la susceptibilidad paramagnética del oxígeno para las condiciones normales.
- El momento magnético dipolar de la molécula tiene el orden de un magnetón de Bohr  $\mu = e\hbar/(2m_e) = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . Tomando en consideración que las moléculas de gas perfecto poseen un momento magnético permanente  $\mu$ , hallar la imanación máxima posible para  $t = 100 \text{ }^\circ\text{C}$  y  $p = 101,3 \text{ kPa}$ .

## Respuestas

7.1.  $\sqrt{R^2\langle} = \sqrt{-6m\chi_d/(e^2Z\mu_0N)} = 0,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

7.2.  $\chi_d = p^2 mN\mu_0/(3kT) = 18 \cdot 10^{-7}$ . 7.3.  $J_{\text{máx}} = 182 \text{ A/m}$ .

## Inducción electromagnética y corrientes alternas casiestacionarias

La aproximación casiestacionaria es válida al describir los campos electromagnéticos y corrientes en las zonas, cuyas dimensiones lineales son mucho menores que la longitud de onda y cuando puede menospreciarse las corrientes de desplazamiento. El campo eléctrico, originado por la variación del campo magnético, se tiene en cuenta, mientras que el campo magnético, engendrado por el cambio del campo eléctrico, no se toma en consideración. Las líneas de densidad de la corriente de conducción son cerradas, ya que se prescinde de las corrientes de desplazamiento. El campo magnético se determina por los valores instantáneos de la densidad de las corrientes de conducción en el mismo momento de tiempo. Las densidades de las corrientes de conducción dependen de la variación del campo magnético y, por lo tanto, del cambio de la densidad de las corrientes de conducción.

### § 44. Inducción de las corrientes en conductores en movimiento

*Se da la enunciación cuantitativa de la inducción de corrientes en conductores en movimiento. Se describen los procesos físicos en los generadores de corriente alterna.*

**Aparición de fem en un conductor en movimiento.** Al moverse el conductor en un campo magnético, sus *electrones libres*, influidos por las fuerzas de Lorentz, se ponen en movimiento respecto al conductor, o sea, en el conductor surge una corriente eléctrica. Este fenómeno se llama inducción de las corrientes en los conductores en movimiento.

Examinemos la sección rectilínea  $DG$  del conductor (fig. 176), que moviéndose con una velocidad  $v$ , se desplaza por los conductores  $CK$  y  $AL$  como por guías, conservando todo el tiempo el circuito  $AGDCA$  cerrado. La inducción del campo magnético homogéneo exterior es perpendicular al plano en el que yace el contorno. Sobre las cargas en el conductor en movimiento actúa la fuerza de Lorentz

$$F = ev \times B, \quad (44.1)$$

colineal a  $DG$ . Las fuerzas que actúan sobre las cargas positivas y negativas del conductor, se muestran por los vectores  $F_{(+)}$  y  $F_{(-)}$ , respectivamente. Los electrones libres comienzan a moverse, originando la corriente eléctrica. Su dirección se toma como el recorrido positivo del circuito, y, por lo tanto, la

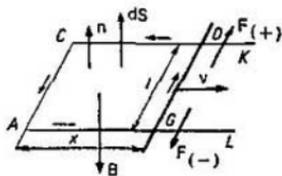


Fig. 176  
Inducción de las corrientes en conductores en movimiento

normal positiva a la superficie en la que yace el circuito, es el vector  $n$  en esta figura.

La presencia de la fuerza  $F$  [véase (44.1)] equivale a que en el conductor sobre las cargas actúa un campo eléctrico efectivo

$$\mathbf{E}_{ef} = F/e = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (44.2)$$

y por eso la fem de inducción entre ciertos puntos 1 y 2 del conductor es igual a

$$(\Delta \mathcal{E}^{ind})_{21} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (44.3)$$

En el caso en cuestión dicha fem surge entre los puntos  $D$  y  $G$ :

$$(\Delta \mathcal{E}^{ind})_{DG} = \int_{(G)}^{(D)} vB \, dl = vBl. \quad (44.4)$$

En las secciones inmóviles del circuito cerrado no se forma fuerza electromotriz. Por eso la fem de inducción en el contorno cerrado  $AGDCA$ , provocada por el movimiento de su parte  $DG$  en el campo exterior, es

$$\mathcal{E}^{ind} = \int_{AGDCA} \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = vBl. \quad (44.5)$$

Después de expresar la velocidad del conductor  $DG$  como

$$v = dx/dt, \quad (44.6)$$

donde  $x$  es la coordenada de sus contactos en los puntos  $D$  y  $G$  con los conductores, escribamos (44.5) en la forma

$$\mathcal{E}^{ind} = dxI/dt. \quad (44.7)$$

Tomemos en consideración que

$$\Phi = -xIB \quad (44.8)$$

es el flujo de inducción magnética a través de la superficie, limitada por el contorno  $AGDCA$ . El signo menos en (44.8) muestra que las direcciones de  $\mathbf{B}$  y  $d\mathbf{S}$  son contrarias. Por eso, en definitiva, la fórmula (44.5) puede escribirse así

$$\mathcal{E}^{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (44.9)$$

es decir, al moverse un conductor cerrado en el campo magnético exterior, en su contorno surge una fuerza electromotriz de inducción que es igual a la velocidad de variación del flujo de inducción (flujo eléctrico) del campo magnético exterior.

a través de la superficie, tendida sobre el contorno cerrado.

La fórmula (44.9) se dedujo para el caso particular cuando se mueve sólo una parte del conductor en el plano perpendicular a la inducción del campo magnético. Si se mueven varias secciones del conductor, la fuerza electromotriz de inducción en el contorno cerrado es igual a la suma algebraica de las fem de inducción que surgen en las secciones. Por eso la fórmula (44.9) se generaliza sin cálculos posteriores para el caso de un movimiento arbitrario del conductor en el plano, perpendicular a la dirección del vector de inducción del campo magnético. Pero durante el movimiento el contorno del conductor puede, claro está, deformarse al azar.

**Generalización para un caso aleatorio.** Examinemos un elemento de longitud del conductor  $dl$  que se mueve con una velocidad  $v = dr/dt$  (fig. 177). Conforme a la fórmula (44.3), en esta longitud se crea una fuerza electromotriz

$$d\mathcal{E}^{\text{ind}} = v \times B \cdot dl = \frac{d}{dt} (dr \times B \cdot dl). \quad (44.10)$$

El producto mixto en (44.10) se transforma de la siguiente manera:

$$dr \times B \cdot dl = dl \times dr \cdot B = -dr \times dl \cdot B = -dS \cdot B = -\delta\Phi, \quad (44.11)$$

donde  $\delta\Phi$  es el flujo de inducción magnética a través del elemento superficial  $dS = dr \times dl$ , formado por el elemento de longitud  $dl$  durante su movimiento. La dirección positiva de la normal a dicho elemento superficial se elige de manera que coincida con el sentido positivo de la normal a la superficie, limitada por el contorno cerrado.

Poniendo (44.11) en (44.10), obtenemos

$$d\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\delta\Phi/dt. \quad (44.12)$$

Para hallar la fuerza electromotriz total de inducción en un contorno cerrado es necesario sumar todas las fem de inducción respecto a todos los elementos  $dl$  de ese contorno:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = \oint d\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{dt} \oint \delta\Phi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (44.13)$$

donde

$$\oint \delta\Phi = d\Phi \quad (44.14)$$

es la variación del flujo de inducción a través de la superficie limitada por el contorno cerrado.

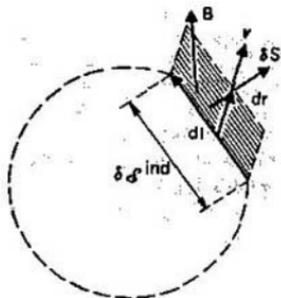


Fig. 177  
Generalización de la fórmula para la inducción de las corrientes en los conductores en movimiento para un caso arbitrario

La fórmula (44.13) coincide con (44.9). Así, queda demostrado que (44.9) es válida para movimientos y deformaciones aleatorias del contorno cerrado.

**Generadores de corriente alterna.** Si un conductor cerrado se mueve en un campo magnético de manera que el flujo de inducción magnética que abarca éste, varía constantemente, en el conductor se genera permanentemente una fuerza electromotriz de inducción y una corriente alterna correspondiente, es decir, semejante contorno cerrado es de por sí un generador de corriente alterna. El circuito más sencillo de un generador de corriente alterna se da en la fig. 178, a. Si el campo magnético es homogéneo y el cuadro gira en él con una velocidad

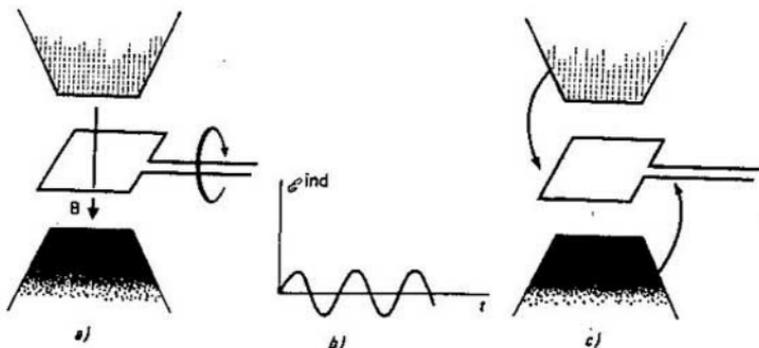


Fig. 178  
Diagrama del generador de corriente alterna

angular constante, la  $\mathcal{E}^{\text{ind}}$  que surge en el cuadro es una fuerza electromotriz armónica, cuya frecuencia es igual a la frecuencia de rotación del cuadro en el campo magnético. En el contorno cerrado aparece una corriente alterna de correspondiente frecuencia (fig. 178, b).

Si en lugar de una espira, en el campo magnético se mueven dos espiras paralelas, acopladas en serie, la fuerza electromotriz de inducción aumenta el doble. Por eso, al confeccionar los generadores en la práctica, se utilizan los devanados de muchas espiras. En la electrotecnia se examinan con más detalle las cuestiones sobre la ejecución más útil de los devanados, sobre la creación de un campo magnético, la eliminación de la corriente de los devanados en movimiento, etc. Señalemos sólo que la eliminación de la corriente de los conductores en movimiento para una intensidad de corriente grande es una tarea difícil. Por esta razón, en vez del movimiento de los conductores con corriente se efectúa el movimiento de las fuentes del campo magnético permaneciendo los conductores inmóviles. En el circuito más sencillo (fig. 178, c) eso significa el movimiento de los imanes permanentes alrededor de un cuadro inmóvil con corriente. En este último se excita una fuerza electromotriz de inducción. Desde el punto de vista cuantitativo esa fem es la misma, siendo iguales las velocidades rela-

tivas de los imanes y del cuadro. Sin embargo, la esencia física de los fenómenos en cuestión en estos dos casos es diferente (véase el § 45).

Los primeros generadores eran máquinas con imanes permanentes, pero ya en 1866 se confeccionó un generador en el que el campo magnético se creaba mediante un electroimán. Después de ello, la construcción de los generadores se perfeccionó con rapidez.

**Principio de conservación de la energía.** Al recorrer la corriente un circuito con resistencia óhmica, se desprende calor de Joule. La energía que se libera en forma de calor, se obtiene por medio del trabajo de las fuerzas mecánicas en el generador de corriente eléctrica.

Claro está que al pasar la energía de una forma a otra, se observa el principio de conservación de la energía. Estudiemos eso en un ejemplo sencillo (fig. 176).

Sea  $R$  la resistencia en el contorno  $AGDCA$  e  $I$ , la intensidad de la corriente en el circuito. Por lo tanto, en el contorno con corriente se libera en forma de calor, una energía con una potencia

$$P_1 = I^2 R. \quad (44.15)$$

Por otra parte, durante el movimiento de la sección del conductor  $DG$  con una corriente de intensidad  $I$ , es necesario superar la fuerza de Lorentz

$$F = IlB. \quad (44.16)$$

Por consiguiente, las fuerzas que efectúan el movimiento del conductor, deben desarrollar una potencial

$$P_2 = Fv = IlB \, dx/dt = -I g^{\text{ind}} = -I^2 R, \quad (44.17)$$

donde se tiene en cuenta la fórmula (44.9) y se toma en consideración que  $g^{\text{ind}} = -IR$ . El signo menos en (44.17) muestra que el trabajo se realiza sobre el sistema. La comparación de las expresiones (44.15) y (44.17) indica que  $P_1 + P_2 = 0$ . Esto significa que *la energía, liberada en forma de calor, en el contorno es igual al trabajo de las fuerzas que ponen el conductor en movimiento, es decir, a fin de cuentas, en el caso dado las fuerzas electromotrices exteriores son las fuerzas mecánicas que efectúan el movimiento del conductor.*

Al moverse y deformarse en un campo magnético exterior un conductor cerrado, en su contorno surge cierta fuerza electromotriz de inducción, numéricamente igual a la velocidad de variación del flujo de inducción de un campo magnético exterior a través de la superficie, tendida sobre un contorno cerrado.

Todo el trabajo, realizado por la corriente inducida en un conductor en movimiento, se efectúa mediante el trabajo de las fuerzas que ponen en movimiento el conductor.

¿Cuáles son los fenómenos físicos, basados en la acción de los generadores de corriente alterna? Describanse los circuitos principales de los generadores.

## § 45. Ley de la inducción electromagnética de Faraday

*Se examinan la esencia física y la enunciación matemática de la ley de Faraday. Se analiza la relación entre la inducción electromagnética de Faraday y la inducción de la corriente en los conductores en movimiento.*

**Definición.** En 1831 M. Faraday descubrió experimentalmente el fenómeno de la inducción electromagnética, que consiste en el surgimiento de corriente eléctrica en un conductor cerrado al variar el flujo de inducción magnética, que abarca el contorno. La regla que determina la dirección de la fem de inducción, fue enunciada en 1833 por E. H. Lenz (1804—1865); *el flujo de inducción está dirigido de tal manera que el campo, originado por él, obstaculiza la variación del flujo magnético.* Con otras palabras, la dirección de la corriente que surge en el contorno, forma con la dirección del cambio del flujo de inducción magnética un sistema a la izquierda (fig. 179). En 1845 F. E. Neumann (1798—1895) dio la definición matemática de la ley de inducción electromagnética en forma moderna:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = - d\Phi/dt, \quad (45.1)$$

con la particularidad de que el contorno permanece inmóvil.

**Esencia física del fenómeno.** Según su aspecto, la fórmula (45.1) coincide con (44.9), pero su contenido físico es totalmente diferente. *La aparición de la fem, que se tiene en cuenta en (44.9), está ligada con la acción de la fuerza de Lorentz sobre las cargas en movimiento. Mientras que en el surgimiento de la fem que se tiene en cuenta por la expresión (45.1) no participa ninguna fuerza de Lorentz, ya que los conductores están sin movimiento.* En cambio, en el conductor surge corriente eléctrica, por lo que se puede deducir que en él existe un campo eléctrico.

Por lo tanto, *la ley de Faraday (45.1) expresa un fenómeno físico nuevo: el campo magnético en variación engendra un campo eléctrico. Así pues, el campo eléctrico se origina no sólo por las cargas eléctricas, sino también por un campo magnético en variación.*

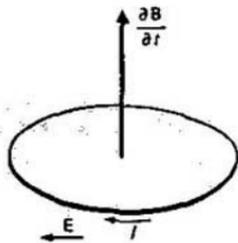


Fig. 179  
Ley de inducción electromagnética de Faraday

Hablando en rigor, la presencia de corriente en un conductor cerrado muestra que el campo eléctrico existe sólo dentro del conductor. Sin embargo, el conductor en este caso desempeña el papel de dispositivo que detecta el campo eléctrico. En ausencia del conductor, el campo magnético en variación engendra también un campo eléctrico. Eso puede demostrarse, por ejemplo, con el hecho de que sobre la carga en un campo magnético en variación actúa una fuerza eléctrica (véase el § 56). Ello demuestra que la

inducción electromagnética es una ley fundamental general de la naturaleza que establece el enlace entre los campos magnéticos y eléctricos. El diferente contenido físico de los fenómenos, descritos por las fórmulas (44.9) y (45.1) queda claro del siguiente ejemplo. Supongamos que el conductor  $DG$  en la fig. 176 se mueve con una velocidad  $v$ , pero al mismo tiempo la inducción magnética  $B$  se reduce. Como consecuencia del movimiento del conductor en el contorno cerrado surge una fem de inducción que provoca la corriente (fig. 176). La variación de  $B$  por la ley de la inducción electromagnética de Faraday provoca en el contorno también una fem de inducción, que en este caso está orientada de manera contraria a la que aparece a causa del movimiento de la sección del conductor  $DG$ . Puede elegirse una velocidad de variación de  $B$  ( $\partial B/\partial t$ ) que esas dos fem se compensen mutuamente. En definitiva, en el contorno cerrado no habrá corriente, ya que la fem total de inducción es nula. Pero esa compensación mutua de la fem de inducción tiene lugar en el contorno cerrado en total y no en cada punto del contorno. La fem de inducción a cuenta del movimiento del conductor surge sólo en la sección  $DG$ , mientras que la fem de inducción de Faraday aparece tanto en la sección  $DG$ , como en las demás secciones  $DC$ ,  $CA$ ,  $AG$  del conductor. Como consecuencia del movimiento, en el elemento  $dl$  del conductor surge una fem de inducción que depende sólo de  $B$  y de la velocidad  $v$  de movimiento de dicho elemento, pero que no es función de  $\partial B/\partial t$ . Debido al cambio de la inducción, en el elemento del conductor  $dl$  surge la fem de inducción de Faraday que no depende de la inducción  $B$  y la velocidad  $v$  de movimiento de dicho elemento, sólo es función de  $\partial B/\partial t$ . Esto es precisamente lo que demuestra que la naturaleza física de la fem de inducción en estos dos casos es diferente.

**Conductor en movimiento en un campo magnético alternativo.** Si un conductor cerrado se mueve en un campo magnético alternativo, sufriendo deformaciones arbitrarias de su forma, la fem de inducción en él surge tanto como consecuencia del movimiento y la deformación, que se tienen en cuenta por la fórmula (44.9), como a causa del cambio de la inducción del campo magnético, que se toma en consideración por la fórmula (45.1). Por eso puede decirse que la fem de inducción en el conductor se determina por la fórmula (45.1), con la particularidad de que por  $d\Phi/dt$  se comprende la velocidad total de variación del flujo de inducción, que abarca el conductor, tanto debido a su movimiento y deformación, como también a causa del cambio del campo magnético.

**Aplicación de la inducción electromagnética a los generadores de corriente alterna.** Se ve por qué la corriente puede generarse no sólo moviéndose los conductores en el campo magnético, sino que también al moverse los imanes. La fig. 180 muestra el diagrama de la inducción electromagnética.

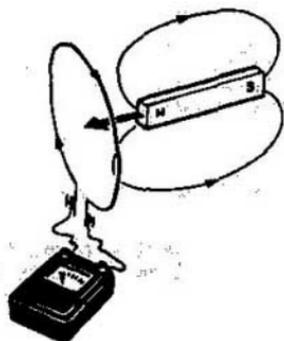


Fig. 180  
Demostración de la inducción electromagnética de Faraday.

El campo eléctrico se engendra no sólo mediante las cargas eléctricas, sino también por el campo magnético variable.

La fem de inducción se expresa por la fórmula (45.1), con la particularidad de que por  $p\Phi/dt$  se comprende la velocidad total de la variación del flujo de inducción que abarca el conductor, como consecuencia del movimiento y deformación del conductor y del cambio del campo magnético.

## § 46. Forma diferencial de la inducción electromagnética

*Se da la forma diferencial de la ley de la inducción electromagnética y se examinan las propiedades de los potenciales escalar y vectorial de un campo electromagnético alternativo.*

**Enunciación.** Escribamos la ley de la inducción electromagnética de inducción de Faraday [véase (85.1)] como

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (46.1)$$

donde  $L$  es el contorno y  $S$ , la superficie, tendida sobre el contorno  $L$ . En (46.1) se tienen en cuenta las definiciones:

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (46.2)$$

Señalemos que entre la dirección del recorrido del contorno  $L$  y el vector  $d\mathbf{S}$  se observa una relación a la derecha. Es necesario prestar también atención en que en la definición del flujo de inducción [véase (46.2)] la superficie  $S$ , a través de la cual se calcula el flujo, es una superficie arbitraria, tendida sobre el contorno  $L$ . Semejante definición supone que esta integral no depende de la forma de la superficie, lo importante es que la superficie sea limitada por el contorno  $L$  o, como se dice, sea tendida sobre el contorno  $L$ . Demostremos eso. Elijamos dos superficies cualesquiera  $S_1$  y  $S_2$ , tendidas sobre el contorno  $L$ . Su conjunto forma una superficie cerrada  $\bar{S} = S_1 + S_2$ , que limita cierto volumen  $V$  entre ellas. El flujo del vector  $\mathbf{B}$  a través de la superficie cerrada  $\bar{S}$  es nulo, puesto que, según el teorema de Gauss—Ostrogradski, es igual a la integral por el volumen  $V$ , limitado por la superficie  $\bar{S}$ , respecto a la  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . De eso se desprende que la afirmación sobre la igualdad de los flujos a través de  $S_1$  y  $S_2$  (los signos de los flujos son los mismos para la misma orientación, respecto a la dirección del rodeo del contorno, de las normales positivas a dichas superficies).

Transformemos el primer miembro de (46.1) por la fórmula de Stokes:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (46.3)$$

En definitiva, obtenemos

$$\int_L \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (46.4)$$

con la particularidad de que la derivada respecto a  $t$  se introduce bajo el signo de la integral, basándose en que el área de integración no depende del tiempo. Ya que  $S$  es arbitraria, de la fórmula (46.4) se desprende que

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (46.5)$$

La ecuación (46.5) es la escritura diferencial de la ley de la inducción electromagnética de Faraday. Ella describe la ley de creación del campo eléctrico en cierto punto, merced al cambio de la inducción del campo magnético en el mismo punto. El campo  $\mathbf{E}$  se denomina con frecuencia campo de inducción.

Carácter no potencial del campo eléctrico de inducción. En un campo magnético alternativo  $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$  y, por lo tanto, conforme a (46.5),

$$\text{rot } \mathbf{E} \neq 0. \quad (46.6)$$

Eso significa que el campo eléctrico de inducción, a diferencia del electrostático, originado por las cargas inmóviles, no es de potencial. El trabajo de desplazamiento de la carga  $q$  en él por un contorno cerrado, en general, no es nulo:

$$A = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0. \quad (46.7)$$

De aquí, en particular, se deduce que el mencionado campo no puede representarse en forma de gradiente respecto a cierta función, o sea, no puede ser representado en forma de (14.27). Es necesario utilizar una representación, distinta de (41.27).

Potenciales vectorial y escalar en un campo electromagnético alternativo. Dado que la ley de la inducción electromagnética no se refiere a las leyes de creación del campo magnético, la ecuación (36.4) para la divergencia del campo magnético permanece invariable, es decir,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Por consiguiente, queda sin cambiar la fórmula (37.2) que enlaza el potencial vectorial con la inducción del campo magnético:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (46.8)$$

La relación del potencial escalar con la intensidad del campo eléctrico cambia. Expresando  $\mathbf{B}$  en (46.5) con ayuda de (46.8), recibimos

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = - \text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (46.9)$$

donde la sucesión de las diferenciaciones respecto al tiempo y a las coordenadas se cambió, a causa de su independendencia. La ecuación (46.9), escrita en la forma

$$\text{rot } \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (46.10)$$

muestra que el vector  $E + \partial A/\partial t$  es de potencial y, por lo tanto, puede representarse en forma de gradiente de cierta función

$$E + \partial A/\partial t = -\text{grad } \varphi, \quad (46.11)$$

donde  $\varphi$  es el potencial escalar. De esta manera, para los campos alternativos la intensidad del campo eléctrico se expresa no sólo mediante el potencial escalar, sino que también por medio del potencial vectorial:

$$E = -\text{grad } \varphi - \partial A/\partial t. \quad (46.12)$$

*El primer sumando en el segundo miembro de (46.12) tiene en cuenta sólo la engendración del campo eléctrico por las cargas eléctricas, mientras que el segundo sumando, la creación del campo por la ley de la inducción electromagnética de Faraday.*

**Multiformidad de los potenciales, transformación de calibración.** Lo mismo que en el caso estacionario, los potenciales vectorial y escalar son multiformes, o sea, un mismo campo electromagnético puede describirse por muchos potenciales vectoriales y escalares.

Sea que el campo  $E$ ,  $B$ , se describe mediante los potenciales  $A$ ,  $\varphi$  por las fórmulas (46.8) y (46.12) y existe cierta función  $\chi(x, y, z, t)$ . Se afirma que los potenciales

$$A' = A + \text{grad } \chi, \quad \varphi' = \varphi - \partial\chi/\partial t \quad (46.13)$$

caracterizan el mismo campo  $E$ ,  $B$  que los potenciales  $A$  y  $\varphi$ . Para demostrarlo hallemos  $E'$ ,  $B'$  que se describen por medio de los potenciales  $A'$ ,  $\varphi'$  mediante las expresiones (46.8) y (46.12):

$$B' = \text{rot } A' = \text{rot } A + \text{rot grad } \chi = B, \quad (46.14)$$

donde se tiene en cuenta que  $\text{rot grad} = 0$  y se toma en consideración la fórmula (46.8).

Para el campo  $E'$  obtenemos

$$\begin{aligned} E' &= -\text{grad } \varphi' - \partial A'/\partial t = -\text{grad } \varphi - \text{grad } (\partial\chi/\partial t) - \\ &\quad - \partial A/\partial t - \partial(\text{grad } \chi)/\partial t = -\text{grad } \varphi - \partial A/\partial t = E. \end{aligned} \quad (46.15)$$

Así pues, en efecto, los potenciales (46.13) describen un mismo campo que los potenciales  $A$ ,  $\varphi$ . Las transformaciones (46.13) se denominan de **calibración**. Ellas permiten «calibrar» los potenciales, es decir, aplicarles cierta condición, haciendo uso de su multiformidad (véanse los §§ 14, 37, 63).

## § 47. Energía del campo magnético

*Se deducen las fórmulas para la energía del campo magnético de los circuitos con corriente y la expresión para la densidad de energía. Se citan las expresiones para la energía del magnético en un campo magnético exterior y de las fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos comprimibles.*

**Energía del campo magnético de un circuito aislado con corriente.** Para que en un circuito inmóvil pueda crearse una corriente eléctrica, es necesario conectar al circuito una fuente de fem exteriores. Si el circuito es recorrido por una corriente continua, la energía que llega de la fuente de fem exteriores al circuito, se gasta en liberar el calor de Joule y realizar un trabajo en el consumidor de energía. La inducción del campo magnético, lo mismo que su energía, en este caso es invariable. La inducción cambia al variar la intensidad de la corriente. Por lo tanto, la fuente de fem exteriores transmite al circuito una energía para crear un campo magnético durante el aumento de la intensidad de la corriente. Después de calcular el trabajo que efectúa la fuente de fem exteriores para elevar la intensidad de la corriente desde cero hasta un valor finito, obtenemos cierta energía del campo magnético, relacionado con dicha corriente.

Al cambiar el flujo de la inducción magnética, que abarca el circuito, en este último surge una fem de inducción conforme a la ley (46.1). En el circuito aislado el flujo de la inducción electromagnética  $\Phi$  aparece merced al campo magnético, originado por la corriente en el circuito (fig. 181). Al aumentar la intensidad de la corriente, crece el flujo  $\Phi$  que abarca la corriente, y, conforme a la ley de Faraday, en el circuito surge una fem de inducción que en este caso se denomina fem de autoinducción. Según la ley de Lenz, dicha fem está dirigida de manera que impide el aumento de la intensidad de la corriente. Con el fin de elevarla es necesario que la fem exterior de la fuente esté dirigida de manera contraria a la fem de autoinducción y sea igual a ésta. Así pues, durante el incremento de la intensidad de la corriente, la fuente de las fem exteriores realiza un trabajo contra la fem de autoinducción. En el transcurso del tiempo  $dt$  por el circuito pasa una cantidad de electricidad  $dQ = I dt$ , y por eso, durante  $dt$  la fuente de las fuerzas exteriores efectúa un trabajo contra la fem de autoinducción igual a

$$dA = - \mathcal{E}^{ind} I dt = (d\Phi/dt) I dt = I d\Phi, (47.1)$$

donde para  $\mathcal{E}^{ind}$  se ha utilizado la fórmula (46.1). Al realizar ese trabajo, transcurre una transfor-

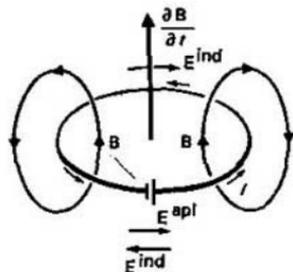


Fig. 181

Al aumentar la corriente, la fuente de fem exteriores efectúa un trabajo contra las fem autoinducidas

mación de la energía de la fuente de fem exteriores en la energía del campo magnético de la corriente en el circuito. Por eso la variación de la energía del campo magnético está ligada con el cambio del flujo mediante la relación

$$dW = I d\Phi. \quad (47.2)$$

La inducción del campo magnético de la corriente, de acuerdo con la ley de Biot—Savart (10.10), depende linealmente de la intensidad de la corriente. Por eso para la intensidad de la corriente alterna que circula por un circuito inmóvil rígido, el cuadro de las líneas de fuerza permanece el mismo, mientras que la

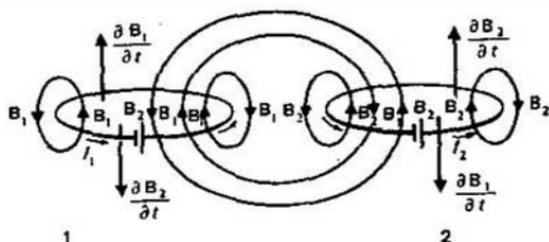


Fig. 182  
Para calcular la inductancia del contorno

inducción en cada punto crece proporcionalmente a la intensidad de la corriente. Pero eso significa que el flujo de la inducción magnética  $\Phi$  a través de un área inmóvil fija es también proporcional a la intensidad de la corriente y por eso

$$\Phi = LI, \quad (47.3)$$

donde  $L$  es un factor constante de proporcionalidad que no depende de la intensidad de la corriente y de la inducción del campo magnético. Dicho factor se denomina **inductancia** del circuito.

Sustituyendo (47.3) en (47.2), hallamos

$$dW = LI dI = d(1/2 LI^2). \quad (47.4)$$

Después de integrar los dos miembros de (47.4) desde  $I = 0$  hasta cierto valor de  $I$ , obtenemos la fórmula

$$W = 1/2 LI^2, \quad (47.5)$$

que determina la energía del campo magnético que crea la corriente de intensidad  $I$  que recorre el circuito con la inductancia  $L$ .

**Energía del campo magnético de varios circuitos con corriente.** De la misma manera puede hallarse la energía del campo magnético de dos circuitos con corriente (fig. 182). En este caso es necesario tener en cuenta que la fem de inducción en cada circuito surge no sólo a causa de la variación del flujo de inducción del campo magnético, creado por la corriente de ese circuito, sino que también merced al cambio del flujo de inducción del campo magnético, originado por la corriente

que recorre el otro circuito. Designemos por  $I_1$  e  $I_2$  las intensidades de corriente en los circuitos primero y segundo, respectivamente, y por  $\Phi_{11}$  y  $\Phi_{12}$  los flujos de la inducción que abarca el primer circuito, de los campos magnéticos, creados correspondientemente por las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ . Las magnitudes semejantes para el segundo circuito se denotan por  $\Phi_{22}$  y  $\Phi_{21}$ . Los flujos totales que abarcan cada uno de los circuitos, son

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}, \quad \Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}. \quad (47.6)$$

Sean  $L_{11}$  y  $L_{22}$  las inductancias de los circuitos. Entonces [véase (47.3)]

$$\Phi_{11} = L_{11}I_1, \quad \Phi_{22} = L_{22}I_2. \quad (47.7)$$

Partiendo de las mismas consideraciones, expuestas para obtener la fórmula (47.3), sacamos la conclusión de que el flujo  $\Phi_{12}$  que abarca el primer circuito, debido al campo magnético, creado por la corriente en el segundo circuito, es proporcional a la intensidad de la corriente  $I_2$  en el segundo circuito:

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2, \quad (47.8)$$

donde  $L_{12}$  es una constante, llamada **inductancia mutua** de los circuitos primero y segundo. Para el segundo circuito obtenemos de la misma manera

$$\Phi_{21} = L_{21}I_1. \quad (47.9)$$

Por eso [véase (47.6)]

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2, \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \end{aligned} \quad (47.10)$$

Las fem de inducción en el primero y segundo circuitos son iguales a:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\left(L_{11}\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}\right), \\ \mathcal{E}_2^{\text{ind}} &= -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\left(L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_{22}\frac{dI_2}{dt}\right). \end{aligned} \quad (47.11)$$

Todo el trabajo realizado por las fuentes de las fem exteriores de los circuitos durante  $dt$ , análogamente a la expresión (47.1), es igual a

$$\begin{aligned} dA &= dA_1 + dA_2 = -\mathcal{E}_1^{\text{ind}}I_1 dt - \mathcal{E}_2^{\text{ind}}I_2 dt = \\ &= (L_{11}I_1 dI_1 + L_{12}I_1 dI_2 + L_{21}I_2 dI_1 + L_{22}I_2 dI_2), \end{aligned} \quad (47.12)$$

donde se ha hecho uso de la relación (47.10).

Para los cálculos ulteriores demosntremos que  $L_{12} = L_{21}$ . Con este fin calculemos  $\Phi_{21}$  y  $\Phi_{12}$ :

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2, \quad \Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1, \quad (47.13)$$

donde  $\mathbf{B}_1$  y  $\mathbf{B}_2$  son las inducciones de los campos, creados por las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente;  $S_1$  y  $S_2$ , las superficies de integración, tendidas sobre los contornos. La inducción del campo en cada punto es igual a  $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ . Designan-

do por  $A_1$  y  $A_2$  los potenciales vectoriales que describen los campos  $B_1$  y  $B_2$ , tenemos

$$B_1 = \text{rot } A_1, \quad B_2 = \text{rot } A_2$$

y, por consiguiente, las igualdades (47.13) toman la forma:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \int_{S_2} \text{rot } A_1 \cdot dS_2 = \int_{L_2} A_1 \cdot dl_2, \\ \Phi_{12} &= \int_{S_1} \text{rot } A_2 \cdot dS_1 = \int_{L_1} A_2 \cdot dl_1, \end{aligned} \quad (47.14)$$

donde  $L_1$  y  $L_2$  son circuitos con corriente. El paso a la integración respecto a los circuitos se efectúa conforme a la fórmula de Stokes. La fórmula (37.11b) que expresa el potencial vectorial por medio de la corriente, adquiere en este caso el siguiente aspecto:

$$A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{L_1} \frac{dl_1}{r}, \quad A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_{L_2} \frac{dl_2}{r}. \quad (47.15a)$$

Sustituyendo (47.15a) en (47.14), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Phi_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{21}}, \\ \Phi_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{dl_2 \cdot dl_1}{r_{12}}, \end{aligned} \quad (47.15b)$$

donde  $r_{12} = r_{21}$  es la distancia entre los elementos  $dl_1$  y  $dl_2$  de los circuitos primero y segundo. Comparando (47.15b) con (47.8) y (47.9) recibimos:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{dl_2 \cdot dl_1}{r_{12}}, \\ L_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{21}}. \end{aligned} \quad (47.16a)$$

Las fórmulas (47.16a) muestran que la inductancia mutua depende sólo de las características geométricas de los circuitos y de su disposición recíproca. Dado que  $dl_1$  y  $dl_2$  son variables independientes de integración, puede cambiarse el orden de integración. Teniendo también en cuenta que  $r_{12} = r_{21}$  y  $dl_2 \cdot dl_1 = dl_1 \cdot dl_2$ , sacamos la conclusión de que

$$L_{12} = L_{21}, \quad (47.16b)$$

es decir, la inductancia mutua del primer circuito con el segundo es igual a la inductancia mutua del segundo circuito con el primero. Tomando lo dicho en consideración, podemos escribir

$$L_{12}I_1 dI_2 + I_{21} dI_1 = d \left( \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} I_{21} I_1 I_2 \right)$$

y, por lo tanto, representar (47.12) como

$$dA = d \left( \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 \Phi + \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 L_2 + \frac{1}{2} L_{21} I_2 I_1 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \right). \quad (47.17a)$$

Teniendo en cuenta que el trabajo que se gasta en aumentar la intensidad de la corriente es igual a la energía del campo magnético que se forma en este caso; después de integrar los dos miembros de la igualdad (47.17a) desde los valores nulos de la intensidad de la corriente en los circuitos  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 0$  hasta sus valores  $I_1$  e  $I_2$  obtenemos

$$W = \frac{1}{2} (L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1 + L_{22} I_2^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 L_{ik} I_i I_k. \quad (47.17b)$$

Esta fórmula determina la energía del campo magnético, originado por las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ . Se generaliza fácilmente para el caso de  $N$  circuitos

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i I_k, \quad (47.18)$$

donde  $L_{ik}$  para  $i = k$  se denomina inductancia del  $i$ -ésimo circuito y para  $i \neq k$ , inductancia mutua de los circuitos  $i$ -ésimo y  $k$ -ésimo. Las expresiones para estos coeficientes se dan mediante las fórmulas (47.16a) que adquieren el aspecto

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_i} \int_{L_k} \frac{dl_i \cdot dl_k}{r_{ik}} \quad (i \neq k), \quad (47.19)$$

donde  $dl_i$ ,  $dl_k$  son elementos de longitud de los  $i$ -ésimo y  $k$ -ésimo circuitos  $L_i$  y  $L_k$  y  $r_{ik}$ , la distancia entre ellos. De la fórmula (47.19) se desprende la igualdad

$$L_{ik} = L_{ki}, \quad (47.20)$$

que es la generalización de (47.16b) para el caso de muchos circuitos con corriente.

**Energía del campo magnético en presencia de magnéticos.** Si todo el espacio está lleno de un magnético homogéneo, la inducción del campo, creada por las corrientes prefijadas, varía en  $\mu/\mu_0$  veces en comparación con la inducción en el vacío [véase (38.29)]. Por lo tanto, en tantas veces cambian los flujos  $\Phi$  y  $d\Phi$  en la fórmula (47.1). Todos los cálculos posteriores son análogos, pero en todas las partes  $\Phi$  varía en  $\mu/\mu_0$  veces. Partiendo de las fórmulas (47.7) y (47.8), concluimos que la inductancia del circuito y las inductancias mutuas aumentan  $\mu/\mu_0$  veces. Eso significa que las fórmulas (47.16a) para la inductancia mutua en presencia de magnético tienen la misma forma, pero sustituyendo  $\mu_0$  por  $\mu$ . Semejante sustitución tiene lugar en las fórmulas (47.15a) y (47.15b). Las expresiones (47.5) y (47.17) para la energía del campo magnético permanecen invariables, pero en ellas las inductancias e inductancias mutuas crecen  $\mu/\mu_0$  veces. Por lo tanto, la energía del campo magnético de las corrientes que circulan

en un magnético homogéneo e ilimitado, varía  $\mu/\mu_0$  veces en comparación con la energía del campo de las mismas corrientes, pero en el vacío.

**Densidad de la energía del campo magnético.** El campo magnético de las corrientes prefijadas está distribuido por todo el espacio. Expresemos la energía del campo (47.5) de un circuito aislado con corriente por medio de los vectores del campo. La fórmula (47.5) con ayuda de (47.3) puede representarse en la forma

$$W = \frac{1}{2} I \Phi. \quad (47.21)$$

Aquí

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (47.22)$$

donde  $L$  y  $S$  son, respectivamente, el circuito de corriente y la superficie, tendida sobre este circuito. En la expresión (47.22) el potencial  $\mathbf{A}$  se origina por la corriente  $I$ . Así pues, la corriente cerrada está en interacción con su campo magnético propio. La esencia física de dicha interacción consiste en que cada uno de los elementos de corriente  $I d\mathbf{l}$  crea en el espacio un campo magnético con el que actúan recíprocamente los demás elementos de corriente. Sustituyendo (47.22) en (47.21), hallamos

$$W = \int_V \frac{I}{2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV, \quad (47.23)$$

donde, con ayuda de la relación (9.26), se efectúa el paso a las corrientes volumétricas. Ahora transformemos el integrando de manera que en él entren únicamente los vectores del campo y el potencial vectorial. Para eso haremos uso de las fórmulas  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$ , así como de la relación, conocida del potencial vectorial,  $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$ . En definitiva, se obtiene  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H})$  y, por lo tanto, la fórmula (47.23) adquiere la forma

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV - \int_V \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV. \quad (47.24)$$

La segunda integral por el teorema de Gauss—Ostrogradski se transforma en una integral por la superficie que limita el volumen de integración:

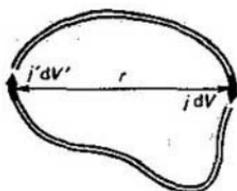
$$\int_V \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV = \int_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \quad (47.25)$$

Si todas las corrientes se encuentran en una zona finita del espacio, a grandes distancias  $r$  de dicha zona  $\mathbf{A} \sim 1/r$ ,  $\mathbf{H} \sim 1/r^2$ , o sea, el integrando disminuye como  $\sim 1/r^3$ . En este caso la superficie de integración crece como  $r^2$  y, por lo tanto, la integral disminuye como  $1/r$ . Por eso para todo el espacio, cuando  $r \rightarrow \infty$ , la segunda integral en (47.24) se anula y la energía total del campo se da mediante la fórmula

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (47.26)$$

Puede decirse que la energía del campo se distribuye por todo el espacio con una densidad volumétrica

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}, \quad (47.27)$$



es decir, la densidad volumétrica de la energía del campo magnético en cada punto se determina por el valor de los vectores del campo en este punto, con la particularidad de que no importa qué fuentes son las que crean dichos campos.

**Inductancia.** En la igualdad (47.23) representemos el potencial  $A$  con ayuda de (37.11a) como

$$A = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j'}{r} dV', \quad (47.28)$$

donde la densidad de corriente y el elemento de volumen se dan con trazos para no confundirlos con las mismas magnitudes en el integrando (47.23): son distintos elementos de volumen de una misma corriente, la distancia entre los cuales se denota en (47.28) por  $r$  (véase la fig. 183). Poniendo (47.28) en (47.23), hallamos

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu}{4\pi} \int \int \frac{j \cdot j'}{r} dV dV' = \frac{1}{2} I^2 \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{I^2} \int \int \frac{j \cdot j'}{r} dV dV', \quad (47.29)$$

donde en la última igualdad el numerador y denominador de la fórmula se multiplican por  $I^2$ . Comparando (47.29) y (47.5), obtenemos

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I^2} \int \int \frac{j \cdot j'}{r} dV dV'. \quad (47.30)$$

Los fórmulas (47.16a) para la inductancia mutua, al pasar a las corrientes volumétricas ( $I dl \rightarrow j dV$ ) toman el aspecto

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{j_i \cdot j_k}{r_{ik}} dV_i dV_k, \quad (47.31)$$

semejante a (47.30). En cambio, la fórmula (47.30) no puede expresarse mediante las corrientes lineales. Si se hace eso de manera formal, el integrando en la mencionada fórmula adquiere la forma  $I^2 dl \cdot dl' / r$  y se convierte en infinito al coincidir los elementos de integración cuando  $dl = dl'$  ya que en este caso  $r = 0$ . Por eso la integral es divergente y la fórmula para la inductancia pierde el sentido. Esa situación es semejante a la que existe para calcular la energía propia de la carga cuando para la carga puntual la energía propia se reduce al infinito.

**Campo de un solenoide.** A título de ejemplo para utilizar las fórmulas obtenidas en el presente párrafo, examinemos el campo de un solenoide. Como

ya se ha mostrado, la inducción del campo fuera del solenoide es nula, mientras que dentro de él, se determina por la igualdad (38.40), o sea

$$B = \mu n I, \quad (47.32)$$

donde  $n$  es la cantidad de espiras por 1 m de longitud de solenoide. El flujo de inducción del campo, que abarca una espira del solenoide, es igual a

$$\Phi_1 = BS = \mu n I S, \quad (47.33)$$

donde  $S$  es el área de la sección transversal del solenoide. El flujo que abarca  $N$  espiras del solenoide, que ocupan la longitud del solenoide  $l = N/n$ , es

$$\Phi_N = \Phi_1 N = \mu n I S N = \mu I S N^2 / l. \quad (47.34)$$

Por consiguiente, la inductancia de  $N$  espiras del solenoide es igual a

$$L_N = \Phi_N / I = \mu S N^2 / l. \quad (47.35)$$

La energía, concentrada en la longitud  $l$ , es

$$W = \frac{1}{2} L_N I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 I^2}{2} S = \frac{1}{2} \mu n^2 I^2 S l = \frac{1}{2} H B V, \quad (47.36)$$

donde  $\mu n^2 I^2 = H B$ ,  $S l = V$  es el volumen de la sección del solenoide en la que se calcula la energía del campo. La fórmula (47.36) permite definir la energía del campo tanto mediante la corriente e inductancia, como por medio de la densidad de la energía del campo.

Hallemos el vector-potencial de un solenoide infinitamente largo. Es útil partir de la fórmula (47.22). A causa de la simetría axial del problema, calculemos todo en el sistema de coordenadas cilíndricas con el eje axial que coincide con el eje del solenoide. Designemos el ángulo axial por  $\varphi$  y la distancia del eje hasta el punto en que se calcula el potencial, por  $r$ . En calidad de contorno  $L$  en (47.22) elijamos una circunferencia con radio  $r$ , yacente en el plano perpendicular al eje del solenoide y con centro en el eje. Entonces

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L A_\varphi r d\varphi = 2\pi r A_\varphi,$$

donde se toma en consideración que  $A_\varphi = \text{const}$  para  $r = \text{const}$ . Por lo tanto, el vector-potencial es igual a

$$A_\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

donde  $S$  es el área del círculo, limitado por la circunferencia de radio  $r$ . De aquí

$$A_\varphi = \begin{cases} \mu n I r / 2 & (0 < r < a), \\ \mu n I a^2 / (2r) & (a < r < \infty). \end{cases}$$

**Energía del magnético en un campo magnético exterior.** Supongamos que existe una distribución fijada de las corrientes, que en el espacio libre crea un

campo magnético, cuya inducción es  $\mathbf{B}_0(x, y, z) = \mu_0 \mathbf{H}(x, y, z)$ , y la energía

$$W_0 = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 dV. \quad (47.37)$$

Supongamos que todo el espacio está lleno de un magnético homogéneo con una permeabilidad magnética  $\mu = \text{const}$  y el campo se crea por la misma distribución de las corrientes. Como fue demostrado [véase (38.22)], la intensidad del campo magnético en el magnético no varía ( $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ ) y la inducción será  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Por consiguiente, en presencia del magnético la energía del campo

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} dV. \quad (47.38)$$

Esto significa que al llenar todo el espacio de magnético, la energía del campo aumenta. A título de fuente de dicha energía sirven, por ejemplo las fuerzas electromotrices exteriores, con cuya ayuda se mantienen constantes las corrientes, al llenar el espacio de magnético. Puesto que después de llenar el espacio de magnético todas las fuentes, merced a las cuales surgió el campo adicional, son idénticas a las que originaron el campo antes de llenar el espacio, puede considerarse que la energía del magnético en un campo exterior  $\mathbf{H}_0$  es la magnitud

$$W_m = W - W_0 = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0) dV. \quad (47.39)$$

El integrando puede transformarse:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^2 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0. \quad (47.40)$$

donde

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \mathbf{B}. \quad (47.41)$$

Por consiguiente, la energía del magnético en un campo magnético es igual a

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}_0 dV.} \quad (47.42)$$

Esta expresión es semejante a la fórmula (18.30) para la energía del dieléctrico en un campo eléctrico exterior, pero se diferencia por el signo en el primer miembro.

La fórmula (47.42) se dedujo para el magnético que llena todo el espacio con  $\mu = \text{const}$ . Sin embargo, tiene forma de una integral respecto a la densidad de energía del magnético y por eso es de esperar que sea válida para el caso arbitrario. Los cálculos correspondientes confirman esta deducción. No los citamos en el presente manual por su voluminosidad.

Ahora podemos calcular la energía del magnético con la permeabilidad magnética  $\mu_1$ , que se encuentra en un medio, cuya permeabilidad magnética es  $\mu_2$ . Examinemos otra vez un magnético infinito partiendo de la fórmula (47.42)

de la misma manera que al deducir la expresión (48.30) con una diferencia que consiste en que en la electrostática dicha distribución de las cargas crea un mismo campo  $D$  en distintos medios, mientras que en la teoría del campo magnético estacionario la distribución dada de las corrientes origina en diversos medios un mismo campo  $H$ . Entonces

$$W_{m12} = W_{m1} - W_{m2} = (\mu_1 - \mu_2) \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 dV, \quad (47.43)$$

donde

$$W_{mi} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{H}_i - \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{H}_0) dV. \quad (47.44)$$

La expresión (47.43) es semejante a la fórmula (18.31) con el signo cambiado antes de la integral. A pesar de ser deducida dicha fórmula para un magnético infinito, es válida también para un magnético limitado. En este caso la integral se propaga por todo el volumen del magnético. La intensidad  $\mathbf{H}_2$  es la intensidad del campo, originado en los puntos del volumen del magnético si su permeabilidad fuese igual a la permeabilidad magnética  $\mu_2$  del medio;  $\mathbf{H}_1$  es la intensidad real en el magnético con permeabilidad magnética  $\mu_1$ , sumergido en un medio con permeabilidad magnética  $\mu_2$ .

Supongamos que la permeabilidad magnética del medio varía en una magnitud infinitésima  $\delta\mu$ . Entonces la energía del magnético que se encuentra en el campo magnético  $\mathbf{H}$  cambia en  $\delta W_m$ . Suponiendo que en (47.43)  $\delta\mu = \mu_1 - \mu_2$ ,  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}$  y prescindiendo de  $\delta\mu\delta\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$  como una magnitud del orden superior de infinitud, obtenemos

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \int \delta\mu H^2 dV, \quad (47.45)$$

donde  $\mu$  puede ser función de un punto o de otros parámetros. Esta fórmula se diferencia de la fórmula (18.36) para los dieléctricos sólo por el signo.

**Cálculo de las fuerzas, partiendo de la expresión para la energía.** Examinemos un sistema de circuitos por los cuales circulan corrientes. Al desplazarse y deformarse los contornos a causa de las fuerzas electromotrices exteriores, se efectúa trabajo mecánico. La energía de la fuente de las fuerzas electromotrices exteriores se gasta en crear un campo magnético y en realizar un trabajo mecánico. El trabajo de las fuerzas electromotrices exteriores se determina por la fórmula (47.2) y el trabajo mecánico al variar el parámetro  $\xi_i$  que caracteriza la configuración del sistema, es, según la definición, igual a  $F_i d\xi_i$ , donde  $F_i$  es la fuerza generalizada respecto al parámetro  $\xi_i$ . El principio de conservación de la energía se escribe como

$$\sum_j I_j d\Phi_j = dW + \sum_i F_i d\xi_i. \quad (47.46)$$

Examinemos ante todo los procesos virtuales, en los cuales se conservan los flujos magnéticos, o sea  $d\Phi_j = 0$ . La ecuación (47.46) adquiere el aspecto

$$0 = (dW)_\Phi + \sum_i F_i d\xi_i, \quad (47.47)$$

de donde, teniendo en cuenta la independencia de  $d\xi_i$ , obtenemos

$$F_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_{\Phi}, \quad (47.48)$$

donde el índice  $\Phi$  de la derivada parcial en forma explícita muestra que se toma para los valores constantes de los flujos  $\Phi_j$ . Para poder hacer uso de la fórmula (47.48) es necesario que la energía del campo magnético se exprese como función de  $\Phi_i$  y  $\xi_i$  como parámetros independientes.

Para las aplicaciones prácticas en muchos casos es más cómodo expresar la fuerza generalizada en forma de derivadas de la energía respecto a los parámetros generalizados para las corrientes continuas. La energía del campo magnético (47.18), teniendo en cuenta que [véase (47.6)]

$$\Phi_i = \sum_k L_{ik} I_k, \quad (47.49)$$

se expresa como

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_i I_i. \quad (47.50)$$

Para las corrientes continuas ( $I_i = \text{const}$ ) de (47.50) se desprende que

$$(dW)_I = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (47.51)$$

y por eso la fórmula (47.46) se reduce a la forma

$$(dW)_I = \sum_i F_i d\xi_i. \quad (47.52)$$

Señalemos que esta fórmula es válida sólo para corrientes continuas. Tomando en consideración la independencia de  $\xi_i$ , hallamos la expresión para las fuerzas generalizadas:

$$F_i = \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_I, \quad (47.53)$$

donde el índice  $I$  de la derivada parcial significa que ésta se toma para corrientes continuas. Para poder utilizar la fórmula (47.53)  $W$  debe expresarse como una función de las intensidades de las corrientes y de los parámetros  $\xi_i$ .

Examinemos a título de ejemplo dos circuitos con corrientes en interacción, cuyos campos magnéticos poseen una energía determinada por la fórmula (47.17). Haciendo uso de (47.53), calculemos la componente  $x$ -ésima de la fuerza que ejerce el primer circuito sobre el segundo. En calidad de coordenada generalizada tomemos el valor de la coordenada  $x$  en cierto punto del segundo circuito, considerando que el primer circuito es inmóvil. Como desplazamiento virtual, relacionado con dicha coordenada, se debe tomar el desplazamiento del segundo circuito a lo largo del eje  $X$  sin deformaciones y rotaciones, y expresar la energía del campo magnético por medio de la mencionada coordenada y otros

parámetros independientes que ahora no nos interesan. Toda la dependencia de la energía del campo magnético respecto a  $x$  se encuentra en la inductancia mutua  $L_{12} = L_{21}$ , ya que las inductancias  $L_{11}$  y  $L_{22}$  no dependen del cambio de la disposición mutua de los circuitos. La fuerza generalizada, enlazada con la coordenada cartesiana  $x$ , es la proyección de la fuerza  $F_x$  ordinaria. Por eso (47.53) adquiere el aspecto

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}. \quad (47.54)$$

De la misma manera se determinan las otras componentes de la fuerza. La inductancia  $L_{12}$  es una magnitud geométrica y su dependencia respecto a  $x$  es fácil hallar mediante la fórmula (47.19).

Está claro que el valor de la fuerza no depende de por medio de cuál fórmula se calcula. Por eso, llegaremos también al valor de la fuerza de (47.54) si la calculamos valiéndonos de la fórmula (47.48). Realicemos este cálculo. En (47.48) a título de expresión para  $W$  no se puede coger la fórmula (47.17), ya que aquí participan en forma explícita las intensidades de corriente. Las excluimos con ayuda de las fórmulas (47.10), de las que se desprende:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{L_{22}\Phi_1 - L_{12}\Phi_2}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}, \\ I_2 &= \frac{L_{11}\Phi_2 - L_{21}\Phi_1}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}. \end{aligned} \quad (47.55)$$

Sustituyendo (47.55) en (47.17), hallamos

$$W = \frac{1}{L_{11}L_{22} - L_{12}^2} \left[ \frac{L_{11}\Phi_1^2}{2} - L_{12}\Phi_1\Phi_2 + \frac{L_{22}\Phi_2^2}{2} \right]. \quad (47.56)$$

Ahora la energía del campo magnético se expresa en forma explícita a través de los flujos y puede aplicarse la fórmula (47.48) para  $\Phi_i = \text{const}$ . La única magnitud que depende en (47.56) de  $x$  es  $L_{12}$ , por eso

$$F_x = - \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{1}{(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^2} [L_{12}L_{22}\Phi_1^2 - (L_{11}L_{22} + L_{12}^2)\Phi_1\Phi_2 + L_{12}L_{11}\Phi_2^2] \frac{\partial L_{12}}{\partial x} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}, \quad (47.57)$$

donde se tienen en cuenta las igualdades (47.55). Como era de esperar (47.57) coincide con (47.54).

Es necesario utilizar las fórmulas (47.48) y (47.53) en dependencia de las circunstancias y elegir la que conduce a los cálculos más sencillos.

Fuerzas volumétricas que actúan sobre los magnéticos comprimibles. Disponiendo de la expresión (47.45) para la energía del magnético en el campo magnético, se puede, haciendo uso de la relación entre las fuerzas y la energía, obtener la expresión para las fuerzas de la misma manera que fue hecho para los dieléctricos en el § 19. Partimos de la expresión (47.45) y razonamos del mismo modo que al pasar de (18.36) a la fórmula (19.41). Todos los cálculos son también análogos, únicamente hay que tener en cuenta que para los dieléctricos la fuerza se halla para las cargas constantes, es decir, por la fórmula (19.46), mientras que

para los magnéticos, a corrientes continuas, es decir, por la fórmula (47.53). Eso significa que al calcular las derivadas, es necesario coger la energía con signos diferentes. En definitiva, en lugar de la fórmula (19.41), se obtiene la siguiente fórmula:

$$f = -\frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left( H^2 \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right). \quad (47.58)$$

Recordemos que todo el examen se llevó a cabo para los procesos isotérmicos y, por lo tanto, la derivada  $\partial \mu / \partial \rho_m$  en (47.58) debe calcularse a  $T = \text{const.}$

La fórmula (47.58) es útil escribirla de otra manera:

$$f = \frac{1}{2} B^2 \text{grad} \left( \frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{2} \text{grad} \left[ B^2 \rho_m \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left( \frac{1}{\mu} \right) \right], \quad (47.59)$$

donde se tiene en cuenta que  $H^2 = B^2 / \mu^2$  y  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \cong -\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x}$ , etc. Así la fórmula (47.59) es un análogo más cercano a la expresión (19.41), ya que el papel de vector de campo en el magnetismo lo desempeña  $B$  y el análogo de  $z$  es  $1/\mu$ .

Escribamos la fórmula (47.41) como

$$\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} = \frac{J}{B}. \quad (47.60)$$

Sea que la imanación  $J$  depende linealmente de la densidad  $\rho_m$ , o sea,  $J \sim \rho_m$ . Entonces de (47.60) se desprende que

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial \rho_m} \left( \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}. \quad (47.61)$$

Para estas condiciones la fórmula (47.59) adquiere el aspecto

$$f = \frac{1}{2} \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0} \text{grad } B^2, \quad (47.62)$$

lo que coincide con (39.13). De esta manera, la fórmula (39.13) es válida no sólo para los magnéticos rígidos, sino que también para los comprimibles, para los cuales la imanación depende linealmente de la densidad de masa. Esto se observa en los gases y ciertos líquidos.

**Energía del momento magnético en un campo exterior.** Puesto que el trabajo, necesario para aumentar el flujo de inducción magnética a través de la superficie, tendida sobre el circuito con corriente  $I$ , es igual a  $I d\Phi$  ( $d\Phi$  es el flujo de inducción magnética que no se origina por la corriente  $I$  que circula por el circuito, sino que se crea mediante otras fuentes del campo magnético), la energía que se gasta al formar el flujo  $\Phi$  a través de la superficie, limitada por el circuito de corriente  $I$ , es igual a  $I\Phi$ . En caso de un circuito infinitésimo  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ ,  $I\Phi = \mathbf{p}_m \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}$  es el momento magnético de la corriente. Por lo tanto, la energía del momento magnético en el campo magnético exterior

es

$$W = -p_m \cdot B. \quad (47.63)$$

Esta magnitud alcanza su valor mínimo cuando  $p_m$  y  $B$  coinciden en dirección. Esto significa que *el campo magnético exterior tiende a girar el momento magnético hasta hacerlo coincidir con el vector de inducción* [véase (39.8)].

¿Por qué la inducción mutua puede calcularse por la fórmula en la que entran las corrientes lineales, y la inductancia no puede expresarse mediante las corrientes lineales?

¿Qué propiedad del campo magnético determina la constancia de la inductancia de un circuito rígido con corriente?

Las inductancias e inductancias mutuas dependen sólo de las características geométricas de los circuitos con corrientes y su disposición recíproca.

**Ejemplo 47.1.** *Calcular la fuerza con que un solenoide entra o se expulsa de otro (fig. 184). Las densidades del devanado y la intensidad de las corrientes en ellos son  $n_1, I_1$  y  $n_2, I_2$ , respectivamente.*



Fig. 184  
Para calcular las fuerzas de interacción de los solenoides

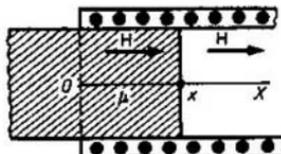


Fig. 185  
Para calcular las fuerzas de interacción del solenoide y el imán

mente, y las áreas de las secciones transversales son iguales. Los solenoides son lo suficientemente largos y el devanado bastante denso para poder describir el campo lejos de sus extremos mediante las fórmulas para un solenoide infinitamente largo. El valor de  $x$  es grande, merced a lo cual pueden menospreciarse los efectos de borde.

Hallemos la inductancia mutua haciendo uso de las fórmulas (47.48)–(47.49). El primer solenoide origina a través de cada espira del segundo solenoide un flujo  $\mu_0 n_1 I_1 S$  y todo el flujo a través de  $n_2 x$  espiras del segundo solenoide en la zona de intersección es igual a

$$\Phi_{21} = \mu_0 n_1 I_1 S n_2 x,$$

de donde obtenemos la inductancia mutua

$$L_{21} = \Phi_{21}/I_1 = \mu_0 n_1 n_2 S x \quad (L_{12} = L_{21}). \quad (47.64)$$

Entonces la fuerza es igual a

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x} = \mu_0 n_1 I_1 n_2 I_2. \quad (47.65)$$

Si las corrientes tienen el mismo sentido,  $I_1 I_2 > 0$ ,  $F_x > 0$  y, por lo tanto, los solenoides se repelen. Siendo las direcciones de las corrientes contrarias  $I_1 I_2 < 0$ ,  $F_x < 0$ , lo que significa la atracción de los solenoides.

**Ejemplo 47.2.** *En un solenoide, cuyo área de la sección circular es  $S$ , la longitud  $l$  y que posee  $n$  espiras por 1 m de longitud, se introduce un magnético con permeabilidad magnética  $\mu$  (fig. 185). Hallar la fuerza que actúa sobre el magnético, menospreciando los efectos de borde si el solenoide es recorrido por la corriente de intensidad  $I$ .*

Ya que la susceptibilidad magnética del magnético  $\chi \ll 1$ , en primera aproximación puede considerarse que la intensidad es en todas las partes igual a  $H^{(2)} = H_x = nI$ . Por consiguiente, la energía del campo magnético del sistema es igual a

$$W = [H_x B_x / 2 + H^{(2)} B^{(2)} (1 - x) / 2] S,$$

donde  $B_x$  y  $B^{(2)}$  son las inducciones en el magnético y en el vacío, respectivamente. Teniendo en cuenta que  $B_x = \mu H_x$ ,  $B^{(2)} = \mu_0 H^{(2)}$ , obtenemos

$$W = (n^2 I^2 / 2) [\mu x + \mu_0 (1 - x)] S$$

y, por lo tanto, la fuerza es

$$F_x = (\partial W / \partial x)_I = 1/2 (\mu - \mu_0) n^2 I^2 S = (w - w_0) S, \quad (47.66)$$

donde

$$w = \mu n^2 I^2 / 2 = H_x B_x / 2, \quad w_0 = \mu_0 n^2 I^2 / 2 = H B^{(2)} / 2$$

son las densidades de la energía del campo magnético por las diferentes partes de la superficie de separación, sobre la que actúa la fuerza. Así pues, la densidad superficial de la fuerza  $f_x = F_x / S$  es la suma de dos fuerzas que actúan desde diversas partes sobre la superficie de separación. La densidad superficial de cada una de las fuerzas es igual a la densidad de la energía del campo magnético.

**Ejemplo 47.3.** Calcular la intensidad de un cable coaxial de longitud  $l$ , cuyo alma central posee un radio  $r_1$  y la envoltura, los radios  $r_2$  (la interior) y  $r_3$  (la inferior) (véase la fig. 140). La permeabilidad magnética de los conductores es igual a  $\mu$  y el espacio entre el alma y la envoltura está lleno de dieléctrico.

Hallemos ante todo la inducción del campo magnético. Está claro que el campo es axial-simétrico y las líneas de fuerza de la inducción son de por sí circunferencias con centro en el eje del cable. Partiendo de la ley de la corriente total, tenemos (véase el ejemplo 35.1)

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\mu}{2\pi} I \frac{r}{r_1^2} & (0 < r < r_1), \\ \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} & (r_1 < r < r_2), \\ \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r} \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} & (r_2 < r < r_3), \\ 0 & (r_3 < r < \infty). \end{cases} \quad (47.67)$$

Para calcular la autoinducción del segmento de cable hacemos uso de la relación  $W = LI^2/2$ . Puesto que  $W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$ , entonces [véase (47.67)]

$$\begin{aligned} W &= \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{(2\pi)^2} \int_0^{r_1} \frac{r^2}{r_1^2} 2\pi r dr + \frac{l}{2} \frac{\mu_0 I^2}{(2\pi)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r dr + \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{(2\pi)^2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r^2} \left( \frac{r_3^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_1^2} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = \\ &= \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{8\pi} + \frac{l}{2} \frac{\mu_0 I^2}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{l}{2} \frac{\mu I^2}{2} \left[ \frac{r_3^2}{(r_3^2 - r_1^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{1}{4} \frac{3r_3^2 - r_1^2}{r_3^2 - r_1^2} \right], \end{aligned}$$

de donde

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{l}{2\pi} \left[ \mu_0 \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\mu r_3^2}{(r_3^2 - r_1^2)} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{\mu r_3^2}{2(r_3^2 - r_1^2)} \right]. \quad (47.68)$$

## § 48. Circuitos de la corriente alterna casiestacionaria

*Se exponen los métodos principales del cálculo de los circuitos de corriente alterna casiestacionaria.*

**Definición.** Al estudiar los campos alternativos y las corrientes alternas es necesario tomar en consideración dos factores:

1) la velocidad finita de propagación de los campos electromagnéticos (véase el § 61);

2) la creación del campo magnético por medio de un campo magnético en variación. La magnitud  $j_{des} = \partial D / \partial t$  se denomina densidad volumétrica de la corriente de desplazamiento (véase el § 57).

Para una frecuencia no muy elevada de la corriente alterna, dichos factores pueden menospreciarse, o sea, puede considerarse que los campos electromagnéticos se propagan en el espacio instantáneamente, sin existir las corrientes de desplazamiento o, con otras palabras, el campo magnético se engendra sólo por las corrientes de conducción. Las corrientes y los campos que satisfacen estas condiciones se llaman casiestacionarios. Expresemos los criterios casiestacionarios desde el punto de vista matemático.

1. Si existe un proceso periódico que se propaga desde una fuente con la velocidad  $c$ , la longitud de onda de ese proceso, o sea, la distancia en la que se desenvuelve un período  $T$  de variación del proceso con el tiempo, es igual a

$$\lambda = cT.$$

La variación espacial de cierta magnitud que caracteriza el proceso puede menospreciarse sólo si esa magnitud se examina en las zonas, cuyas dimensiones lineales son mucho menores que la longitud de onda ( $l \ll \lambda$ ). Esto es precisamente el criterio de menosprecio de la velocidad final de propagación de los campos electromagnéticos.

2. Si  $D = D_0 \exp(i\omega t)$ ,  $j_{des} = \partial D / \partial t = i\omega D = i\omega \epsilon E$ . Por eso el efecto de las corrientes de desplazamiento puede menospreciarse en comparación con el efecto de las corrientes de conducción para la condición

$$|j_{des}|_{\max} \ll |j|_{\max}.$$

Puesto que  $j = \gamma E$ ,  $j_{des} = i\omega \epsilon E$ , esta condición puede escribirse como

$$\frac{|j_{des}|_{\max}}{|j|_{\max}} = \frac{\omega \epsilon}{\gamma} \ll 1.$$

Tomando en consideración que para los conductores metálicos  $\epsilon \approx \epsilon_0$ ,  $\gamma \approx 10^7$  S/m, obtenemos que las corrientes de desplazamiento son poco importantes en la zona de frecuencias

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} \text{c}^{-1},$$

es decir, hasta frecuencias mayores que las frecuencias de oscilaciones, correspondientes a la parte ultravioleta del espectro, esta estimación es aproximada, ya que no tiene en cuenta las propiedades inerciales del medio que a frecuencia elevada desempeñan un papel esencial. La consideración de las propiedades inerciales de la substancia debilita la mencionada estimación en varios órdenes, en cambio, después de eso el intervalo de frecuencias para las que se puede menospreciar las corrientes de desplazamiento en comparación con las de conducción sigue siendo muy grande.

No obstante, *para los campos electromagnéticos en el vacío y dieléctrico es necesario tener en cuenta las corrientes de desplazamiento, como fuente del campo magnético, para todas las frecuencias, ya que allí no existen corrientes de conducción.* La presencia de las corrientes de desplazamiento determina la existencia de las ondas electromagnéticas (véase el capítulo 9).

En lo que se refiere al primer criterio, su papel se define por la magnitud relativa de la longitud de la onda y las dimensiones espaciales de la zona, en la que se estudia el proceso. Verbigracia, para la corriente técnica de 50 Hz de frecuencia la longitud de onda es de  $\lambda \approx 6$  mil km. Por esta razón, si nos interesan las cuestiones, relacionadas con la distribución de la corriente por los conductores en los límites de la estación eléctrica o incluso de la ciudad, puede considerarse que la corriente es casiestacionaria. Pero si se trata de la transmisión de la corriente a muchos miles de kilómetros, es necesario tomar en consideración su variabilidad a lo largo de la línea de transmisión y no se puede considerar casiestacionaria. La corriente de frecuencias muy elevadas con una longitud de onda de varios metros no se puede considerar casiestacionaria incluso en los márgenes de un apartamento.

*Autoinducción.* La fuerza electromotriz de inducción (46.1) surge al variar el flujo  $\Phi$  que abarca el circuito de corriente, cualesquiera que sean las causas de esta variación. En particular, la propia corriente cerrada lineal crea un flujo de inducción magnética a través de la superficie que restringe. Por lo tanto, *al cambiar la intensidad de la corriente en el circuito surge una fuerza electromotriz.* Este fenómeno se llama autoinducción. Ya que la corriente crea a su alrededor un campo magnético según la regla de Ampère y la fuerza electromotriz en el circuito está relacionada con la variación del flujo conforme a la regla de la mano izquierda, de la fig. 186 deducimos que *la fuerza electromotriz de autoinducción está dirigida de tal manera, que impide la variación de la intensidad de la corriente que la provoca (regla de Lenz).*

La intensidad de la corriente en el circuito está ligada con el flujo propio de inducción magnética que abarca la corriente, por la fórmula (47.3)

$$\Phi = LI, \quad (48.1)$$

donde  $L$  es la inductancia del circuito. Por eso la expresión (46.1) para la fem de autoinducción adquiere el aspecto

$$\mathcal{E}^{\text{a.ind}} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (48.2)$$

Conexión y desconexión de la fem continua en un circuito con resistencia e inductancia. Si en el momento  $t = 0$  (fig. 187) se conecta al circuito una fuente de fem exterior de magnitud constante, por ejemplo, una pila, la intensidad de la corriente  $I$  en el circuito comienza a crecer. Pero debido al crecimiento de la inducción del campo, en el circuito surge una fem de autoinducción que actúa en sentido contrario a la fem exterior. Como resultado, la elevación de la intensidad de la corriente en el circuito se hace más lenta. Para cada momento de tiempo se observa la ley de Ohm que, teniendo en cuenta (48.2), se escribe en forma de la ecuación siguiente

$$IR = U_0 = L \, dI/dt, \quad (48.3)$$

donde  $R$  es la impedancia en el circuito (incluyendo la resistencia interna de la fuente). Dicha ecuación debe resolverse para la condición inicial  $I(0) = 0$ .

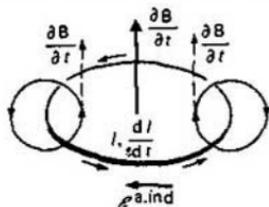


Fig. 186  
Surgimiento de la autoinducción.  
Regla de Lenz

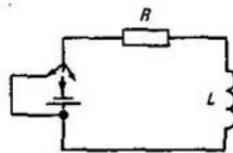


Fig. 187  
Circuito con resistencia e inductancia

Al decir que en cada momento se observa la ley de Ohm, se supone que la intensidad de la corriente en todas las secciones del circuito es la misma, es decir, la corriente es casiestacionaria. La solución de la ecuación (48.3) es elemental:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]. \quad (48.4)$$

La gráfica  $I(t)$  se muestra en la fig. 188. El valor establecido de la intensidad de la corriente  $I(\infty) = U_0/R$ , correspondiente a la ley de Ohm para la corriente continua, se alcanza sólo en el sentido de límite para un tiempo infinito. Teniendo en cuenta la dependencia exponencial entre la intensidad de la corriente y el tiempo, se puede, como habitualmente, en calidad de tiempo de incremento de la intensidad de la corriente en el circuito tomar el valor  $\tau$  para el cual el exponente se convierte en menos la unidad, es decir,

$$\tau = L/R. \quad (48.5)$$

Para una inductancia grande en el circuito el aumento de la intensidad de la corriente transcurre lentamente. Por ejemplo, si en el circuito se conecta una bobina grande de inductancia y una lámpara de incandescencia, después de cerrar el circuito pasa un lapso considerable durante el cual la lámpara alcanza su caldeo permanente total.

Al desconectar la fuente constante de fem exteriores (fig. 187), por ejemplo, al cortocircuitarla, puede observarse que la intensidad de la corriente no se reduce a cero instantáneamente, sino que disminuye poco a poco. La ecuación para la intensidad de la corriente en este caso, evidentemente, tiene la forma

$$IR = -L \, dI/dt \quad (48.6)$$

y se resuelve para la condición inicial  $I(0) = U_0/R$ :

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp(-RT/L). \quad (48.7)$$

La gráfica de esta función se da en la fig. 189. El tiempo de reducción de la intensidad de la corriente se expresa por la misma fórmula (48.5). Para inductan-

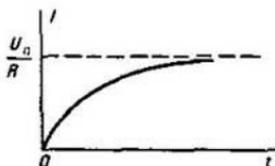


Fig. 188  
Incremento de la intensidad de la corriente en el circuito después de conectar una fem exterior continua

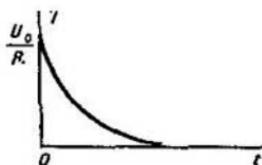


Fig. 189  
Decremento de la intensidad de la corriente en el circuito después de desconectar la fem exterior continua

cias suficientemente grandes después de desconectar la fem exterior, la lámpara en el circuito se apaga sólo gradualmente en el transcurso de un lapso notorio. La fuerza electromotriz que asegura la existencia de la corriente en el circuito durante este lapso, es la fuerza electromotriz de autoinducción, y la fuente de energía es la energía del campo magnético de la bobina de inductancia. Las cuestiones de conexión y desconexión de la fem en el circuito con autoinducción fueron examinadas por primera vez en 1855 por Helmholtz.

**Obtención de impulsos rectangulares de corriente.** Si existe una fuente de impulsos rectangulares de tensión, la presencia del fenómeno de autoinducción en el circuito impide obtener impulsos rectangulares de corriente. La fig. 190 muestra la forma de los impulsos de corriente. Para aproximar al máximo posible su forma a la rectangular es necesario hacer que la inductancia del circuito sea la menor posible.

**Capacidad en el circuito.** La presencia del condensador en el circuito excluye la posibilidad de que por él circule corriente continua. En este caso la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador, en las que se sitúan las cargas correspondientes, compensa totalmente la acción de la fem exterior. Sin embargo, la corriente alterna en el circuito en presencia del condensador puede circular, ya que en este caso la carga en las armaduras del condensador es alterna, lo que permite precisamente existir la corriente en el circuito. Además, la diferencia de potencial en las armaduras del condensador no compensa la ac-

ción de la fem exterior, merced a lo cual se mantiene la intensidad de la corriente correspondiente.

En presencia de un condensador y una resistencia en el circuito (fig. 191) la ley de Ohm se escribe como la ecuación

$$IR = U_0 - Q/C, \quad (48.8)$$

donde  $Q$  es la carga en la armadura del condensador y  $Q/C$ , la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador. Es cómodo diferenciar la ecuación (48.8) respecto a  $t$  y escribirla en la forma

$$R \frac{dI}{dt} = \frac{dU_0}{dt} - \frac{1}{C} I, \quad (48.9)$$

donde  $I = dQ/dt$

**Conexión y desconexión de la fem constante en un circuito con capacidad y resistencia.** Sea que la tensión constante  $U_0$  se conecta en el momento  $t = 0$ .

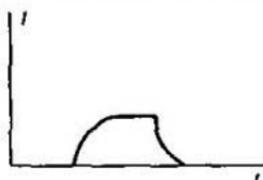


Fig. 190  
Forma de los impulsos de corriente para los impulsos rectangulares de tensión

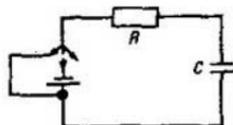


Fig. 191  
Circuito con capacidad y resistencia

De la ecuación (48.8) se ve que  $I(0) = U_0/R$ , y la ecuación (48.9) adquiere el aspecto para  $t > 0$

$$R \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{C} I. \quad (48.10)$$

Para la condición inicial  $I(0) = U_0/R$  la solución de esta ecuación se expresa mediante la fórmula

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp[-t/(RC)], \quad (48.11)$$

es decir, con el tiempo la intensidad de la corriente en el circuito disminuye desde el valor máximo  $U_0/R$  hasta cero. La gráfica  $I(t)$  es semejante a la mostrada en la fig. 189 y el tiempo de reducción de la intensidad de la corriente  $\tau = RC$ . Por eso, si la capacidad  $C$  es suficientemente grande, la corriente después de desconectar la tensión constante puede existir un tiempo notorio. La bombilla, conectada al circuito, primero se enciende y luego comienza a apagarse poco a poco.

Después de que la intensidad de la corriente alcanza el valor cero, el condensador resulta estar cargado hasta una diferencia de potencial, igual a la fem

exterior, pero de dirección contraria. Ellas se compensan mutuamente. Al desconectar la fem exterior, por ejemplo, al cortocircuitar los polos de la pila, la diferencia de potencial en las armaduras del condensador resulta estar no compensada. La corriente comienza a recorrer el circuito con una intensidad inicial igual a  $U_0/R$  y la ley de reducción de la intensidad de la corriente coincide totalmente con (48.11) teniendo el mismo tiempo de reducción de la intensidad de corriente.

**Circuito con capacidad, inductancia, resistencia y fuente de fem exteriores.** Este circuito se muestra en la fig. 192. Basándose en las expresiones (48.8) y (48.6), la ecuación para la corriente en el circuito tiene la forma

$$IR = U - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}. \quad (48.12)$$

Después de diferenciar los dos miembros de (48.12) respecto a  $t$ , escribamos la ecuación en la forma

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dU}{dt}. \quad (48.13)$$

Distintos casos particulares de la solución de dicha ecuación fueron examinados antes.

**Corriente alterna.** El más importante es el análisis de la corriente alterna armónica, ya que con ayuda de la representación de una función arbitraria en forma de serie o integral de Fourier para este caso puede reducirse cualquier otro caso.

Para estudiar estas cuestiones es útil aplicar la forma compleja de representación de las magnitudes que varían armónicamente. Examinemos el régimen estable.

Si la fem exterior varía según la ley

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad (48.14)$$

es obvio, que la intensidad de la corriente en (48.13) también debe cambiar con el tiempo según la ley

$$I = I_0 e^{i\omega t}, \quad (48.15)$$

con la particularidad de que  $I$ ,  $U$ ,  $I_0$ ,  $U_0$  en las fórmulas (48.14) y (48.15) son, en general, magnitudes complejas. Partiendo de estas fórmulas, se deduce que

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U, \quad \frac{dI}{dt} = i\omega I, \quad (48.16)$$

y por eso la ecuación (48.13) toma el aspecto

$$(-\omega^2 L + i\omega R + 1/C) I = i\omega U. \quad (48.17)$$

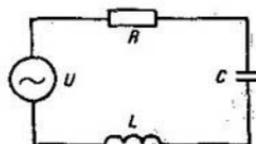


Fig. 192  
Circuito con capacidad, inductancia, resistencia y fuente de fem exteriores

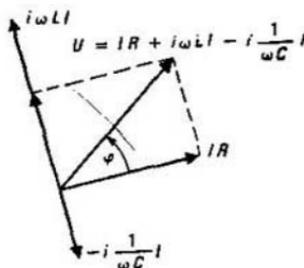


Fig. 193  
Diagrama vectorial de las tensiones en el circuito de corriente alterna

Dividiendo los dos miembros de la ecuación (48.17) por  $i\omega$ , la representamos en la forma

$$IZ = U, \quad (48.18)$$

donde

$$Z = R + i[\omega L - 1/(\omega C)] \quad (48.19a)$$

se denomina **impedancia**. La ecuación (48.18) tiene la forma de la ley de Ohm, en la que entra la impedancia. Para la corriente alterna la impedancia desempeña el papel de resistencia, en cambio, siendo una magnitud compleja, mediante (48.18) permite no sólo tener en cuenta la relación entre las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión, sino que las relaciones entre sus fases.

En general, en la ecuación (48.18) todas las magnitudes son complejas. Tomando los módulos de los dos miembros de dicha ecuación, hallamos la relación entre las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión:

$$|I| |Z| = |U|, \quad (48.19b)$$

donde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}, \quad (48.19c)$$

Así pues, si nos interesan sólo las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión, la ecuación (48.19b) es totalmente equivalente a la ley de Ohm para la corriente continua, no obstante, la magnitud  $|Z|$  que desempeña el papel de resistencia depende de la frecuencia de la corriente conforme a (48.19c).

**Diagramas vectoriales.** Representemos los números complejos por medio de vectores en el plano complejo. La magnitud que varía armónicamente, se muestra por un vector que gira con una frecuencia  $\omega$  alrededor de su comienzo en sentido levógiro. La longitud de dicho vector es igual a la amplitud de las oscilaciones de la magnitud física correspondiente.

El método gráfico de solución de la ecuación (48.18) queda obvio de la fig. 193 si se tiene en cuenta que la multiplicación de una magnitud compleja por  $i$  significa girarla a  $\pi/2$  en sentido levógiro sin cambiar su longitud, mientras que la multiplicación por  $(-i)$ , el giro a  $\pi/2$  en sentido dextrógiro.

De la fig. 193 se ve que el ángulo  $\varphi$  se determina de la ecuación

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (48.20)$$

Por lo tanto,  $\varphi$  varía en los límites de  $(+\pi/2, -\pi/2)$  en dependencia de la relación entre las impedancias de distintos elementos del circuito y la frecuencia. En este caso la fase de la tensión exterior  $U$  puede variar desde la coincidencia con la tensión en la inductancia hasta la coincidencia con la tensión en la capacidad. Es más cómodo expresar lo dicho en forma de la relación entre las

fases de las tensiones en los elementos del circuito y la fase de la tensión exterior:

- 1) la fase de la tensión en la inductancia ( $U_L = i\omega LI$ ) siempre adelanta la fase de la tensión exterior en un ángulo entre 0 y  $\pi$ ;
- 2) la fase de la tensión en la capacidad [ $U_C = -iI/(\omega C)$ ] siempre se retrasa de la fase de la tensión exterior en un ángulo entre 0 y  $-\pi$ ;
- 3) la fase de tensión en la resistencia puede encontrarse tanto en avance, como en retraso con respecto a la fase de la tensión exterior en un ángulo entre  $+\pi/2$  y  $-\pi/2$ , con la particularidad de que el retraso es principalmente para la carga inductiva cuando  $\omega L > 1/(\omega C)$  y el avance, siendo la carga capacitiva cuando  $\omega L < 1/(\omega C)$ .

El diagrama (fig. 193) permite también enunciar las siguientes afirmaciones sobre la relación entre las tensiones e intensidades de las corrientes en distintos elementos del circuito, con la particularidad de que es cómodo llevar la cuenta, partiendo de la intensidad de la corriente, ya que en todos los elementos del circuito tiene una misma fase:

- 1) la fase de tensión en la inductancia se encuentra en avance de fase con respecto a la intensidad de corriente en  $\pi/2$ ;
- 2) la fase de tensión en la capacidad se encuentra en un retraso de  $\pi/2$  con respecto a la fase de la intensidad de corriente;
- 3) la fase de tensión en la resistencia coincide con la fase de la intensidad de corriente;
- 4) la fase de la tensión exterior puede encontrarse tanto en avance, como en retraso con respecto a la fase de la intensidad de la corriente, lo que se determina por la carga.

**Reglas de Kirchhoff.** La ecuación (48.18) permite resolver todos los problemas, referentes a la corriente alterna en el circuito que contiene inductancia, capacidad y resistencia de la misma manera que se resuelven los problemas correspondientes con ayuda de la ley de Ohm para un circuito con resistencia en caso de corriente continua. El análisis de los circuitos derivados de corriente alterna es semejante al análisis de los circuitos con corriente continua (véase el § 28). Puesto que para la corriente alterna en un circuito cerrado es correcta la ley (48.19) y en cada nudo es válido el principio de conservación de la carga, las reglas de Kirchhoff (28.4) y (28.5) para la corriente continua se generalizan para las corrientes alternas de la siguiente manera:

- 1) para cada circuito cerrado

$$\sum_l (\pm) I_l Z_l = \sum_k (\pm) U_k; \quad (48.21)$$

- 2) en cada nudo

$$\sum (\pm) I_l = 0. \quad (48.22)$$

Esta generalización de las reglas de Kirchhoff para los circuitos derivados de corriente alterna fue hecha en 1886 por J. W. St. Rayleigh (1842—1919). Hay que hacer una objeción sobre los signos de las magnitudes en (48.21) y (48.22). A pesar de que cada una de las magnitudes  $I_l$  o  $U_k$  que figuran en estas

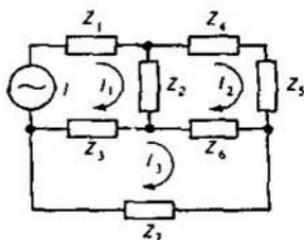


Fig. 194  
Método de corrientes de contorno

fórmulas, es compleja y contiene en sí una fase (y por lo tanto, un signo), al componer las ecuaciones es necesario poner los signos ya que una misma sección puede pertenecer a distintos circuitos y en las ecuaciones entra con direcciones contrarias. Lo mismo se refiere al signo de  $U_h$ . La solución de las ecuaciones permite hallar tanto las amplitudes, como las fases de todas las intensidades de corrientes. Debido a que todas las magnitudes son complejas, el número de ecuaciones esenciales es dos veces mayor que el que habría para el mismo caso, pero para las corrientes continuas.

**Acoplamiento en serie y en paralelo de las impedancias.** De la misma manera que para el caso de corrientes continuas, de la fórmula (48.18) se desprende que durante el acoplamiento en serie

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad (48.23)$$

y en paralelo

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (48.24)$$

Esta circunstancia hace que el análisis de los circuitos eléctricos de corriente alterna sea semejante al análisis de los circuitos de corriente continua, por eso no hay necesidad de examinar con más detalle esta cuestión.

La magnitud, inversa a la impedancia, se denomina **conductancia**:

$$Y = 1/Z. \quad (48.25)$$

Por eso puede decirse que para el acoplamiento en paralelo las conductancias se suman:

$$Y = Y_1 + Y_2. \quad (48.26a)$$

Aplicando la conductancia, la ley de Ohm se escribe como

$$I = YU. \quad (48.26b)$$

**Método de corrientes de contorno.** Para calcular los circuitos complejos el método de corrientes de contorno, que es de por sí el colatorio directo de las reglas de Kirchhoff, presenta simplificaciones considerables. Un circuito complejo consta de sistemas de circuitos cerrados simples. La fig. 194 muestra un circuito complejo que consta de tres circuitos simples. En la ecuación de Kirchhoff al recorrer el circuito cerrado en cada una de sus secciones entre los nudos se toma la intensidad de la corriente que realmente circula por esta sección. En general, en cada sección del circuito la intensidad de la corriente es diferente.

En el método de corrientes de contorno se considera que en todas las secciones de cada circuito cerrado circula una misma corriente. Estas corrientes se llaman de contorno. Aquí la intensidad de corriente total que recorre la sección del circuito es igual a la suma algebraica de las intensidades de las corrientes de contorno para las que este sector es común. La ecuación de Kirchhoff para cada circuito se escribe teniendo en cuenta esa circunstancia, es decir, se expresa mediante las corrientes de contorno. La impedancia total para cada sección del contorno entre los nudos (fig. 194) se designa por el índice correspondiente. La dirección positiva del recorrido se toma en sentido dextrógiro.

Las ecuaciones para las corrientes de contorno, cuyo número coincide con la cantidad de circuitos simples, tienen el aspecto:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 &= U, \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 &= 0, \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 &= 0, \end{aligned} \quad (48.27)$$

donde  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$  y  $Z_{33}$  son las impedancias propias de los circuitos, iguales a la suma de impedancias de las secciones de los circuitos correspondientes:

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 + Z_3, \quad Z_{22} = Z_4 + Z_5 + Z_6 + Z_2, \quad Z_{33} = Z_3 + Z_6 + Z_2, \quad (48.28)$$

y  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$ , etc. son las impedancias mutuas de los circuitos, iguales a las impedancias de las secciones, pertenecientes a dos circuitos. Su signo depende de cómo recorre la sección correspondiente la corriente que es factor de la impedancia mutua, en dirección positiva o negativa con relación a la corriente de contorno para la que se escribe la ecuación. Así, por ejemplo,

$$Z_{12} = -Z_2, \quad Z_{21} = -Z_2, \quad \text{etc.} \quad (48.29)$$

Es fácil ver que

$$Z_{ij} = Z_{ji}. \quad (48.30)$$

Lo expuesto hace casi evidente el hecho de que las ecuaciones (48.27) unen en sí las dos reglas de Kirchhoff. Eso se puede demostrar de manera más estricta si (48.27) se obtiene de las reglas de Kirchhoff (48.21) y (48.22), pasando a las corrientes de contorno. El lector puede intentar ejecutar dichos cálculos algebraicos.

La cantidad de ecuaciones (48.27) para las corrientes de contorno es igual a la cantidad de corrientes incógnitas. El sistema de ecuaciones se resuelve según la regla general con ayuda de la teoría de determinantes:

$$I_1 = U (\Delta_{11}/\Delta), \quad I_2 = U (\Delta_{12}/\Delta), \quad I_3 = U (\Delta_{13}/\Delta), \quad (48.31)$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \quad (48.32)$$

es el determinante del sistema;  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{13}$  son los complementos de los elementos  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  y  $Z_{13}$  en el determinante  $\Delta$ :

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{12} &= - \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{33} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{13} &= \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{31} & Z_{32} \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (48.33)$$

Así pues, el problema queda resuelto. La generalización del método expuesto de corrientes de contorno para una cantidad arbitraria de circuitos elementales es obvia. Únicamente es necesario observar con atención que todos los circuitos elementales sean recorridos en una misma dirección y tomados en consideración en las ecuaciones.

La inductancia y la capacidad caracterizan la propiedad del circuito de acumular la energía en forma de energía de los campos eléctrico y magnético. Ellas «alsan» las curvas de variación de la intensidad de la corriente en comparación con las curvas de variación de la tensión en función del tiempo.

La impedancia tiene en cuenta no sólo la resistencia óhmica del circuito, sino también su inductancia y capacitancia. Siendo una magnitud compleja, la impedancia permite tomar en consideración no sólo la relación entre las amplitudes de la intensidad de la corriente y la tensión, sino también entre sus fases.

A pesar de que para las corrientes alternas las fuerzas electromotrices y las intensidades de las corrientes se representan como magnitudes complejas y, por lo tanto, contienen la fase (y signo), al componer las ecuaciones de Kirchhoff es necesario poner los signos, ya que una misma sección puede pertenecer a diferentes circuitos y ser recorrida, al formar las ecuaciones, en direcciones contrarias. En el método de corrientes de contorno se admite que en todas las secciones de cada circuito cerrado circule una misma corriente, llamada de contorno. La intensidad total de la corriente que recorre la sección del circuito, es igual en este caso a la suma algebraica de las intensidades de las corrientes de contorno, para las cuales dicha sección es común.

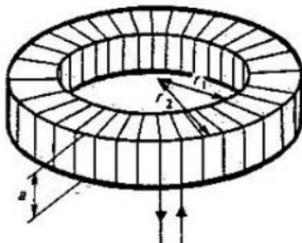


Fig. 195  
Toroide de sección rectangular

¿Cuál es el sentido físico de los criterios casiestacionarios?

¿Qué es lo que determina los signos en las ecuaciones que expresan las reglas de Kirchhoff para las corrientes alternas?

¿Cuáles son las ventajas del método de corrientes de contorno y para qué casos es útil aplicarlo?

**Ejemplo 48.1.** Hallar la autoinducción de  $n$  espiras, devanadas en un toroide de sección rectangular, cuyos radios interior y exterior son  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente y su altura es igual a  $a$  (fig. 195).

Eligiendo a título de contorno de integración  $L_0$  una circunferencia de radio  $r$ , concéntrica con el eje de simetría del toroide y aplicando la ley de la corriente total, obtenemos

$$\oint_{L_0} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \varphi \cdot 2\pi r = \begin{cases} 0 & \text{para } r > r_2, \\ nI & \text{para } r_1 < r < r_2, \\ 0 & \text{para } r < r_1, \end{cases}$$

donde  $I$  es la intensidad de la corriente que recorre el devanado del toroide.

El flujo magnético que abarca una espira es igual a

$$\Phi_1 = \mu a \int_{r_1}^{r_2} H \varphi dr = \frac{\mu a n I}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu a n I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (48.34)$$

de donde la autoinducción es igual a

$$L = (n\Phi_1/I) = [\mu a n^2 / (2\pi)] \ln (r_2/r_1). \quad (48.35)$$

## § 49. Trabajo y potencia de la corriente alterna

*Se deducen las fórmulas del trabajo y la potencia que desarrolla la corriente alterna. Se analizan los fenómenos físicos principales, relacionados con el funcionamiento de los motores eléctricos.*

**Potencia instantánea.** La energía de la fuente de fem exteriores en el circuito con corriente sufre las siguientes transformaciones:

a) se convierte en calor, debido al calentamiento de Joule del conductor [véase (27.4)]. Si en el circuito existe un consumidor que, a cuenta de la energía de la fuente de fem exteriores, efectúa un trabajo mecánico, su potencia se expresa mediante una fórmula, semejante a (27.4). Por eso, supongamos que en el circuito existe sólo una resistencia óhmica  $R$  y la potencia disipada en esta resistencia, la denotamos por  $P_{iR} = I^2 R$ ;

b) se transforma en energía del campo magnético. Dado que la energía del campo magnético se determina por la fórmula (47.5), la potencia, desarrollada por la fuente de fem exteriores para la variación de la energía del campo magnético, es igual a

$$P_{iL} = \frac{dW}{dt} = LI \frac{dI}{dt}. \quad (49.1)$$

Las propiedades inductivas del circuito se caracterizan por la inductancia  $L$ . A diferencia de  $P_{iR}$ , la potencia  $P_{iL}$  puede ser tanto positiva ( $dI/dt > 0$ ), como negativa ( $dI/dt < 0$ ). Esto significa que la fuente de las fem exteriores cede la energía para aumentar la energía del campo magnético y recibe la energía al disminuir la energía del campo magnético;

c) se transforma en energía del campo eléctrico al variar éste. Las propiedades eléctricas del circuito se caracterizan por su capacidad  $C$ . Dado que la energía del condensador, cuyas placas contienen una carga  $Q$ , se determina por la fórmula (18.20d), la potencia de la fuente de fem exteriores para la variación de la energía del campo eléctrico es igual a

$$P_{tC} = \frac{dW}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} I, \quad (49.2)$$

donde  $I = dQ/dt$  es la intensidad de la corriente en el circuito. Esta potencia puede ser tanto positiva, como negativa: al aumentar la intensidad del campo eléctrico, la energía de la fuente de fem exteriores se convierte en energía del campo eléctrico y al disminuir la intensidad, la energía del campo eléctrico se transforma en energía de la fuente de fem exteriores.

La potencia total, disipada por la fuente de fem exteriores en el circuito, es igual a

$$P_t = P_{tR} + P_{tL} + P_{tC}. \quad (49.3)$$

Con frecuencia  $P_t$  se denomina potencia, disipada por la corriente o potencia de corriente. Nosotros haremos uso de esta expresión, pero recordando su carácter convencional. De la misma manera,  $P_{tR}$ ,  $P_{tL}$ ,  $P_{tC}$  se llaman potencias de corriente en la resistencia, inductancia y capacidad. Para mayor evidencia supongamos que la resistencia óhmica, la inductancia y la capacidad están concentradas en distintas partes del circuito (véase la fig. 192).

La fem exterior  $U$  se denomina tensión.

En la resistencia óhmica transcurre el cambio del potencial en  $U_{tR} = IR$ , por eso se ha aceptado denominar  $U_{tR}$  pérdida de tensión en la resistencia. Entre las placas del condensador la diferencia de potencial es  $U_{tC} = Q/C$ . Por eso en el circuito en el condensador la tensión varía en  $U_C$ . En la inductancia surge la fem de autoinducción  $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -L dI/dt$ , para cuya compensación la fuente de fem exteriores gasta una parte correspondiente de la fem exterior ( $U_{tL} = L dI/dt$  es la variación de la tensión en la inductancia).

Por esta razón, las fórmulas (49.1) y (49.2) adquieren el aspecto:

$$P_{tL} = U_{tL}I, \quad P_{tC} = U_{tC}I. \quad (49.4)$$

Entonces [véase (49.3)]

$$P_t = U_{tR}I + U_{tL}I + U_C I = UI. \quad (49.5)$$

Sea que la intensidad de la corriente en el circuito varía según la ley

$$I = I_0 \text{ sen } \omega t. \quad (49.6)$$

Conforme a la fig. 193 para los valores reales de  $U_{tL}$ ,  $U_{tC}$  y  $U_{tR}$  escribimos:

$$U_{tL} = I_0 \omega L \text{ sen } (\omega t + \pi/2), \quad (49.7)$$

$$U_{tC} = [I_0/(\omega C)] \text{ sen } (\omega t - \pi/2), \quad (49.8)$$

$$U_{tR} = I_0 R \text{ sen } \omega t. \quad (49.9)$$

Por consiguiente, las potencias instantáneas, disipadas por la corriente en diversos elementos del circuito, se determinan por las fórmulas:

$$P_{tL} = I_0^2 \omega L \sin \omega t \sin (\omega t + \pi/2) = I_0^2 \omega L \sin \omega t \times \cos \omega t, \quad (49.10)$$

$$P_{tC} = [I_0^2 / \omega C] \sin \omega t \sin (\omega t - \pi/2) = - [I_0^2 / (\omega C)] \sin \omega t \cos \omega t, \quad (49.11)$$

$$P_{tR} = I_0^2 R \sin^2 \omega t, \quad (49.12)$$

que muestran que únicamente en la resistencia  $R$  la potencia de corriente es todo el tiempo positiva, es decir, la corriente efectúa un trabajo positivo. La potencia instantánea, disipada por la corriente en la inductancia y capacidad es de signo variable: una parte de tiempo la corriente realiza un trabajo positivo, es decir, transmite su energía a esos elementos; y otra parte de tiempo es trabajo negativo, o sea, la energía de dichos elementos retorna a la fuente de fem exteriores. De esta manera sucede el intercambio de energía entre las inductancias, capacidades y fuentes de fem exteriores, durante el cual la capacidad e inductancia desempeñan el papel de fuentes de fuerzas electromotrices.

**Potencia media.** Para obtener la potencia media de corriente durante un período de oscilaciones es necesario tomar el valor medio de las expresiones (49.10)–(49.12) respecto al período de oscilaciones de la intensidad de la corriente. En este caso hay que tener en cuenta que

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0, \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2. \quad (49.13)$$

Tomando en consideración (49.13) y partiendo de (49.10) – (49.12), hallamos:

$$P_L = \langle P_{tL} \rangle = 0, \quad (49.14)$$

$$P_C = \langle P_{tC} \rangle = 0, \quad (49.15)$$

$$P_R = \langle P_{tR} \rangle = I_0 R / 2. \quad (49.16)$$

La potencia media se diferencia de cero sólo en la resistencia  $R$ . Las potencias medias en la inductancia y capacidad son nulas, es decir, la corriente en estos elementos no efectúa ningún trabajo, son en término medio, eléctricamente neutros. Por esta razón la resistencia  $R$  se denomina elemento activo del circuito (resistencia óhmica) y la capacidad e inductancia, reactivas.

**Valores efectivos de la intensidad de la corriente y de la tensión.** De la fig. 193 se ve que

$$I_0 R = U_0 \cos \varphi, \quad (49.17)$$

y por eso la fórmula (49.16) puede representarse como

$$P_R = 1/2 I_0 J_0 R = 1/2 I_0 U_0 \cos \varphi, \quad (49.18)$$

dónde  $I_0$ ,  $U_0$ , son las amplitudes de la intensidad de la corriente y de la tensión exterior;  $\varphi$ , la diferencia de fases entre la intensidad de la corriente y la tensión [véase (48.20)] y  $\cos \varphi$ , el factor de potencia, del que depende cuán efectiva es la transmisión de la potencia desde la fuente de corriente al consumidor.

La potencia instantánea de la corriente continua coincide con la media [véase (49.2)]. Puesto que en la corriente continua  $\cos \varphi = 1$ , la fórmula (49.18) puede hacerse idéntica a (27.3) si en lugar de los valores de la amplitud de  $I_0$  y  $U_0$  se usan sus valores efectivos:

$$I_{ef} = I_0/\sqrt{2}, \quad U_{ef} = U_0/\sqrt{2}. \quad (49.19)$$

Entonces

$$P_R = I_{ef}U_{ef}\cos \varphi. \quad (49.20)$$

La utilización de  $I_{ef}$  y  $U_{ef}$  permite examinar la potencia de corriente alterna de modo formal como si no hubiese oscilaciones de la potencia. Únicamente la presencia de  $\cos \varphi$  nos recuerda que se trata de la corriente alterna.

Cuando en la electrotecnia se habla de la intensidad de la corriente alterna y la tensión, se tienen en cuenta sus valores efectivos. Por ejemplo, los amperímetros y voltímetros se gradúan, por lo general, respecto a los valores efectivos. Por esta razón, el valor máximo de la tensión en el circuito de corriente alterna es casi una vez y media mayor que el que muestra el voltímetro. Esto se debe tener presente al calcular los aisladores, al analizar las cuestiones de seguridad, etc.

**Factor de potencia.** Una de las aplicaciones principales de los circuitos de corriente alterna es la transmisión de la energía. Por eso al proyectar las líneas de transmisión es necesario tener en cuenta el  $\cos \varphi$ .

Supongamos que en la línea haya sólo una carga activa. Entonces,  $\cos \varphi = 1$  y la potencia que se transmite a la carga es máxima para  $I_{ef}$  y  $U_{ef}$  prefijadas. Si en el circuito se conecta una carga reactiva, por ejemplo, una inductancia, el  $\cos \varphi$  se hace inferior a la unidad y para asegurar la transmisión se deberá aumentar respectivamente  $I_{ef} U_{ef}$ , es decir, suministrar una corriente mayor al consumidor de energía por medio de la línea de transmisión. Ello conduce al incremento de las pérdidas de energía en calor de Joule en la línea de transmisión. Por eso se tiende siempre a distribuir las cargas de manera que  $\varphi \approx 0$ , o sea,  $\cos \varphi \approx 1$ .

Examinemos, verbigracia, la línea de transmisión para alimentar una bombilla (fig. 196) cuando en el circuito se acoplan en serie con la bombilla una inductancia grande y una capacidad variable. Sea en el momento inicial la capacitancia nula ( $C = \infty$ ). En este caso para valores de  $L\omega$  suficientemente grandes en comparación con la resistencia  $R$  de la bombilla, el ángulo  $\varphi$  alcanza valores próximos a  $\pi/2$  y  $\cos \varphi$  es muy pequeño. Por eso, incluso si el valor absoluto de  $U_{ef}$  en el circuito es bastante grande, de la bombilla se desprende una potencia muy pequeña, por lo que arde sin brillo o incluso no arde. Al disminuir la capacidad  $C$ , el factor de potencia crece (el ángulo  $\varphi$  disminuye, aproximándose a cero) y comienza a aumentar el caldeo de la bombilla. La tensión efectiva en los bornes del generador permanece invariable y la potencia que transmite el generador a la línea, crece. Así pues, el aumento del factor de potencia, introduciendo cargas reactivas que no consumen potencia alguna  $\sigma$ , como se llaman, cargas desvatadas, en el circuito permite mejorar la eficacia del funcionamiento de la línea de transmisión.

**Motores eléctricos.** Una de las aplicaciones más importantes de la corriente eléctrica es la transformación de la energía que transmite en trabajo mecánico que efectúan los motores eléctricos. Su funcionamiento se basa en el empleo de la fuerza de Ampère que actúa sobre el conductor con corriente en un campo magnético. El primer motor eléctrico que dio origen al empleo de la electricidad para producir trabajo, fue construido en 1839 por B. S. Jacobi (1801—1874).

Para aclarar la parte principal del asunto estudiemos el motor más sencillo de corriente continua (fig. 197). La fuente de la fuerza electromotriz constante

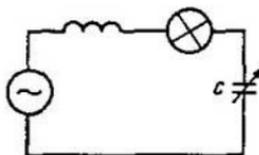


Fig. 196  
Elevación del factor de potencia

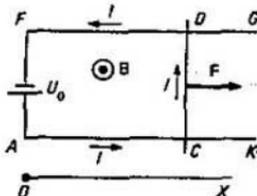


Fig. 197  
Esquema de funcionamiento de un motor eléctrico elemental

$U_0$  se conecta al circuito  $ACDFA$ . Un conductor rectilíneo  $DC$  puede deslizarse a lo largo de los conductores  $FG$  y  $AK$ . El se encuentra en un campo magnético homogéneo, cuya inducción está dirigida hacia arriba respecto al plano del diseño. Cuando la corriente recorre este conductor, sobre él actúa la fuerza de Lorentz  $F = I l B$ . Influido por ella, el conductor se mueve y realiza un trabajo mecánico, o sea, efectúa la función de motor eléctrico.

Examinemos el balance de energías. Al desplazar el conductor a  $dx$ , se realiza un trabajo

$$dA = F dx = I l B dx \quad (49.21)$$

y, por lo tanto, la potencia es igual a

$$P_m = dA/dt = I l v, \quad (49.22)$$

donde

$$v = dx/dt \text{ es la velocidad del conductor.}$$

Por otra parte, al moverse el conductor en el circuito surge una fuerza electromotriz de inducción

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{-d\Phi}{dt} = -\frac{I l B dx}{dt} = -I l v, \quad (49.23)$$

dirigida contra la fuerza electromotriz exterior que genera las corrientes y efectúa el trabajo en superar la acción de la fuerza (49.23). La potencia que gasta en este caso la fuente de fem exteriores es igual a

$$P_{\text{ext}} = \mathcal{E}^{\text{ind}} I = -I l v I. \quad (49.24a)$$

La comparación de (49.24) con (49.22) muestra que *toda la potencia que desarrolla el motor eléctrico se abastece por la fuente de fem exteriores*. Además de las potencias útiles (49.22), la fuente de fem exteriores desarrolla una potencia que se gasta para liberar el calor de Joule en la resistencia óhmica de los cables, por los que circula la corriente, y en la resistencia interna de la fuente. Designando por  $R$  la resistencia óhmica sumaria de los cables y la resistencia interna de la fuente, obtenemos el siguiente balance de tensiones para un circuito cerrado (la primera regla de Kirchhoff):

$$IR = U_0 + \mathcal{E}^{\text{ind}} = U_0 - lBv. \quad (49.24b)$$

Multipliquemos los dos miembros de dicha igualdad por  $I$ :

$$I^2R = U_0I - IlBv = U_0I - P_m, \quad (49.25)$$

donde se ha hecho uso de la expresión (49.22). Es útil escribir la fórmula (49.25) en definitiva como

$$P_F = IU_0 = I^2R + P_m, \quad (49.26)$$

es decir, la potencia que desarrolla la fuente de fem exterior, se gasta en liberar el calor de Joule con una potencia  $I^2R$  y el trabajo del motor eléctrico de potencia  $P_m$ .

Para la corriente alterna el cálculo del balance de energías es algo más complicado, pero la esencia física queda siendo la misma.

**Motores sincrónicos.** Para asegurar la continuidad de funcionamiento del motor es necesario crear cierto régimen periódico. El circuito más sencillo es el que se muestra en la fig. 197, en el que la inducción cambia periódicamente con el tiempo.

Después de que el conductor  $CD$  se desplace a cierta distancia a la derecha y efectúe un trabajo determinado, la dirección de la inducción se hace inversa. Para una misma orientación de la corriente la fuerza  $F$  cambia también su dirección por la contraria. Después de ello, el conductor se decelera y comienza a moverse hacia la izquierda, realizando de nuevo un trabajo, etc. En definitiva, se obtiene un motor eléctrico, cuya parte de funcionamiento (conductor  $CD$ ) se mueve de modo sincrónico con un campo magnético exterior variable. Semejante motor se denomina sincrónico. En el circuito indicado se puede, claro está, dejar la inducción constante y cambiar periódicamente la dirección de la corriente en el circuito en movimiento. En este caso el movimiento del conductor va a transcurrir de modo sincrónico, variando la corriente en él. Este motor es también sincrónico. También se puede cambiar simultáneamente de una manera correspondiente la intensidad de corriente en el conductor y la inducción, ejecutando de manera sincrónica con ellas un movimiento correspondiente del conductor  $CD$ .

Los motores sincrónicos que se usan en la técnica, funcionan en principio de la misma manera que el motor esquemático. Además en la técnica se utilizan las tres posibilidades de realizar el motor sincrónico. Sin embargo, la realización efectiva de estos circuitos, sencillos en lo fundamental, se confeccionan con construcciones bastante complejas. Por regla general, se usa el movimiento giratorio.

La fig. 198 representa el circuito más simple de funcionamiento del motor sincrónico con movimiento rotatorio. En un campo magnético constante se encuentra un cuadro que recorre la corriente alterna. Las fuerzas de Lorentz que actúan sobre los conductores del cuadro, perpendiculares a la inducción del campo magnético, crean un momento rotatorio, bajo la acción del cual el cuadro gira. Para que ese momento actúe todo el tiempo en una misma dirección la frecuencia de rotación del cuadro debe ser igual a la frecuencia de la corriente alterna que circula por él, es decir, debe observarse la condición de sincronismo. Pue-

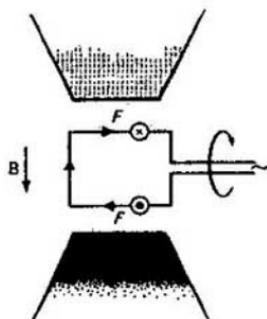


Fig. 198  
Circuito de funcionamiento de un motor sincrónico

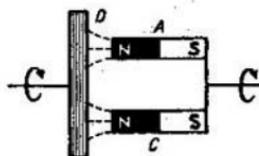


Fig. 199  
Esquema de aparición de momento de rotación en un motor asíncrono

den realizarse también tales circuitos de los motores cuando la frecuencia de rotación del cuadro sea en una cantidad entera de veces inferior a la frecuencia de la corriente alterna que alimenta el motor eléctrico.

Los defectos principales de los motores sincrónicos son la dificultad de ponerlos en marcha, cuando la frecuencia de rotación del cuadro se hace sincrónica con la frecuencia de la corriente alterna y puede desaparecer el sincronismo al aumentar bruscamente la carga. En la técnica se elaboraron procedimientos para superar con bastante eficacia dichos defectos.

**Motores asíncronos.** El campo magnético que varía según la ley de la inducción electromagnética de Faraday crea un campo eléctrico [véase (46.5)]. Si en el conductor existe semejante campo rotacional, surgen las correspondientes corrientes eléctricas, cuya densidad en cada punto del conductor se determina por la ley de Ohm ( $j = \gamma E$ ). Estas corrientes están en interacción con el campo magnético. Por consiguiente, el campo magnético alternativo no sólo crea en el conductor corrientes, sino que actúa sobre él con las fuerzas correspondientes.

Imaginémonos que el campo magnético alternativo se origina por los imanes A y C que están sujetos en un eje y pueden girar alrededor de él bajo la acción del momento de fuerzas exterior (fig. 199). El disco D, hecho de un conduc-

tor continuo, se fija también en el eje y puede girar a su alrededor. Al moverse los imanes, en cada punto del disco  $D$  existe un campo magnético alternativo y surge una densidad correspondiente de corriente, sobre la que actúa la fuerza de Ampère por parte del campo magnético. Así pues, sobre el disco  $D$  por parte de los imanes en rotación actúan fuerzas determinadas. Calculemos el efecto resultante de dichas fuerzas. Según la ley de Lenz, las corrientes que aparecen en el conductor merced a la inducción electromagnética de Faraday, tienden a disminuir la acción de los factores que las provocan. En el caso dado el factor que provoca las corrientes de inducción en el disco  $D$  es el movimiento relativo del

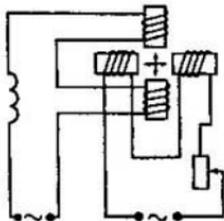


Fig. 200  
Esquema de la instalación para crear un campo magnético giratorio

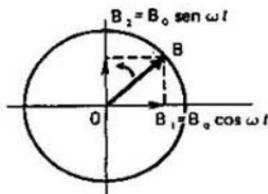


Fig. 201  
Adición de dos oscilaciones armónicas mutuamente perpendiculares con una diferencia de fases de  $\pi/2$

imán y del disco. Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre el disco, deben tender a reducir la velocidad respecto al movimiento del imán y del disco. Esto significa que al disco debe aplicarse un momento de fuerzas que tiende a hacer girarlo en la misma dirección en que giran los imanes. Por esta razón, el disco comienza a rotar en dirección del movimiento de los imanes, como si se atrajese por el campo en rotación de los imanes. El momento de fuerzas existe sólo cuando la velocidad angular de rotación de los imanes se diferencia de la de rotación del disco, o sea, entre el campo magnético en rotación y el disco existe un «deslizamiento». Cuanto menor sea éste, menor será el momento de fuerzas que actúan sobre el disco. Por eso, al aumentar la carga sobre el eje del disco, crece el «deslizamiento». Para la velocidad constante de rotación del campo magnético y de su inducción la velocidad de rotación del disco se reduce.

Este mecanismo de poner el disco en rotación es la base principal del funcionamiento de los motores asíncronos. Pero para que el motor pueda denominarse motor eléctrico, es necesario asegurar la rotación del campo magnético sin usar la transmisión mecánica. Con este fin se usan los imanes eléctricos que se alimentan de corriente alterna.

Creación de un campo magnético giratorio. Dos imanes eléctricos que originan campos magnéticos mutuamente perpendiculares (fig. 200), se alimentan de una corriente alterna con diferencia de fases  $\pi/2$ . En el circuito (fig. 200) esto se logra en gran medida introduciendo en el circuito imanes eléctricos de

inductancia  $L$  y resistencia  $R$ . Como resultado de ello, en el espacio entre los polos de los imanes se forman dos campos magnéticos alternativos, cuyas inducciones varían por una ley armónica con diferencia de fases, próxima a  $\pi/2$ . La suma de las inducciones  $B_1$  y  $B_2$  de estos campos es el vector  $B$  que gira alrededor del punto  $O$  (fig. 201).

Si en el espacio entre los imanes (fig. 200) se coloca un conductor masivo, por ejemplo, un cilindro con el eje de rotación perpendicular al plano de la figura, en el campo giratorio él girará en la dirección de rotación del campo. Los procesos físicos que transcurren son semejantes a los que se realizan al crear el campo por medio de imanes permanentes en rotación. En lugar de un cilindro continuo se usa un rotor cortocircuitado (fig. 202).

*El campo magnético giratorio es más cómodo crearlo con ayuda de corriente trifásica, ya que en este caso no se requiere crear artificialmente una diferencia de fases entre las intensidades de las corrientes que alimentan distintos imanes eléctricos (véase el § 52).*

Está claro que la velocidad de rotación del motor asincrónico puede variar continuamente, sin estar en alguna relación múltipla con la frecuencia de la corriente de alimentación, por eso el motor se denomina *asincrónico*. La posibilidad de variar continuamente la velocidad de rotación es una de sus ventajas más esenciales.

La intensidad de la corriente en los devanados del imán eléctrico depende del «deslizamiento»: cuanto mayor es éste, tanto mayor es la intensidad de la corriente. Por eso en el momento de puesta en marcha, cuando el deslizamiento es máximo, por los devanados del motor pasa una corriente muy fuerte que les puede deteriorar. Para evitar eso, al circuito de alimentación se introduce un reóstato regulador que se pone en el momento de conexión en una resistencia bastante grande. A medida de aumentar la frecuencia de rotación del motor, se reduce la resistencia del reóstato.

Lo mismo que en el caso de los motores sincrónicos, la ejecución técnica de los motores asincrónicos se caracteriza por la gran variedad y no es una tarea sencilla. No obstante, incluso en las construcciones más complejas los principios fundamentales permanecen invariables.

Los motores asincrónicos pueden funcionar no sólo cuando el campo magnético es giratorio, sino cuando es pulsante. Esto es evidente si se toma en consideración que el campo pulsante es equivalente a dos campos que giran en direcciones contrarias. Uno de los campos asegura la rotación del rotor del motor asincrónico, mientras que el campo con dirección de rotación contraria no ejerce, en término medio, influencia alguna sobre la rotación del rotor.

**Adaptación de la carga al generador.** Un generador de corriente alterna que origina la fuerza electromotriz, posee por sí mismo cierta resistencia interna, capacidad e inductancia, es decir, posee una impedancia determinada:

$$Z_g = R_g + iX_g, \quad (49.27)$$

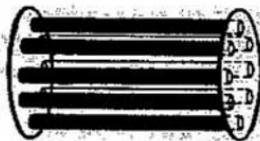


Fig. 202.  
Inducido en cortocircuito de un motor asincrónico

donde  $R_g$  es la resistencia óhmica y  $X_g$ , la reactancia que es en sí la diferencia entre la inductancia y la capacitancia. La carga para la que trabaja el generador, se caracteriza también por la impedancia:

$$Z_c = R_c + iX_c, \quad (49.28)$$

con la particularidad de que la potencia se disipa sólo en la resistencia óhmica  $R_c$ . En el circuito el generador y la carga se unen en serie,  $U_g$  es la fuerza electromotriz del generador.

La potencia que se desarrolla en la carga  $R_c$ , conforme a la fórmula (49.16), es

$$P_c = 1/2 I_0^2 R_c, \quad (49.29)$$

donde  $I^2$  es el cuadrado de la amplitud de la intensidad de la corriente que circula por la carga. Basándose en (48.19b), tenemos

$$I_0^2 = |I|^2 = \frac{|U_g|^2}{|Z_g + Z_c|^2} = \frac{|U_g|^2}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2}. \quad (49.30)$$

Con ayuda de esta ecuación escribamos la fórmula (49.29) así

$$P_c = \frac{|U_g|^2}{2} \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2}. \quad (49.31)$$

Aclaremos para qué condiciones esta potencia es máxima.

Las reactancias  $X_g$  y  $X_c$  pueden tomar tanto valores positivos, como negativos. Es obvio que para lograr la potencia máxima en (49.31), es necesario que se cumpla la condición

$$X_g + X_c = 0. \quad (49.32)$$

Eso significa que el factor de potencia debe tener el valor máximo ( $\cos \varphi = 1$ ). Al observar la condición (49.32), la expresión (49.31) adquiere el aspecto

$$P_c = \frac{|U_g|^2}{2} \frac{R_c}{(R_g + R_c)^2}. \quad (49.33)$$

La potencia cambia al variar la resistencia óhmica de la carga, alcanzando el máximo a condición  $\partial P_c / \partial R_c = 0$ , es decir, cuando

$$R_c = R_g. \quad (49.34)$$

Si se observan las condiciones (49.32) y (49.34), *el generador entrega a la carga la potencia máxima. En este caso se dice que la carga está adaptada totalmente al generador.*

Teniendo en cuenta (49.34), la potencia máxima, disipada por la carga del generador, es igual a

$$P_{c \text{ máx}} = \frac{|U_g|^2}{2} \frac{1}{4R} = \frac{\langle U_g^2 \rangle}{4R}, \quad (49.35)$$

donde  $\langle U_g^2 \rangle$  es el cuadrado medio de la amplitud de la tensión del generador.

Las cuestiones de la adaptación de la carga al generador tienen gran importancia en todos los casos cuando se necesita transmitir a la carga una potencia máxima. Verbigracia, la resistencia de entrada del receptor debe estar adaptada a la resistencia de la antena (generador) y de la línea de transmisión (véase el § 54).

**Corrientes de Foucault.** *Las corrientes de inducción que surgen en los conductores masivos en un campo magnético alternativo, se denominan corrientes de Foucault.* A veces desempeñan un papel útil, pero en algunas ocasiones, son nocivas.

Las corrientes de Foucault son útiles en el rotor del motor asincrónico que se pone en movimiento por medio de un campo magnético giratorio, ya que la misma ejecución del principio de funcionamiento del motor asincrónico requiere la aparición de dichas corrientes. Siendo corrientes de conducción, las corrientes de Foucault disipan parte de la energía en liberar el calor de Joule. Dicha pérdida de energía en el rotor del motor asincrónico es infructuosa, pero hay que conformarse con ella, evitando únicamente el calentamiento excesivo del rotor. Pero al mismo tiempo en los núcleos de los imanes eléctricos del motor asincrónico, hechos por lo general de material ferromagnético, por lo que son conductores, surgen también las corrientes de Foucault que no tienen nada que ver con el principio de funcionamiento de los imanes, pero calientan los núcleos, empeorando con ello sus características. Ellas deben eliminarse como factores perjudiciales. Se eliminan, confeccionando los núcleos en forma de placas finas, separadas la una de la otra con capas de aislador, con la particularidad de que se colocan de tal manera que las corrientes de Foucault atraviesen las placas. Merced a ello, siendo el grosor de las placas bastante pequeño, las corrientes de Foucault no pueden desarrollarse y por eso poseen una densidad volumétrica pequeña.

El calor de Joule que desprenden las corrientes de Foucault se aplica con utilidad durante el calentamiento o incluso la fundición de los metales, cuando eso resulta más ventajoso o más útil en comparación con otros métodos de calentamiento. Si el metal se calienta usando corriente de frecuencia muy alta, debido al efecto pelicular (véase el § 53), se calienta al rojo sólo la capa superficial del conductor.

La potencia instantánea que desarrolla la corriente en las inductancias y capacidades, es de signo variable y en la resistencia, es positiva.

## § 50. Resonancias en el circuito de corriente alterna

*Se examinan las resonancias en el circuito de corriente alterna y las propiedades del circuito oscilante.*

**Resonancia en serie.** Examinemos un circuito en el que se conectan en serie con el generador  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (véase la fig. 192) y determinemos la dependencia del valor de la amplitud de la intensidad de la corriente  $I_0$  y la diferencia de fases  $\varphi$

entre la corriente y la tensión exterior con respecto a la frecuencia. Basándose en (48.18) y (48.20), tenemos:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + |L\omega - 1/(\omega C)|^2}}, \quad (50.1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (50.2)$$

Las gráficas de las dependencias de  $I_0(\omega)$  y  $\varphi(\omega)$  se representan en las figs. 203 y 204. La intensidad de la corriente  $I_0$  alcanza el valor máximo para la frecuencia

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (50.3)$$

que se denomina frecuencia de resonancia del circuito. Aquí la amplitud de la intensidad de la corriente es igual a  $U_0/R$  y la diferencia de fases  $\varphi = 0$ , o sea,

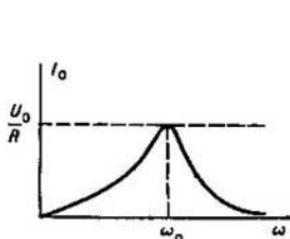


Fig. 203  
Dependencia entre la intensidad de la corriente y la frecuencia para la resonancia en serie

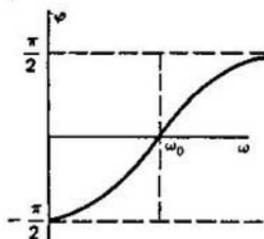


Fig. 204  
Dependencia entre el desfase  $\varphi$  y la frecuencia para la resonancia en serie

resulta como si el circuito no tuviera ni capacidad, ni inductancia. Con otras palabras, para esa frecuencia las tensiones en la capacidad e inductancia se compensan por completo mutuamente, siendo iguales de valor (siempre son contrarias según la fase). Por eso dicha resonancia se llama también **resonancia de tensión** o con más frecuencia, **resonancia en serie**. El diagrama vectorial de la resonancia en serie se da en la fig. 205. Durante la resonancia ( $\omega = \omega_0$ ) el circuito se comporta como una resistencia puramente óhmica.

Si por el circuito circula una corriente de frecuencia constante  $\omega$ , al cambiar, por ejemplo, la inductancia,  $I_0$  tiene también un carácter de resonancia de la variación. El valor máximo de  $I_0$  se alcanza para  $L = 1/(\omega^2 C)$  [véanse (50.1) y (50.3)]. Si se conecta una bombilla en el circuito, su brillo aumenta al aproximarse a la resonancia, alcanzando el máximo en la resonancia, y después disminuye.

**Resonancia en paralelo.** Examinemos el circuito representado en la fig. 206. Es obvio que la intensidad de la corriente que circula por el circuito es

igual a

$$I = I_L + I_C = U \left( \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \right) = U \left( \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C \right) = \\ = U \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - i \frac{U}{R^2 + \omega^2 L^2} \left[ \omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2) \right]. \quad (50.4)$$

Por consiguiente, para la condición

$$\omega L - \omega C (R^2 + \omega^2 L^2) = 0 \quad (50.5)$$

el circuito se comporta como una resistencia puramente óhmica. El desfase entre la tensión exterior y la intensidad de la corriente es igual a cero. Al dividir

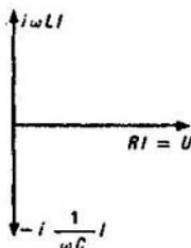


Fig. 205  
Diagrama vectorial de las tensiones para la resonancia en serie

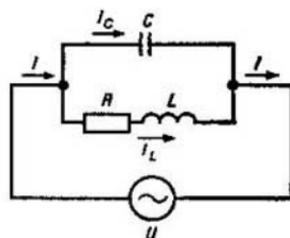


Fig. 206  
Circuito en el que se efectúa la resonancia en paralelo

todos los términos de la ecuación (50.5) por  $\omega^2 LC$ , la escribimos en la forma

$$\frac{1}{\omega C} - \omega L = \frac{R^2}{\omega L}. \quad (50.6)$$

En la mayoría de los casos importantes en la práctica se observa la condición  $\omega L \gg R$  y por eso la solución de las ecuaciones (50.5) y (50.6) puede representarse como

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (50.7)$$

Para esta frecuencia de resonancia la impedancia alcanza su valor máximo y la intensidad de corriente  $I_0$  en el circuito, el valor mínimo. Sin embargo, las intensidades de corriente  $I_L$  y  $I_C$  en este caso no son mínimas. El diagrama vectorial de las intensidades de corrientes en el circuito se da en la fig. 207. Al aproximarse a las condiciones de resonancia, el diagrama de corrientes adquiere la forma mostrada en la fig. 208. Así pues, dentro del circuito circulan corrientes muy grandes en comparación con las que se suministran a dicho circuito. La carga dentro del circuito pasa de la capacidad a la inductancia y viceversa, o sea, en este circuito tiene lugar la oscilación de la intensidad de la corriente. Las intensidades de las corrientes en la capacidad e inductancia se encuen-

tran en resonancia como se ve de la fig. 208. Ellas se compensan mutuamente. Por eso la propia resonancia se denomina resonancia de corriente o con más frecuencia, resonancia en paralelo.

**Circuito oscilante.** En ambos casos examinados el circuito, mostrado en la fig. 192, se comporta como un sistema de resonancia que efectúa oscilaciones forzadas bajo la influencia de la fuerza exterior. En 1853 Thomson por primera vez estudió las oscilaciones de la corriente en un circuito  $LC$ . Fue entonces cuando obtuvo la fórmula (50.7), llamada posteriormente **fórmula de Thomson** ( $T = 2\pi\sqrt{LC}$ ). Para analizar las oscilaciones de la intensidad de la corriente

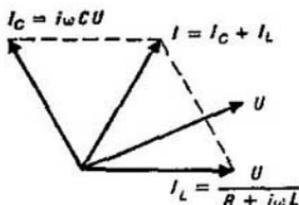


Fig. 207  
Diagrama vectorial de las corrientes en el circuito con capacidad e inductancia acopladas en paralelo

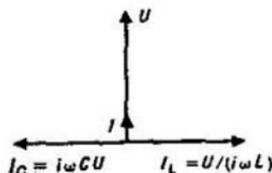


Fig. 208  
Diagrama vectorial de las corrientes para la resonancia en paralelo

se puede directamente utilizar los resultados de la teoría de las oscilaciones mecánicas forzadas de un punto. Con este fin es necesario aclarar qué magnitudes en las oscilaciones eléctricas corresponden a la fuerza, desviación y velocidad para las oscilaciones mecánicas. Escribamos la ecuación para las oscilaciones mecánicas forzadas:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m, \quad (50.8)$$

donde  $x$  es la desviación del punto respecto a la posición de equilibrio;  $m$ , su masa;  $F$ , la fuerza exterior;  $\gamma = b/(2m)$ , el decremento del amortiguamiento y  $b$ , el coeficiente de fricción. Los puntos significan las derivadas respecto al tiempo.

Ahora transformemos las ecuaciones (48.12) y (48.13) para el circuito eléctrico. Tomando en consideración que  $\theta I = dQ/dt$ , escribamos (48.12) como

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U. \quad (50.9)$$

Al dividir los dos miembros de (50.9) por  $L$ , recibimos la ecuación

$$\ddot{Q} + (R/L) \dot{Q} + [1/(LC)] Q = U/L, \quad (50.10)$$

semejante a (50.8). El papel de la desviación en el circuito eléctrico lo desempeña la carga  $Q$  en las placas del condensador, el papel de masa, la inductancia  $L$ , el papel de fuerza, la fuerza electromotriz  $U$  y el papel de coeficiente de fricción,

la resistencia óhmica  $R$ . La frecuencia de las oscilaciones naturales del circuito es igual a  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  [véase (50.3)]. La intensidad de corriente  $I = -dQ/dt$  desempeña el papel de velocidad. Dado que para las oscilaciones mecánicas de un punto se estudian por lo general su desviación respecto a la posición de equilibrio, la amplitud de las oscilaciones, etc., a analizar las oscilaciones eléctricas es cómodo hacer uso de la ecuación (50.10), en vez de (48.13). Además, en lugar de la carga  $Q$  en las placas del condensador es útil emplear la tensión en el condensador ( $U_C = Q/C$ ). Respecto a esta magnitud la ecuación (50.10) adquiere el aspecto

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 U, \quad (50.11)$$

donde  $\gamma = R/(2L)$  y  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Todas las propiedades de estas oscilaciones se obtienen mediante una simple comparación de las magnitudes  $\gamma$ ,  $\omega_0$ ,  $U$ ,  $U_C$  del circuito oscilante eléctrico con las magnitudes correspondientes que caracterizan las oscilaciones mecánicas del punto. En ausencia de resistencia ( $R = 0$ ) la frecuencia de las oscilaciones naturales del circuito es igual a  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ . Las oscilaciones son no amortiguadas. En presencia de resistencia óhmica las oscilaciones se hacen amortiguadas, con la particularidad de que la duración del amortiguamiento es igual a

$$\tau_{am} = 1/\gamma = 2L/R. \quad (50.12)$$

A título de frecuencia de las oscilaciones no amortiguadas, en el sentido convencional usual, se toma la frecuencia

$$\pi = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (50.13)$$

El decremento logarítmico de amortiguamiento es igual a

$$\Theta = \gamma T, \quad (50.14)$$

donde  $T = 2\pi/\omega_0$  es el período de las oscilaciones naturales.

Las curvas de resonancia de amplitud y de fase son semejantes a las curvas correspondientes para las oscilaciones mecánicas.

El factor  $Q$  se determina por la igualdad

$$Q = \left| \frac{U_{C \text{ res}}}{U_{C \text{ est}}} \right| = \frac{U_{C \text{ 0 res}}}{U_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (50.15)$$

donde  $U_{C \text{ 0 res}}$  es la amplitud de la tensión en el condensador durante la resonancia;  $U_0$ , la amplitud de la fem exterior, aplicada al circuito. Así pues, en un circuito con buen factor  $Q$  la amplitud de oscilaciones de tensión en el condensador puede ser mucho mayor que la amplitud de la tensión, suministrada al circuito.

La anchura de la curva de resonancia es

$$2\Delta\omega = \omega_0/Q = R/L. \quad (50.16)$$

Recordemos que la anchura  $2\Delta\omega$  de la curva de resonancia no se determina respecto a la amplitud de oscilaciones, sino respecto al cuadrado de la amplitud.

## § 51. Circuitos con inducción mutua

*Se exponen los métodos principales del cálculo de los circuitos. Se examina el funcionamiento del transformador.*

**Papel de la inducción mutua.** Cada uno de los circuitos, recorrido por la corriente alterna, es una fuente de un campo magnético alternativo. Según la ley de la inducción electromagnética de Faraday, este campo induce en otros circuitos que se encuentran en dicho campo, fuerzas electromotrices que cambian la intensidad de la corriente en los mencionados circuitos. De esta manera, los circuitos resultan estar ligados entre sí mediante la inducción electromagnética.

**Ecuaciones para el sistema de conductores, teniendo en cuenta la auto-inducción e inducción mutua.** El flujo magnético total que atraviesa el  $k$ -ésimo circuito se define por la expresión

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^N L_{ki} I_i, \quad (51.1)$$

que es una generalización directa de las fórmulas (47.6) y (47.10) para el caso de muchos circuitos con corriente, basándose en el principio de superposición. Aquí  $L_{kk}$  es la inductancia del  $k$ -ésimo circuito y  $L_{ki}$  para  $k \neq i$  es la inductancia mutua de los circuitos  $k$ -ésimo e  $i$ -ésimo. La cantidad total de conductores es  $N$ .

Para simplificar supongamos que en los circuitos no hay capacidades. Entonces, teniendo en cuenta la inducción magnética para la intensidad de la corriente en el  $k$ -ésimo circuito obtenemos la ecuación

$$I_k R_k = U_k - d\Phi_k/dt, \quad (51.2)$$

donde  $U_k$  es la fuerza electromotriz exterior en el  $k$ -ésimo circuito. Poniendo (51.1) en (51.2), obtenemos para definir la intensidad de la corriente en todos los circuitos, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$I_k R_k = U_k - \sum_{i=1}^N L_{ki} \frac{dI_i}{dt} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (51.3)$$

Este sistema lineal de  $N$  ecuaciones para  $N$  incógnitas que son las intensidades de las corrientes  $I_k$ , es completo y, en principio, siempre se puede resolver. El único problema no trivial es la definición de las inductancias mutuas y las inductancias de los circuitos. En las ecuaciones (51.3) estas magnitudes se consideran conocidas.

**Caso de dos circuitos.** Examinemos como ejemplo el sistema de ecuaciones para dos circuitos:

$$I_1 R_1 = U_1 - \left( L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} \right), \quad (51.4)$$

$$I_2 R_2 = U_2 - \left( L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} \right), \quad (51.5)$$

donde  $L_{11}$  y  $L_{22}$  son las inductancias de los circuitos primero y segundo y  $L_{12}$  y  $L_{21}$ , las inductancias mutuas de los circuitos.

La solución sucesiva será bastante sencilla si se examina la situación que se realiza con una precisión suficiente en el transformador de corriente alterna (fig. 209).

**Transformador.** En el transformador existen dos conductores, devanados en forma de bobinas sobre un núcleo cerrado hecho de material con gran permeabilidad magnética, merced a lo cual los flujos de inducción magnética, originados por las corrientes que recorren los conductores, están concentrados por completo prácticamente dentro del núcleo. Los conductores se denominan devanados del transformador. El devanado al que se conecta la fuente de fem exteriores se denomina primario y el devanado al que se la une la carga, secundario.

Las magnitudes, referentes al primario y secundario, se denotan con los índices 1 y 2, respectivamente. Escribamos las ecuaciones (5.2) en la forma:

$$I_1 R_1 = U_1 - d\Phi_1/dt, \quad (51.6)$$

$$I_2 R_2 = -d\Phi_2/dt, \quad (51.7)$$

donde  $R_1$  es la resistencia óhmica del primario;  $R_2$ , la suma de las resistencias óhmicas del secundario y la carga que para simplicidad se considera puramente óhmica;  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , los flujos totales de inducción magnética que abarcan el primario y el secundario, respectivamente;  $U_1$ , la fem exterior, suministrada al primario.

La resistencia  $R_1$  del primario es bastante pequeña y la caída de tensión en ella debido a la resistencia óhmica puede considerarse mucho menor que  $U_1$ , es decir,  $I_{10} R_1 \ll U_{01}$ , donde  $I_{10}$  y  $U_{10}$  son las amplitudes de la intensidad de la corriente y de la tensión en el primario. Por eso en la relación (51.6) se puede menospreciar el producto  $I_0 R_1$  en comparación con  $U_1$  y escribir como

$$U_1 = d\Phi_1/dt. \quad (51.8)$$

En condiciones normales la resistencia óhmica de la carga es mucho mayor que la resistencia óhmica del secundario. Por eso  $R_2$  en (51.7) es igual con gran precisión a la resistencia de la carga. Por lo tanto,  $I_2 R_2$  en el primer miembro de (51.7) es igual a la tensión  $U_2$  en los bornes del secundario del transformador. Por esta razón, (51.7) puede escribirse de la siguiente manera:

$$U_2 = -d\Phi_2/dt. \quad (51.9)$$

Dado que la fem exterior varía según la ley armónica [ $U_1 \sim \exp(i\omega t)$ ], todas las magnitudes cambian según la misma ley. Por lo tanto,  $d\Phi_1/dt = i\omega\Phi_1$ ,  $d\Phi_2/dt = i\omega\Phi_2$ . Puesto que todo el flujo de inducción magnética está concentrado dentro del núcleo, cada una de las espiras del primario y secundario abarca un mismo flujo magnético  $\Phi_0$ . Por lo tanto, los flujos que abarcan el primario

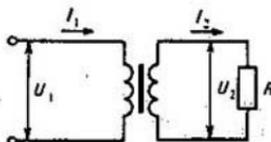


Fig. 209  
Transformador

y secundario, son iguales a

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \quad (51.10)$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 N_2, \quad (51.11)$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son la cantidad de espiras del primario y secundario, respectivamente. Teniendo en cuenta (51.10) y (51.11), las ecuaciones (51.8) y (51.9) toman el aspecto:

$$U_1 = i\omega N_1 \Phi_0, \quad (51.12)$$

$$U_2 = -i\omega N_2 \Phi_0. \quad (51.13)$$

Después de dividir miembro a miembro las ecuaciones (51.12) y (51.13) y de pasar a los módulos, obtenemos

$$|U_1|/|U_2| = N_1/N_2. \quad (51.14)$$

Teniendo en cuenta que  $|U_1| = U_{01}$ ,  $|U_2| = U_{02}$  son las amplitudes de la tensión en el primario y secundario, escribimos (51.14) en la forma

$$U_{01}/N_1 = U_{02}/N_2, \quad (51.15)$$

es decir, la amplitud de la tensión en el secundario es tantas veces mayor (menor) que la amplitud de la tensión en el primario, en cuantas veces el número de espiras del secundario supera (es inferior) a la cantidad de espiras del primario.

Si se menosprecian las pérdidas de energía en el transformador, el principio de conservación de energía tiene el aspecto

$$I_1 U_1 = I_2 U_2. \quad (51.16)$$

Pasando en (51.16) a los módulos, obtenemos a base de (51.15) la relación

$$I_{10} N_1 = I_{20} N_2, \quad (51.17)$$

donde  $I_{10}$  e  $I_{20}$  son las amplitudes de la intensidad de las corrientes en el primario y secundario.

Las fórmulas (51.15) y (51.17) describen la ley de transformación de las amplitudes de las tensiones y las intensidades de las corrientes en el transformador. Son válidas estrictamente para un transformador ideal, en el que no hay disipación del flujo magnético y pérdidas de energía. Para un transformador real se observan con gran precisión.

**Diagrama vectorial de la marcha en vacío del transformador.** El funcionamiento del transformador con el secundario abierto es la marcha en vacío. Menospreciemos el retardo de la fase del flujo de inducción magnética en comparación con la fase de la intensidad de la corriente en el primario a causa de cierta inercia de la remagnetización del material del núcleo. Este retardo es despreciablemente pequeño. Por eso puede considerarse que el flujo coincide en fase con la corriente en el primario, denominada corriente en vacío. La corriente en el secundario es nula. De la fórmula

$$U^{\text{ind}} = -d\Phi/dt \quad (51.18)$$

se desprende que  $U_1^{ind}$  retarda en  $\pi/2$  del flujo  $\Phi$ . Por esta razón, el diagrama vectorial de un transformador en vacío tiene la forma dada en la fig. 210:  $U_1$  es la tensión exterior, aplicada al primario;  $U_1^{ind}$ , la tensión en el primario como consecuencia de la autoinducción;  $U_2^{ind}$ , la tensión del secundario debida a la inducción mutua;  $I_0$ , la intensidad de la corriente en vacío;  $\Phi_0$ , el flujo en vacío que abarca cada una de las espiras de los devanados del transformador. Lo mismo que antes prescindimos de las pérdidas de energía y de la disipación del flujo en el transformador.

Según la ley de la inducción electromagnética

$$U_1^{ind} = -\frac{d\Phi_0}{dt} N_1, \quad (51.19)$$

$$U_2^{ind} = -\frac{d\Phi_0}{dt} N_2, \quad (51.20)$$

ya que los flujos totales de inducción que atraviesan el primario y el secundario, son respectivamente iguales a

$$\Phi_1 = \Phi_0 N_1, \quad \Phi_2 = \Phi_0 N_2. \quad (51.21)$$

Es necesario tomar en consideración que la intensidad de la corriente en vacío es muy pequeña, lo mismo que la resistencia óhmica del primario en comparación con su inductancia. Por eso (véase la fig. 210)

$$U_1 \approx U_1' \approx -U_1^{ind}, \quad (51.22)$$

es decir,

$$U_1^{ind} \approx -U_1. \quad (51.23)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (51.20) y tomando en consideración (51.23), hallamos

$$|U_2^{ind}| / |U_1^{ind}| \approx N_2 / N_1. \quad (51.24)$$

**Diagrama vectorial del transformador cargado.** En el transformador cargado el flujo  $\Phi_0$ , que abarca cada una de las espiras de los devanados, se origina por las corrientes tanto del primario como del secundario. La fem de autoinducción en el primario debe compensar todo el tiempo la tensión exterior, o sea, la suma de los flujos  $\Phi^{(1)}$  y  $\Phi^{(2)}$  creados por las corrientes del primario y secundario debe ser aproximadamente igual al flujo  $\Phi_0$  en vacío, es decir,  $\Phi_0 = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ . Pero eso conduce a que la tensión en el secundario satisfará la condición (51.24) para el transformador cargado.

Hay que prestar atención en que los flujos  $\Phi^{(1)}$  y  $\Phi^{(2)}$  no son los flujos totales  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  que abarcan el primario y secundario. Los flujos  $\Phi^{(1)}$  y  $\Phi^{(2)}$  son los flujos abarcados por una espira de cada uno de los devanados, originados



Fig. 210

Diagrama vectorial del transformador durante la marcha en vacío

en el núcleo por las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Los flujos totales que abarcan el primario y secundario, son  $\Phi_1 = N_1 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})$ ,  $\Phi_2 = N_2 (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})$ .

La fig. 211 representa el diagrama vectorial del transformador cargado. Las intensidades de las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  son considerablemente mayores que la

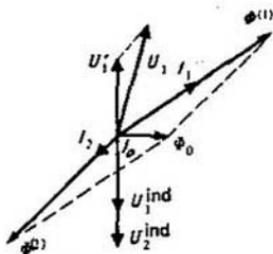


Fig. 211  
Diagrama vectorial del transformador cargado

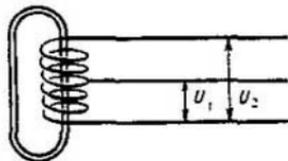


Fig. 212  
Autotransformador

intensidad de la corriente  $I_0$  en vacío, por eso los flujos  $\Phi^{(1)}$  y  $\Phi^{(2)}$ , originados por ellas, son mucho mayores que el flujo  $\Phi_0$ . Puesto que  $\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} = \Phi_0$  (números complejos),

$$\Phi^{(1)} \approx -\Phi^{(2)}, \quad |\Phi^{(1)}| \approx |\Phi^{(2)}|. \quad (51.25)$$

Tomemos en consideración las igualdades

$$|\Phi^{(1)}| = \text{const} |I_1| N_1, \quad |\Phi^{(2)}| = \text{const} |I_2| N_2, \quad (51.26)$$

que serán obvias si se tiene en cuenta que  $\Phi^{(1)}$  y  $\Phi^{(2)}$  son flujos, creados por cada uno de los devanados. Entonces (51.25) adquiere la forma de igualdad

$$|I_1| N_1 = |I_2| N_2, \quad (51.27)$$

que es más cómodo escribirla así

$$\left| \frac{I_2}{I_1} \right| = \frac{N_1}{N_2}, \quad (51.28)$$

lo que, como debe de ser, coincide con (51.17).

Los primeros transformadores fueron confeccionados por P.N. Yáblochkov (1847—1894) en 1877 y F.I. Usaguin (1855—1919) e 1882.

**Autotransformador.** El autotransformador, mostrado en la fig. 212, es de construcción muy económica que ayuda a ahorrar los hilos de bobinado. Los principios físicos del funcionamiento del autotransformador y las fórmulas son análogos a los examinados más arriba. La diferencia funcional consiste en que el primario y secundario del autotransformador se encuentran en contacto eléctrico entre sí y los devanados del transformador están aislados. Por esta

razón, por ejemplo, las cargas eléctricas estáticas pueden pasar del primario del autotransformador al secundario y en el transformador eso se excluye. Dichas peculiaridades de los transformadores y autotransformadores en algunos casos se tienen que tomar en consideración.

**Transformador como elemento del circuito.** La intensidad de la corriente del circuito secundario (fig. 209)

$$I_2 = U_2/R. \quad (51.29)$$

Teniendo en cuenta que  $I_1 N_1 = I_2 N_2$ ,  $U_1/N_1 = U_2/N_2$ , de (51.29) obtenemos

$$\frac{N_2}{N_1} I_1 = \frac{1}{R} \frac{N_2}{N_1} U_1. \quad (51.30)$$

Por lo tanto, la resistencia en el secundario del transformador se representa por parte de la entrada mediante la resistencia efectiva

$$R_{\text{ef}} = \frac{U_1}{I_1} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R. \quad (51.31)$$

Ello significa que *el transformador puede utilizarse para la adaptación de la fuente de potencia a la carga con el fin de obtener el máximo rendimiento energético*

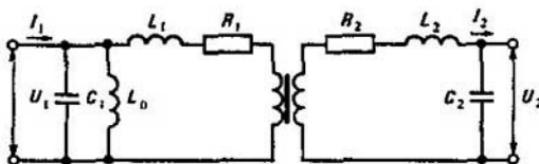


Fig. 213  
Esquema de un transformador real

[véase (49.34)]. Verbigracia, con su ayuda puede adaptarse la gran resistencia interna del amplificador a la pequeña resistencia del altavoz. Las impedancias complejas se transforman de la misma manera que (51.31).

**Transformador real.** De (51.31) se ve que un transformador ideal por parte del primario se presenta simplemente en forma de una resistencia pura. La inductancia del primario no se manifiesta de ninguna manera, lo que está condicionado por la aniquilación mutua de los flujos magnéticos, originados por las corrientes en el primario y secundario, es decir, el transformador en el circuito participa como un convertidor de la resistencia efectiva que no posee inductancia propia.

Las relaciones citadas son válidas para un transformador ideal. El transformador real posee tanto inductancia, como capacidad. Su circuito equivalente se da en la fig. 213. Las inductancias  $L_1$  y  $L_2$  de primario y secundario están determinadas por la disipación del flujo magnético, debido a la cual no hay compensación completa de los flujos magnéticos, creados por las corrientes del primario y secundario. Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  son resistencias óhmicas

de los conductores de los devanados. La inductancia  $L_0$  en el primario se determina por el flujo magnético, correspondiente a la corriente en vacío en el primario. Las capacidades  $C_1$  y  $C_2$  en los devanados surgen a causa del acoplamiento capacitivo entre las espiras de los conductores de dichos devanados.

Del circuito equivalente del transformador concluye que a frecuencias muy bajas, el transformador cesa de funcionar porque la inductancia  $\omega L_0$  se hace muy pequeña y la mayor parte de la corriente pasa a través de la inductancia  $L_0$ . A frecuencias suficientemente grandes, el transformador tampoco funciona, ya que la corriente circula principalmente por la capacidad  $C_1$ , pasando de largo las espiras del transformador. En la característica técnica del transformador se indican siempre los límites de su funcionamiento normal

¿Cuáles son las condiciones físicas de la ejecución de las resonancias en paralelo y en serie?

¿Qué relación existe entre los parámetros que caracterizan un circuito oscilante con resistencia, capacidad e inductancia, y los parámetros de un sistema oscilante mecánico con fricción?

¿Cuál es el sentido físico de las condiciones de adaptación de la carga al generador? Enumérense los casos cuando las corrientes de Foucault desempeñan un papel útil y cuando son indeseables.

¿Por qué el núcleo del autotransformador debe ser cerrado?

¿Cuáles son las ventajas principales y los defectos de los motores sincrónicos y asíncrónicos?

¿Cuál es el papel del «patinaje» en el motor asíncrono? ¿De qué depende?

¿Cómo debe conectarse el transformador para efectuar la adaptación del generador y la carga si la resistencia de la carga es muy pequeña?

¿En qué se diferencia un transformador real del ideal?

## § 52. Corriente trifásica

*Se describen los fenómenos físicos principales en los circuitos de corriente trifásica.*

**Definición.** La corriente que se examinó hasta ahora se caracterizaba por la amplitud y fase y se llamaba monofásica. El conjunto de tres corrientes monofásicas iguales, desfasadas una respecto a la otra en un tercio de período, se denomina corriente trifásica.

**Obtención de la corriente trifásica.** Examinemos un generador de corriente alterna con tres devanados aislados, en los que se genera corriente y que se encuentran bajo un ángulo de  $120^\circ$  uno con respecto a otro (fig. 214). El campo magnético giratorio que surge como consecuencia de la rotación de un imán permanente, origina en los devanados del generador tensiones iguales, pero en desfasaje:

$$U_1 = U_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad U_2 = U_0 \operatorname{sen} (\omega t + 2\pi/3), \quad U_3 = U_0 \operatorname{sen} (\omega t - 2\pi/3). \quad (52.1)$$

Los devanados del generador es cómodo mostrarlos en forma esquemática de la fig. 215.

**Conexión en estrella de los devanados del generador.** Si los tres devanados del generador se usan sin unirlos entre sí, el generador de corriente trifásica se convierte simplemente en un conjunto de tres generadores aislados de corriente monofásica y no contiene ningunos elementos nuevos. Por ejemplo, para transmitir la energía eléctrica al consumidor se requieren tres pares de hilos.

Pero si los devanados se unen entre sí de una manera determinada, la corriente trifásica manifiesta propiedades específicas que son muy útiles para las aplicaciones técnicas. Existen dos tipos de acoplamiento de los devanados del generador: la conexión en estrella y en delta.

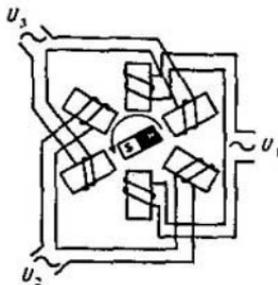


Fig. 214  
Generador de corriente trifásica



Fig. 215  
Representación esquemática de los devanados del generador de corriente trifásica

El circuito de conexión en estrella y el diagrama vectorial de las tensiones en los devanados se muestran en la fig. 216 *a, b*. En este caso existe un punto común *O* del mismo potencial. La tensión en cada uno de los devanados se denomina de fase. El conductor, unido con el punto común de potencial común, se llama neutro. Los conductores, unidos con los extremos libres de los devanados se denominan hilos de fase. Así pues, *las tensiones de fase son tensiones entre los hilos neutro y de fase*. La tensión entre los hilos de fase se llama lineal. Del diagrama vectorial se ve que las amplitudes de  $U_{o1}$  y  $U_{of}$  de las tensiones de fase y lineales están en la siguiente relación:

$$U_{o1} = 2U_{of} \sin 60^\circ = U_{of} \sqrt{3}. \quad (52.2)$$

En particular, si  $U_{of} = 127$  V,  $U_{o1} = 220$  V. La corriente  $I_f$  que circula por los devanados se llama de fase, mientras que la corriente  $I_l$  que circula por la línea, se denomina corriente de línea. Durante la conexión en estrella las corrientes de fase son iguales a las de líneas ( $I_f = I_l$ ). Si a cada uno de los devanados se le conecta una misma carga  $R$ , la intensidad sumaria de la co-

riente a través del hilo neutro es nula, puesto que

$$I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{R} (U_1 + U_2 + U_3) = 0, \quad (52.3)$$

ya que del diagrama vectorial se ve que  $\sum U_i = 0$ .

La conexión en estrella de los devanados del generador permite utilizar para la transmisión de energía en lugar de seis hilos, sólo cuatro, lo que representa una gran ventaja.

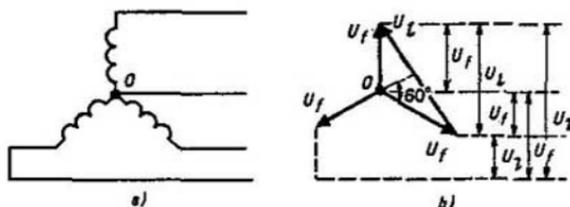


Fig. 216  
Conexión en estrella de los devanados del generador trifásico (a); diagrama vectorial correspondiente de tensiones (b)

**Conexión en delta de los devanados del generador.** El circuito de semejante conexión y el diagrama vectorial se dan en la fig. 217 a, b. En este caso  $U_{of} =$

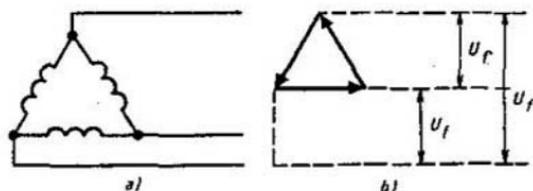


Fig. 217  
Conexión en delta de los devanados del generador trifásico (a); diagrama vectorial correspondiente de tensiones (b)

$= U_{o1}$ . Basándose en el diagrama vectorial de las corrientes (fig. 218), hallamos para las mismas cargas de las fases:

$$I_{o1} = 2I_{of} \cos 30^\circ = I_{of} \sqrt{3}. \quad (52.4)$$

$$I_{11} + I_{21} + I_{31} = I_l. \quad (52.5)$$

Al conectar en delta los devanados del generador sin carga, la corriente de cierre en los devanados está ausente. Pero eso es correcto sólo para el primer armónico. Las corrientes de los armónicos superiores que se excitan siempre debido a las oscilaciones no lineales, están presentes en los devanados. Por

eso los devanados de los generadores potentes, por regla general, no se conectan en delta.

**Conexión de las cargas.** Las cargas pueden conectarse entre sí también en estrella y en delta y luego unir las a un generador trifásico, cuyos devanados están acoplados entre sí en estrella o en delta. Así, existen cuatro posibilidades de unir el generador con las cargas (figs. 219—222).

Cada una de esas conexiones tiene sus peculiaridades.

Durante la conexión estrella—estrella (fig. 219) en todas las cargas existe distinta tensión. Siendo las cargas aproximadamente iguales y conforme

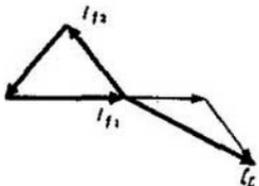


Fig. 218  
Diagrama vectorial de las corrientes durante la conexión en delta de los devanados



Fig. 219  
Conexión estrella — estrella

a (52.3), la intensidad de corriente en el hilo neutro es muy pequeña. A pesar de ello, no se puede prescindir de dicho hilo, ya que sin él sobre cada uno de los pares de carga actúa una tensión lineal  $U_{01} = U_{0f}\sqrt{3}$  que se distribuye entre

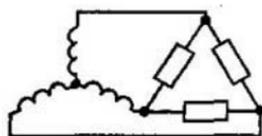


Fig. 220  
Conexión estrella — triángulo

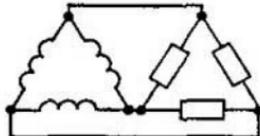


Fig. 221  
Conexión triángulo — triángulo

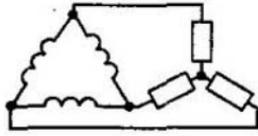


Fig. 222  
Conexión triángulo — estrella

las cargas de acuerdo con sus resistencias. En cambio, semejante dependencia de las tensiones respecto a las cargas es inadmisibles. Por eso es necesario conservar siempre el hilo neutro, sin introducirle fusibles.

Durante la conexión estrella— triángulo (fig. 220) sobre cada carga actúa una tensión lineal  $U_{01} = U_{0f}\sqrt{3}$  independientemente de la resistencia de la carga.

En el caso de conexión triángulo — triángulo (fig. 221) sobre todas las cargas actúa una tensión de fase independientemente de la resistencia de las cargas.

Durante la conexión triángulo — estrella (fig. 222) la tensión en cada carga es igual a  $U_{0f}/\sqrt{3}$ .

**Obtención de un campo magnético giratorio.** Si a los devanados del generador (véase la fig. 214) se les suministra una corriente trifásica, en el espacio entre ellos surge un campo magnético giratorio, correspondiente al campo del imán giratorio que genera la corriente. Si en lugar del imán se coloca un rotor cortocircuitado, éste empieza a girar, es decir, el generador funcionará como motor asincrónico. Así pues, *al utilizar la corriente trifásica, la construcción de los motores eléctricos se simplifica considerablemente, lo que representa una gran ventaja.*

El primero en obtener el campo magnético giratorio con ayuda de la corriente trifásica fue M. O. Dolivo-Dobrovolski (1862—1919). En 1889 el confeccionó el primer motor asincrónico y luego realizó la transmisión de la energía eléctrica mediante la corriente trifásica a gran distancia. La corriente trifásica aseguró una aplicación efectiva y amplia de la corriente en la técnica.

¿Cuáles son las ventajas principales al emplear la corriente trifásica en comparación con la monofásica?

Trácese los esquemas de conexión de las cargas y los generadores en estrella y en delta, asimismo enumérense las relaciones entre las tensiones y corrientes lineales y de fase.

### § 53. Efecto pelicular

*Se analizan el cuadro físico de la aparición y la teoría elemental del efecto pelicular y sus consecuencias. Se da el concepto sobre el efecto pelicular anómalo.*

**Esencia del fenómeno.** La corriente constante se distribuye uniformemente por la sección transversal del conductor rectilíneo. Para la corriente alterna merced a la interacción de inducción de diversos elementos de la corriente entre sí, transcurre la redistribución de la densidad de la corriente por la sección transversal del conductor, debido a lo cual la corriente se concentra principalmente en la capa superficial del conductor. La concentración de la corriente alterna en las inmediaciones de la superficie del conductor se denomina efecto pelicular.

**Cuadro físico de la aparición.** Examinemos un conductor cilíndrico por el cual circula corriente (fig. 223). Alrededor del conductor con corriente existe un campo magnético, cuyas líneas de fuerza son circunferencias concéntricas con centro en el eje del conductor. Como consecuencia del aumento de la intensidad de la corriente, crece la inducción del campo magnético, mientras que la forma de las líneas de fuerza permanece siendo la misma. Por eso en cada punto dentro del conductor la derivada  $\partial B/\partial t$  está orientada a lo largo de la tangente respecto a la línea de inducción del campo magnético y, por lo tanto, las líneas  $\partial B/\partial t$  son también circunferencias que coinciden con las líneas de inducción del campo magnético. El campo magnético variable, según la ley de la inducción electromagnética

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad (53.1)$$

crea un campo inducido eléctrico, cuyas líneas de fuerza son en sí curvas cerradas alrededor de la línea de inducción del campo magnético (fig. 223). El vector de intensidad del campo inducido en las regiones más próximas al eje del conductor está dirigido en sentido contrario al vector de la intensidad del campo eléctrico que crea la corriente, y en las regiones más alejadas, coincide con él. Como consecuencia, la densidad de la corriente disminuye en las regiones próximas al eje y aumenta cerca de la superficie del conductor, o sea, surge el efecto pelicular.

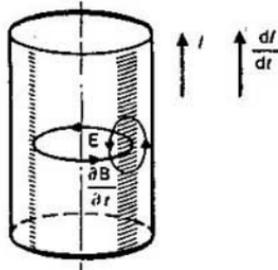


Fig. 223  
Cuadro físico de la aparición del efecto pelicular

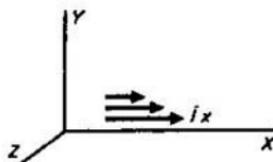


Fig. 224  
Efecto pelicular en un conductor infinito con frontera plana

**Teoría elemental.** Ante todo es necesario obtener la ecuación que describa el efecto pelicular. Partimos de la ecuación de Maxwell:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (53.2)$$

y la ecuación (53.1). Sustituyendo la expresión para  $\mathbf{j}$  según la ley de Ohm en (53.2)

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (53.3)$$

y diferenciando los dos miembros de la ecuación obtenida con relación al tiempo, hallamos

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (53.4)$$

o teniendo en cuenta (53.1)

$$-\text{rot rot } \mathbf{E} = \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (53.5)$$

Dado que

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (53.6)$$

y  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , en definitiva tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\gamma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (53.7)$$

Para simplificar la solución de esta ecuación supongamos que la corriente circula por un conductor homogéneo infinito que ocupa el semiespacio  $y > 0$  a lo largo del eje  $X$  (fig. 224). La superficie del conductor es el plano  $Y = 0$ .

De esta manera,

$$j_x = j_x(y, t), \quad j_y = j_z = 0, \quad (53.8)$$

$$E_x = E_x(y, t), \quad E_y = E_z = 0. \quad (53.9)$$

Entonces [véase (53.7)]

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \gamma \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (53.10)$$

Ya que todas las magnitudes en (53.10) dependen armónicamente de  $t$ , puede suponerse que

$$E_x(y, t) = E_0(y) e^{i\omega t}. \quad (53.11)$$

Después de sustituir (53.11) en (53.10) y reducir los dos miembros de la ecuación por  $\exp(i\omega t)$ , obtenemos la ecuación para  $E_0(y)$ :

$$\frac{d^2 E_0}{dy^2} = i\gamma \mu \omega E_0. \quad (53.12)$$

La solución general de la ecuación (53.12) es así:

$$E_0 = A_1 e^{-\lambda y} + A_2 e^{\lambda y}. \quad (53.13)$$

Teniendo en cuenta que

$$k = \sqrt{i\gamma \mu \omega} = \alpha(1 + i), \quad \alpha = \sqrt{\gamma \omega \mu / 2}, \quad (53.14)$$

hallamos

$$E_0(y) = A_1 e^{-\alpha y} e^{-i\alpha y} + A_2 e^{\alpha y} e^{i\alpha y}. \quad (53.15)$$

Al alejarse de la superficie del conductor ( $y \rightarrow \infty$ ), el segundo sumando en (53.15) crece ilimitadamente, lo que es inadmisibles desde el punto de vista físico. Por consiguiente, en (53.15)  $A_2 = 0$  y a título de solución físicamente accesible queda sólo el primer sumando. Entonces, la solución del problema, teniendo en cuenta (53.11), tiene la forma

$$E_x(x, t) = A_1 e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - \alpha y)}. \quad (53.16)$$

Tomando la parte real de esta expresión y pasando con ayuda de la relación  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  a la densidad de la corriente, obtenemos

$$j_x(y, t) = \gamma A_1 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y). \quad (53.17)$$

Tomando en consideración que  $j_x(0, 0) = j_0$  es la amplitud de la densidad de la corriente en la superficie del conductor, llegamos a la siguiente distribución de la densidad volumétrica de la corriente en el conductor:

$$j_x(y, t) = j_0 e^{-\alpha y} \cos(\omega t - \alpha y). \quad (53.18)$$

**Grosor de la capa superficial de corriente.** La densidad volumétrica de corriente es máxima cerca de la superficie del conductor. Al alejarse de la superficie, disminuye y a una distancia  $\Delta = 1/\alpha$  se hace  $e$  veces menor. Por eso prácticamente toda la corriente está concentrada en una capa  $\Delta$  denominada grosor

de la capa superficial de corriente. Basándose en (53.14), éste es

$$\Delta = [2/(\gamma\mu\omega)]^{1/2}. \quad (53.19)$$

Es obvio que a una frecuencia bastante alta  $\omega$ , el grosor de la capa superficial de corriente puede ser muy pequeño. Por ejemplo, para un buen conductor tipo cobre  $\gamma = 10^7 \Omega^{-1} \times \text{m}^{-1}$  y para  $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$  el grosor es  $\Delta = 4 \text{ mm}$ . Si la frecuencia aumenta 100 veces, hasta el valor  $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$ , el grosor de la capa superficial de corriente disminuye 10 veces ( $\Delta \approx 0,4 \text{ mm}$ ). Eso significa que para una frecuencia bastante alta en conductores no muy finos toda la corriente circula únicamente en una parte pequeña de la sección transversal del conductor, en la proximidad de su superficie. Por esta razón, nada cambia si se retira el material conductor de la región cilíndrica dentro del conductor, dejando sólo su envoltura cilíndrica de un grosor igual a la capa superficial de corriente. Si el conductor es bastante grueso y la frecuencia no muy alta, la corriente circula por toda la sección transversal, disminuyendo un poco sólo hacia su eje. Por ejemplo, para la corriente técnica de 50 Hz de frecuencia el efecto pelicular en los conductores ordinarios se manifiesta débilmente.

**Dependencia entre la resistencia óhmica del conductor y la frecuencia.** Puesto que el área efectiva de la sección transversal que recorre la corriente, disminuye al aumentar la frecuencia, *la resistencia del conductor crece al elevar la frecuencia.*

**Dependencia entre la inductancia del conductor y la frecuencia.** La energía del campo magnético que recorre la corriente, es igual a

$$W_m = 1/2 LI^2. \quad (53.20)$$

Si la corriente circula por un cilindro vacío, el campo fuera de éste es el mismo que origina la corriente que circula por un cilindro continuo y en la cavidad del cilindro no hay campo. Por eso la energía del campo de una corriente que recorre un cilindro vacío, es inferior a la energía del campo de la misma corriente que circula por un cilindro continuo. Esto significa que debido al efecto pelicular, la energía del campo magnético  $W_m$  disminuye. De aquí, basándose en (53.20), se desprende que *al aumentar la frecuencia, la inductancia de los conductores disminuye.*

**Temple de los metales con corrientes de alta frecuencia.** Merced al efecto pelicular, a frecuencias altas el calor de Joule se libera principalmente en la capa superficial. Eso permite calentar al rojo el conductor en una capa superficial fina sin variar esencialmente la temperatura de las regiones internas. Dicho fenómeno se utiliza en la industria para el temple de los metales que es un método muy importante desde el punto de vista tecnológico.

**Efecto pelicular anómalo.** El mecanismo de aparición del efecto pelicular expuesto supone que en su movimiento el electrón pierde continuamente la energía para superar la resistencia óhmica del conductor, debido a lo cual sucede la liberación del calor de Joule.

Está claro que semejante idealización es posible sólo cuando el movimiento de los electrones transcurre en las zonas, cuyas dimensiones lineales son mucho

mayores que la longitud media del recorrido libre del electrón entre las colisiones con los átomos de la substancia. Por esta razón, *la teoría expuesta es válida únicamente para la condición de que el grosor de la capa superficial de corriente sea mucho mayor que la longitud media del movimiento libre del electrón*. Semejante relación entre ellos se observa en límites bastante amplios. Por ejemplo, incluso a una frecuencia de 10 GHz y temperatura de 300 K, el grosor de la capa superficial de corriente en el cobre es igual aproximadamente a  $1 \mu\text{m}$ , y la longitud del recorrido libre es de unos  $0,01 \mu\text{m}$ . No obstante, *a temperatura muy baja, la situación cambia bruscamente, ya que la conductividad aumenta intensamente y, por tanto, crece la longitud de recorrido y libre y disminuye el grosor de la capa superficial de corriente*. Verbigracia, a la temperatura del helio líquido (4,2 K), la conductividad del cobre puro aumenta aproximadamente  $10^4$  de veces. Eso conduce al incremento de la longitud media del recorrido libre de los electrones en  $10^4$  de veces y a la disminución del grosor de la capa superficial de corriente en  $\sqrt{10^4} = 10^2$  veces. Así pues, la longitud de recorrido libre y el grosor de la capa superficial se hacen iguales, respectivamente, a 100 y  $0,01 \mu\text{m}$ . Para estas condiciones el mecanismo que conduce a la formación del efecto pelicular, ya no actúa. *El grosor efectivo de la capa en que se concentra la corriente, varía. Este fenómeno recibe el nombre de efecto pelicular anómalo.*

En condiciones del efecto pelicular anómalo en los límites de una capa superficial normal de corriente durante todo el recorrido libre pueden moverse sólo los electrones, cuyas velocidades son casi paralelas a la superficie del conductor. Todos los demás electrones durante el movimiento libre tienen tiempo de abandonar la capa superficial «normal» de corriente y cambiar considerablemente la dirección de movimiento. Debido a eso, disminuye la conductividad del material y cambia el grosor «anómalo» efectivo  $\Delta'$  de la capa superficial de corriente. Para que se pueda estimar aproximadamente, puede considerarse que una parte de los electrones tiene el orden de  $\Delta'/l$  respecto al número de electrones que realizarían la conductividad en los márgenes del efecto pelicular «normal» ( $l$  es la longitud media del recorrido libre de los electrones). La disminución de esta parte conduce a la reducción de la conductividad que se tiene en cuenta con una sustitución aproximada en las fórmulas  $\gamma \rightarrow \beta\gamma$  ( $\Delta'/l$ ), donde  $\beta$  es un coeficiente numérico del orden de la unidad. Haciendo esta sustitución en la fórmula (53.19), hallamos

$$\Delta' = [2l/(\rho\gamma\mu\omega)]^{1/2}. \quad (53.21)$$

Merced a la interacción inducida de distintos elementos de la corriente, en la corriente alterna tiene lugar la redistribución de la densidad de corriente por la sección transversal del conductor, debido a lo cual la corriente se concentra principalmente en la capa superficial del conductor.

¿En qué consiste la causa física de la dependencia de la resistencia e inductancia del conductor respecto a la frecuencia de la corriente alterna?

¿Para cuales condiciones surge el efecto pelicular?

## § 54. Cuadripolos

*Se exponen la terminología y los conceptos principales de la teoría de los cuadripolos.*

**Definición.** Se llama *cuadripolo* a un circuito eléctrico con dos terminales de entrada y dos de salida, por el que se transmite la energía eléctrica. Su representación simbólica se muestra en la fig. 225. Como ejemplos de cuadripolos pueden citarse los convertidores de las amplitudes de oscilaciones, los filtros de frecuencias, los transformadores, etc. Se necesita encontrar la relación entre las tensiones y las intensidades de las corrientes en la salida y entrada del cuadripolo. Si en éste no hay fuentes de energía, se denomina red pasiva, si están presente, cuadripolo activo. Se supone que la intensidad de la corriente que sale del terminal 2 es igual a la intensidad de la corriente que entra en el terminal 1 y de manera análoga, que la intensidad de la corriente que sale del terminal 3 es igual a la intensidad de la corriente que entra en el terminal 4.

**Ecuaciones.** Sea que en el cuadripolo hayan circuitos independientes. Entonces para ellos pueden formarse  $n$  ecuaciones para las corrientes de contorno tipo (48.27):

$$\sum_{i=1}^n Z_{1i} I_i = U_1, \quad \sum_{i=1}^n Z_{2i} I_i = -U_2, \quad \sum_{i=1}^n Z_{ki} I_i = 0 \quad (k=3, 4, \dots, n). \quad (54.1)$$

El signo menos en la segunda de las ecuaciones (54.1) en  $U_2$  apareció debido a que al escribir estas ecuaciones para la dirección elegida del recorrido positivo de la tensión,  $U_1$  y  $U_2$  pasan en direcciones contrarias (véase la fig. 225). La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} U_2, \\ I_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} U_2, \end{aligned} \quad (54.2)$$

donde  $\Delta$  y  $\Delta_{ij}$  son el determinante y los complementos correspondientes del sistema de ecuaciones (54.1). Por consiguiente, entre las intensidades de las corrientes y las tensiones de la red pasiva existen dependencias lineales tipo (54.2), que es más cómodo escribirlas así:

$$\begin{aligned} I_1 &= B_{11} U_1 + B_{12} U_2, \\ I_2 &= B_{21} U_1 + B_{22} U_2. \end{aligned} \quad (54.3)$$

Los coeficientes  $B_{ij}$  tienen la dimensión de las conductancias. Por eso (54.3) se denominan *ecuaciones del cuadripolo con coeficientes en forma de conductancias*.

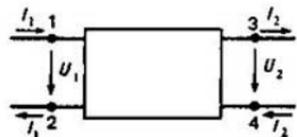


Fig. 225  
Cuadripolo

No es difícil resolver las ecuaciones (54.3) respecto a las tensiones:

$$\begin{aligned}U_1 &= A_{11}I_1 + A_{12}I_2, \\U_2 &= A_{21}I_1 + A_{22}I_2,\end{aligned}\quad (54.4)$$

donde los coeficientes  $A_{ij}$  tienen la dimensión de resistencias (impedancias). Las ecuaciones (54.4) se llaman ecuaciones del cuádrupolo con coeficientes en forma de resistencias.

**Teorema de la reciprocidad.** Dado que los coeficientes  $z_{ij}$  para la red pasiva en las ecuaciones (54.1) son simétricos véase (48.30):

$$Z_{ij} = Z_{ji}. \quad (54.5)$$

puede mostrarse que los coeficientes  $A_{ij}$  en (54.4) son en este caso también simétricos:

$$A_{12} = A_{21}. \quad (54.6)$$

De aquí se desprende que

$$(U_2/I_1)I_2 = 0 = (U_1/I_2)I_1 = 0, \quad (54.7)$$

es decir, *la tensión de salida en el par abierto de terminales para la intensidad prefijada de la corriente de entrada no cambia si los terminales de entrada y de salida del cuádrupolo se cambian de lugar* (teorema de la reciprocidad para la red pasiva).

**Resistencia de cuádrupolo.** La resistencia  $A_{21}$  se denomina resistencia recíproca del cuádrupolo, puesto que para el circuito abierto de salida ( $I_2 = 0$ ) de la segunda ecuación de (54.4) se desprende que

$$A_{21} = U_2/I_1. \quad (54.8a)$$

Para esta misma condición la primera ecuación de (54.4) nos ofrece:

$$A_{11} = U_1/I_1. \quad (54.8b)$$

Esto significa que  $A_{11}$  es la resistencia de entrada del cuádrupolo para el circuito abierto de salida. El mismo sentido tienen los coeficientes  $A_{12}$  y  $A_{22}$  de acuerdo con el teorema de la reciprocidad.

**Cuádrupolos elementales.** Aplicado las ecuaciones (54.3) y (58.4), la tensión y la intensidad de la corriente en la entrada del cuádrupolo pueden relacionarse con las mismas magnitudes en la salida:

$$U_1 = D_{11}U_2 + D_{12}I_2, \quad I_1 = D_{21}U_2 + D_{22}I_2, \quad (54.9)$$

donde  $D_{ij}$  se expresan fácilmente por medio de  $B_{ij}$  y  $A_{ij}$  que entran en las ecuaciones (54.3) y (54.4); el coeficiente  $D_{12}$  tiene la dimensión de resistencia,  $D_{21}$ , de conductividad y los coeficientes  $D_{11}$  y  $D_{22}$  son adimensionales.

*El cuádrupolo se denomina simétrico longitudinal si al cambiar de lugar los terminales de entrada y de salida, la intensidad de las corrientes y la tensión en los circuitos, acoplados a los terminales, no varían.* Partiendo de la posibilidad de semejante cambio con ayuda de (54.9), obtenemos para los cuádrupolos simé-

tricos

$$D_{11} = D_{22}. \quad (54.10)$$

Los cuadripolos (circuitos) simétricos elementales en  $\pi$  y en T se muestran en las figs. 226 y 227 y los asimétricos, en las figs. 228 y 229. Los coeficientes  $D_{ij}$  para el cuadripolo se pueden hallar con más facilidad aplicando el método de las corrientes de contorno. Para eso se compone un sistema de ecuaciones y luego se excluyen las intensidades de las corrientes de contorno para los cir-

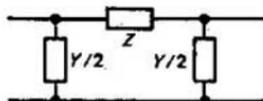


Fig. 226  
Cuadripolo simétrico-longitudinal en forma de pi

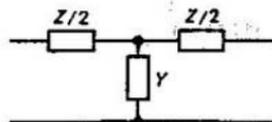


Fig. 227  
Circuito en T simétrico longitudinal

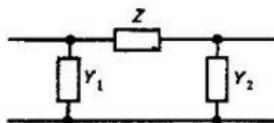


Fig. 228  
Circuito en pi asimétrico

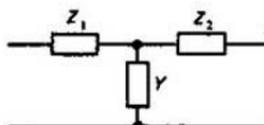


Fig. 229  
Circuito en T asimétrico

cuitos internos. Las dos ecuaciones restantes, en las que participan  $U_1$ ,  $U_2$  e  $I_1$ ,  $I_2$  se transforman a la forma (54.9) y, comparándola con (54.9), se obtienen inmediatamente los coeficientes  $D_{ij}$ .

Para el circuito en pi simétrico longitudinal (fig. 226) hallamos:

$$D_{11} = 1 + ZY/2, \quad D_{12} = Z, \quad D_{21} = Y(1 + ZY/4). \quad (54.11)$$

Para el circuito en T simétrico longitudinal (fig. 227) tenemos:

$$D_{11} = 1 + ZY/2, \quad D_{12} = Z(1 + ZY/4), \quad D_{21} = Y. \quad (54.12)$$

Comprobando directamente, nos cercioramos de que

$$D_{11}^2 - D_{12}D_{21} = 1, \quad (54.13)$$

es decir, el determinante de los coeficientes de transformación (54.9) es igual a la unidad para los circuitos en pi y en T simétricos longitudinales.

Las expresiones de los coeficientes para los circuitos asimétricos son más complejos y por eso aquí no se citan.

**Resistencias de entrada y de salida.** Para un cuadripolo éstas se determinan como relaciones entre las tensiones y las intensidades de corriente correspon-

dientes:

$$Z_{en} = U_1/I_1, \quad Z_{sa1} = U_2/I_2. \quad (54.14)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (54.10)–(54.13), de (54.9) hallamos

$$Z_{en} = \frac{Z_{sa1} + D_{12}/D_{11}}{1 + Z_{sa1}D_{21}/D_{11}}. \quad (54.15)$$

Así pues, el cuadripolo transforma la resistencia de salida en resistencia de entrada. Al cortocircuitar la salida ( $Z_{sa1} = 0$ ), la resistencia de entrada del cuadripolo es igual a

$$Z_{0\ en} = D_{12}/D_{11} \quad (54.16)$$

y para la salida abierta ( $Z_{sa1} = \infty$ ), se determina por la expresión

$$Z_{\infty\ en} = D_{11}/D_{21}. \quad (54.17)$$

**Relación de transferencia.** La transformación de las tensiones y las intensidades de las corrientes se caracteriza por la relación entre sus valores en la salida y los valores en la entrada. De manera análoga a (54.15), obtenemos:

$$U_2/U_1 = Z_{sa1}/(Z_{sa1}D_{11} + D_{12}), \quad (54.18)$$

$$I_2/I_1 = 1/(D_{11} + Z_{sa1}D_{21}). \quad (54.19)$$

Si el cuadripolo funciona sin transformar las resistencias, es decir, cuando las resistencias de entrada y de salida son iguales, se dice que la resistencia de salida se adapta al sistema. Poniendo el valor de la resistencia en (54.15)

$$Z_x = Z_{en} = Z_{sa1}, \quad (54.20)$$

hallamos su valor

$$Z_x = \sqrt{D_{12}/D_{21}}. \quad (54.21)$$

Esta magnitud se llama **impedancia característica (de onda)** del cuadripolo. Por lo tanto, el cuadripolo está adaptado a la línea de transmisión si sus resistencias de entrada y de salida son iguales a la impedancia característica. En este caso las relaciones (54.18) y (54.19) toman el aspecto:

$$U_2/U_1 = 1/(D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}), \quad (54.22)$$

$$I_2/I_1 = 1/(D_{11} + \sqrt{D_{12}D_{21}}). \quad (54.23)$$

Con ayuda de la relación

$$\operatorname{ch} g = D_{11} \quad (54.24)$$

determinemos la relación de transferencia  $g$ . Entonces, basándose en (54.13), obtenemos

$$\operatorname{sh} g = \sqrt{\operatorname{ch}^2 g - 1} = \sqrt{D_{12}D_{21}}. \quad (54.25)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (54.24) y (54.25), transformemos las fórmulas (54.22) y (54.23) así

$$U_2 = U_1 e^{-g}, \quad (54.26)$$

$$I_2 = I_1 e^{-g}. \quad (54.27)$$

Señalemos que las expresiones (54.26) y (54.27) son válidas sólo en condiciones de una adaptación total. Al no haber adaptación, es necesario utilizar las fórmulas (54.18) y (54.19).

Aplicando la relación de transferencia y la impedancia característica, las fórmulas (54.18) y (54.19) pueden representarse de la siguiente manera:

$$U_2/U_1 = Z_{\text{sat}}(Z_{\text{sat}} \operatorname{ch} g + Z_x \operatorname{sh} g), \quad (54.28)$$

$$I_2/I_1 = Z_x(Z_x \operatorname{ch} g + Z_{\text{sat}} \operatorname{sh} g). \quad (54.29)$$

Lo mismo que todas las magnitudes en las fórmulas (54.26)–(54.29), la relación de transferencia en una magnitud compleja:

$$g = \alpha + i\beta. \quad (54.30)$$

Como se ve de las ecuaciones (54.26) y (54.27) en las condiciones de adaptación la parte real de la relación de transferencia determina la variación de las amplitudes de la tensión y de las intensidades de las corrientes en la salida del cuádrupolo en comparación con sus valores de entrada, mientras que la parte imaginaria, la variación de las fases. La parte real de la relación de transferencia, es simplemente, el logaritmo de la relación entre las amplitudes:

$$\alpha = \ln(U_1/U_2). \quad (54.21)$$

Dado que  $g$  es función de la frecuencia, cuando por el cuádrupolo pasa la señal que incluye en sí muchas frecuencias, su composición espectral y, por lo tanto, la forma varían. El carácter de la variación del espectro de fase y de frecuencia puede hallarse mediante las fórmulas obtenidas en el presente párrafo.

## § 55. Filtros

*Se describen el principio de funcionamiento y las propiedades de los filtros.*

**Definición.** Se denomina **filtro** el dispositivo que varía la amplitud de oscilaciones en función de su frecuencia. Si el filtro se confecciona en forma de un cuádrupolo, la relación de transferencia debe cambiar esencialmente con la frecuencia.

**Filtro de paso bajo.** Examinemos el cuádrupolo en T representado en la fig. 230. Comparándolo con la fig. 227, se ve que en las fórmulas obtenidas es necesario hacer:

$$Z = i\omega L, \quad Y = i\omega C. \quad ((55.1))$$

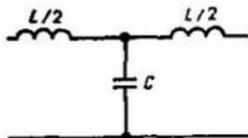


Fig. 230  
Filtro de paso bajo

La impedancia característica, a base de (54.24) y (54.11), es igual a

$$Z_x = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sqrt{1 + \frac{ZY}{4}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}}. \quad (55.2)$$

Para la relación de transferencia  $g$  [véase (54.24)] teniendo en cuenta (54.11), hallamos

$$\operatorname{ch} g = 1 - \omega^2 LC/2. \quad (55.3)$$

Teniendo presente para  $g$  su expresión (54.30), escribamos de nuevo la ecuación (55.3) como

$$\operatorname{ch}(\alpha + i\beta) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + i \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sen} \beta = 1 - \omega^2 LC/2, \quad (55.4)$$

de donde

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 - \omega^2 LC/2, \quad (55.5)$$

$$\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sen} \beta = 0. \quad (55.6)$$

La ecuación (56.1) tiene las siguientes soluciones:

$$\beta = \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (55.7)$$

para las cuales  $\cos \beta = \pm 1$ . En cambio, el coseno hiperbólico es siempre mayor o igual a la unidad, o sea,  $\operatorname{ch} \alpha \geq 1$ . Por eso de (55.5) se desprende que  $\cos \beta = -1$  y puede considerarse que  $\beta = \pi$ . Para estas condiciones la ecuación (55.5) adquiere el aspecto

$$1 + \operatorname{ch} \alpha = \omega^2 LC/2. \quad (55.8)$$

Dado que  $\operatorname{ch} \alpha \geq 1$ , (55.8) tiene solución sólo para frecuencias bastante altas

$$\omega \geq \omega_1, \quad (55.9)$$

donde

$$\omega_1 = 2\sqrt{LC} \quad (55.10)$$

es la frecuencia límite. Teniendo en cuenta (55.9) y partiendo de la ecuación (55.2), sacamos la conclusión de que la impedancia característica es un número puramente imaginario:

$$Z_{\text{sal}} = i \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega^2 LC}{4} - 1} = i \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1}. \quad (55.11)$$

La parte real de la relación de transferencia se determina de la ecuación (55.8). Se ve que al crecer la frecuencia, ella aumenta rápidamente. Pero eso significa (basándose en (54.26) y (54.27)) que las amplitudes de oscilaciones en la salida del cuadripolo para  $\omega \geq \omega_1$  disminuyen con rapidez al aumentar la frecuencia.

La otra solución de la ecuación (55.6) tiene la forma:

$$\operatorname{sh} \alpha = 0, \quad \alpha = 0. \quad (55.12)$$

Entonces la ecuación (55.5) tiene el aspecto

$$\cos \beta = 1 - \omega^2 LC/2. \quad (55.13)$$

Ella tiene solución únicamente para  $\cos \beta \geq -1$ , es decir, para las frecuencias

$$\omega \leq \omega_1 = 2/\sqrt{LC}, \quad (55.14)$$

para las cuales la primera solución no daba resultados. La impedancia característica en este caso es real:

$$Z_x = \sqrt{L/C} \sqrt{1 - \omega^2/\omega_1^2}. \quad (55.15)$$

Puesto que aquí  $\alpha = 0$ , las frecuencias  $\omega \leq \omega_1$  se dejan pasar sin amortiguarse según la amplitud. En cambio, existe el defasaje que depende de la frecuencia y que se determina por la ecuación (55.13).

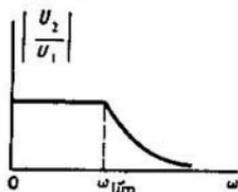


Fig. 231  
Característica del filtro de paso bajo

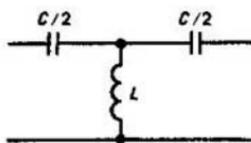


Fig. 232  
Filtro de paso alto

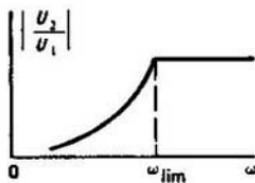


Fig. 233  
Característica del filtro de paso alto

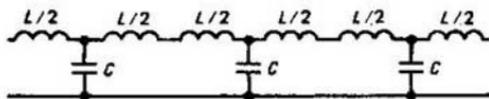


Fig. 234  
Filtro en escala de eslabones en T

La dependencia entre la amplitud de oscilaciones en la salida y la amplitud en la entrada se expone en la fig. 231. El cuadripolo en cuestión es en sí un filtro que deja pasar las frecuencias bajas, inferiores a cierta frecuencia límite  $\omega_1$ . Las frecuencias que superan la frecuencia límite se amortiguan rápidamente. Para frecuencias mucho mayores que la límite, dicho filtro funciona como un obturador. La zona de frecuencias  $\omega \leq \omega_1$  se denomina banda pasante.

**Filtro de paso alto.** El cuadripolo, mostrado en la fig. 232, se calcula de la misma manera que el caso anterior y funciona como un filtro de paso alto con una característica (respuesta) de frecuencia que se da en la fig. 233.

**Cadena de filtros.** Si a los terminales de salida del cuadripolo mostrado en la fig. 230, se conectan los terminales de entrada de semejante cuadripolo y se continúa ese proceso, se obtiene el cuadripolo representado en la fig. 234.

Para estudiarlo, pueden aplicarse los mismos métodos. No obstante, también sin un cálculo detallado se pueden aclarar sus propiedades fundamentales, ya que las células sucesivas de las que consta, tienen las mismas impedancias características y funcionan en modo de adaptación para cada frecuencia dada. La frecuencia límite de todas las células es igual. Por tanto, ese cuadripolo tendrá la misma banda pasante  $\omega \leq \omega_1$  y el amortiguamiento de las frecuencias  $\omega \geq \omega_1$  será más intenso. La característica de frecuencia tiene el aspecto semejante a la fig. 231, pero con un decrecimiento más abrupto para  $\omega > \omega_1$  (fig. 235).

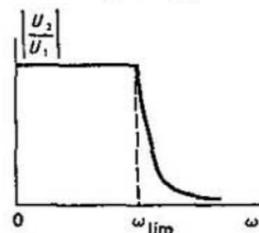


Fig. 235  
Característica del filtro en  
escala de eslabones en T

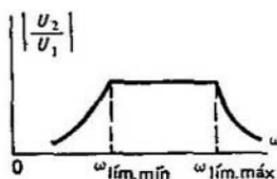


Fig. 236  
Característica del filtro de  
banda

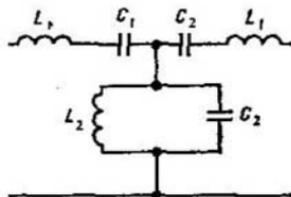


Fig. 237  
Filtro de banda

**Filtro de banda.** Se llama filtro de banda al que deja pasar sólo la banda de frecuencias entre cierta frecuencia máxima y cierta frecuencia mínima:

$$\omega_{1,\text{mín}} \leq \omega \leq \omega_{1,\text{máx}}. \quad (55.16)$$

Su respuesta de frecuencia se muestra en la fig. 236.

En principio, semejante filtro puede confeccionarse en forma de sucesión de filtros de paso alto y de paso bajo. El filtro de paso alto debe eliminar todas las frecuencias, inferiores a  $\omega_{1,\text{mín}}$  y dejar pasar las frecuencias altas, mientras que el de paso bajo debe dejar pasar todas las frecuencias, inferiores a  $\omega_{1,\text{máx}}$  y eliminar todas las demás que superen  $\omega_{1,\text{máx}}$ .

En cambio, en la práctica por lo general se utilizan circuitos más complicados (véase, por ejemplo, la fig. 237). Este filtro es también un cuadripolo y puede estudiarse por los mismos métodos.

## § 56. Betatrón

*Se examinan el principio de funcionamiento del betatrón y los conceptos principales de la teoría de la estabilidad del movimiento de los electrones en él. Se analiza el límite de energías que puede alcanzarse en el betatrón.*

**Destinación.** El betatrón es un ejemplo de dispositivo en el que el campo eléctrico giratorio inducido actúa sobre los electrones libres en el vacío. Está desti-

nado para acelerar los electrones hasta energías muy elevadas del orden de varias centenas de megaelectrón-voltios. Las pérdidas de energía en la radiación de deceleración que surge a causa del movimiento de los electrones con aceleración por orbitales circulares, impiden la aceleración hasta energías más considerables. El mecanismo de aceleración, usado en el betatrón, no está en condición de compensar dichas pérdidas y el ciclo de aceleración cesa.

**Principio de funcionamiento.** La idea principal es elegir tales condiciones para las que el electrón en un campo magnético creciente se acelere por medio del campo eléctrico giratorio y al mismo tiempo se retenga por el campo magnético en la orbital circular de radio constante.

Resulta que semejante condición es realizable y se denomina condición de betatrón.

**Condición de betatrón.** Escribamos la ecuación del movimiento del electrón por una circunferencia de radio constante en un campo magnético creciente considerando que semejante movimiento es posible. La solución nos ofrece las condiciones para las que dicho movimiento puede efectuarse.

Designemos por  $r_0$  el radio de la órbita;  $p$ , el impulso del electrón, dirigido todo el tiempo por la tangente respecto a la orbital circular (fig. 238). Para definir la intensidad del campo eléctrico en la órbita la ley de la inducción electromagnética nos da la ecuación

$$2\pi r_0 E = - d\Phi/dt. \quad (56.1)$$

Por otra parte, la ecuación del movimiento tiene la forma

$$dp/dt = eE. \quad (56.2)$$

De las fórmulas (56.1) y (56.2) se deduce que

$$dV/dt = - \frac{e}{2\pi r_0} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (56.3)$$

Dado que  $r_0 = \text{const}$ , los dos miembros de la ecuación pueden integrarse respecto a  $t$  desde 0 hasta  $t$ :

$$p_t - p_0 = - [e/(2\pi r_0)] (\Phi_t - \Phi_0), \quad (56.4)$$

donde los índices  $t$  y 0 significan el valor de las magnitudes correspondientes en el momento de tiempo  $t$  y en el momento inicial  $t = 0$ . La ecuación de Newton para la aceleración centrípeta se escribe como

$$mv^2/r_0 = - eVB, \quad (56.5)$$

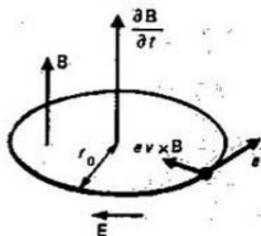


Fig. 238  
Para deducir la condición de betatrón

donde  $m$  es la masa relativista. De la ecuación (56.5) se desprende que  $p = mv = -eBr_0$ . Entonces [véase (56.4)]

$$B_t - B_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_t}{\pi r_0^2} - \frac{\Phi}{\pi r_0^2} \right). \quad (56.6)$$

Puesto que el vector de inducción  $\mathbf{B}$  está dirigido perpendicularmente al plano de la órbita y el flujo de inducción magnética es igual a

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (56.7)$$

( $S = \pi r_0^2$  es el área limitada por la órbita),

$$\Phi / (\pi r_0^2) = \langle B \rangle \quad (56.8)$$

es la inducción media del campo en el área  $S$  que abarca la órbita. Considerando que en el momento inicial el campo está ausente ( $B_0 = 0$ ,  $\Phi_0 = 0$ ), de la fórmula (56.6) teniendo en cuenta (56.8), hallamos

$$B_t = 1/2 \langle B_t \rangle. \quad (56.9)$$

Esto es la condición de betatrón: *la inducción magnética en la órbita de electrones es igual a la mitad de la magnitud de la inducción magnética media que abarca*

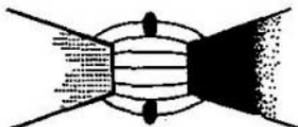


Fig. 239  
Esquema del betatrón

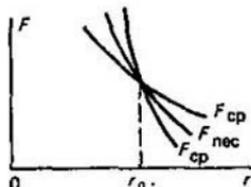


Fig. 240  
Para deducir la condición de estabilidad radial de los electrones en el betatrón

la órbita. Por consiguiente, es necesario hacer que la inducción del campo magnético sea decreciente desde el centro hacia la órbita según cualquier ley a causa de que se cumpla la condición (56.9). Para ello es indispensable elegir de una manera correspondiente la forma de los polos de los imanes electromagnéticos que originan el campo magnético (fig. 239). Ya que para la forma prefijada de los polos de los imanes, el aspecto de las líneas de fuerza no depende de la intensidad de la corriente y de la inducción del campo magnético, la condición (56.9) resulta cumplida para cualquier intensidad de la corriente en el imán eléctrico. Pero eso significa que *no es necesario preocuparse de la ley de variación de la intensidad de la corriente*. La única cuestión que queda en blanco es la estabilidad del movimiento; si por cualesquiera causas el electrón deja de moverse estrictamente por la circunferencia de radio  $r_0$ , surgirán las fuerzas que tienden a man-

tenerlo en el régimen de aceleración en las proximidades de la circunferencia o perderá la aceleración y desaparecerá.

Existen dos posibilidades de desviación del electrón de la órbita: o bien según el radio, o bien según la vertical del plano de su movimiento.

**Estabilidad radial.** La inducción del campo magnético en la zona de la órbita se acostumbra a presentar como

$$B = \text{const}/r^n \quad (56.10)$$

y caracterizar la velocidad de su variación por la magnitud  $n$ . La fuerza centrípeta  $F_c^{\text{nec}}$ , necesaria para asegurar que el electrón se mueve por una circunferencia de radio  $r$ , y la fuerza centrípeta  $F_c$  que surge realmente a la misma distancia  $r$  respecto al centro, se dan por las expresiones

$$\begin{aligned} F_c^{\text{nec}} &= mv_1^2/r = A_1/r, \\ F_c &= evB = A_2/r^n, \end{aligned} \quad (56.11)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son constantes ( $v = \text{const}$ ). Las gráficas de estas magnitudes para  $n > 1$  y  $0 < n < 1$  se muestran en la fig. 240. Para  $r = r_0$  se cumple la igualdad (56.6) y se realiza el movimiento por la circunferencia de radio  $r_0$ . Si por alguna causa surge un desplazamiento del electrón en un radio  $r > r_0$ , para  $n > 1$  la fuerza centrípeta  $F_c < F_c^{\text{nec}}$ . Esto significa que aparecen factores que tienden a apartar el electrón de la órbita de radio  $r_0$ . Por eso para  $n > 1$  el movimiento resulta ser inestable. Para  $n < 1$  la fuerza centrípeta  $F_c > F_c^{\text{nec}}$  y aparecen factores que tienden a hacer regresar el electrón a la órbita de radio  $r_0$ , debido a lo cual se logra la estabilidad radial. El examen del caso  $r < r_0$  conduce a la misma conclusión. Por consiguiente, la condición de la estabilidad radial del movimiento tiene el aspecto

$$0 < n < 1. \quad (56.12)$$

**Estabilidad vertical.** Se asegura siempre durante el decrecimiento de la inducción del campo magnético hacia la periferia ( $n > 0$ ), puesto que en este caso las líneas de fuerza son convexas hacia afuera (fig. 241) y al desviarse el electrón respecto a su plano surge la componente de la fuerza de Lorentz que tiende a volverlo al plano (fig. 241). Así pues, al cumplirse la condición (56.12), se asegura también la estabilidad vertical del movimiento, o sea, la desigualdad (56.12) es la condición general de la estabilidad del movimiento del electrón en el betatrón.

**Oscilaciones de betatrón.** Para pequeñas desviaciones respecto a la órbita de equilibrio ( $r = r_0$ ) los electrones efectúan cerca de ella unas oscilaciones armónicas pequeñas tanto en dirección radial, como en dirección vertical. Estas oscilaciones se denominan de betatrón. Su amplitud determina la sección de

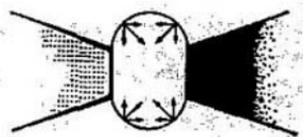


Fig. 241  
Esquema de aseguramiento de la estabilidad vertical del movimiento de los electrones en el betatrón

la cámara anular de vacío en la que se realiza el movimiento del electrón. Por lo general, las dimensiones lineales de la sección transversal de dicha cámara son aproximadamente un 5% del radio de la órbita.

**Límite de energías que se logran en el betatrón.** Como ya se ha dicho, ese límite se determina por las pérdidas de energía de los electrones en la radiación de deceleración (véase el capítulo 10). En la práctica en los betatrones se pueden obtener energías máximas que no superan 300 MeV.

Explíquense los procesos físicos que son la base de la acción de los filtros de pasos bajo y alto.

¿Cuál es la estructura del filtro de banda?

## Problemas

- Calcular la inductancia de la sección de longitud  $l$  de una línea bifilar, menospreciando la inductancia interior de los hilos. Los radios de los hilos son los mismos e iguales a  $r_0$ , la distancia entre ellos es igual a  $d$ .
- Por un conductor cilíndrico circular infinito y recto circula una corriente de densidad  $J$ . El conductor posee una cavidad cilíndrica de sección circular. Los ejes del cilindro y la cavidad son paralelos (véase la fig. 98). Hallar la inducción del campo magnético dentro de la cavidad ( $\mu = \mu_0$ ). Indicación: véase el problema 2.9.
- Existe un solenoide muy largo con densidad de devanado de  $n$  espiras por 1 m de longitud. El área de la sección transversal del solenoide es  $S$ . A través del devanado del solenoide circula una corriente de intensidad  $I$ . Por las dos partes del solenoide se introducen barras de hierro muy largas que poseen una permeabilidad magnética  $\mu$ . Las barras se encuentran pegadas densamente al devanado del solenoide. Entre las barras dentro del solenoide existe un espacio muy diminuto. Determinar la fuerza con que las barras se atraen.
- El imán eléctrico en U posee un devanado de  $n$  espiras. El área de la sección transversal, la longitud, la permeabilidad magnética del material del imán y la distancia entre los polos son, respectivamente,  $S$ ,  $l$ ,  $\mu$  y  $d$ . La intensidad de la corriente que circula por el devanado del imán es  $I$ . A los polos del imán se ha aplicado una franja del mismo material y con la misma sección transversal que el imán. Determinar la fuerza con que la franja se atrae al imán.
- Una barra metálica horizontal gira alrededor de un eje vertical que pasa a la distancia  $1/k$  de su longitud respecto a uno de sus extremos, con una frecuencia  $\nu$ . La longitud de la barra es igual a  $l$ . Determinar la diferencia de potencial entre los extremos de la barra si ella gira en un campo magnético homogéneo vertical con inducción  $B$ . Considerar que  $k = 3$ ;  $l = 1,2$  m;  $\nu = 6$  s<sup>-1</sup> y  $B = 10^{-2}$  T.
- Entre los polos redondos de un imán eléctrico grande que se alimenta de corriente alterna con frecuencia  $\nu = 1$  kHz, se forma un campo magnético que varía de manera sinusoidal con el tiempo y posee una amplitud de inducción  $B_0 = 0,5$  T. Considerando que el campo magnético es homogéneo, determinar la intensidad máxima del campo eléctrico en el espacio entre los polos del imán a la distancia  $r = 0,1$  m del centro.
- Un solenoide de radio  $b$  con  $n$  espiras, cerrado en sí mismo, gira con una velocidad angular  $\omega$  alrededor del diámetro de una de las espiras en un campo magnético homogéneo con inducción  $B$ . El eje de rotación es perpendicular al vector de inducción. La resistencia e inductancia del solenoide son  $R$  y  $L$ , respectivamente. Determinar la intensidad de la corriente que circula por el solenoide, como función del tiempo.
- Un anillo superconductor que puede moverse sólo en sentido vertical, yace en la mesa sobre una espira del conductor. A través de la espira del conductor comienza a circular una corriente de intensidad  $I$ . Como consecuencia de eso, el anillo superconductor se levanta. La inducción mutua de la espira y el anillo, elevado a una altura  $x$ , es igual a  $L_{12}(x)$ . La inductancia del anillo superconductor es  $L_{11}$ , la masa del anillo,  $m$ , y la aceleración de caída libre,  $g$ . Determinar la altura  $h$ , a la que se levanta el anillo superconductor.

- 8.9. A través de una bobina  $A_1$  se deja pasar una corriente de intensidad  $I_0$  sen  $\omega t$ . En la bobina  $A_2$  se induce la correspondiente intensidad de corriente. Las inductancias e inductancia mutua son iguales a  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_{12}$ . La resistencia de la bobina  $A_2$  es  $R_2$ . Sea  $\xi_1$  cierta coordenada generalizada que caracteriza la posición de la bobina  $A_2$ . Hallar la fuerza media generalizada  $F_1$  que está relacionada con la coordenada generalizada  $\xi_1$ .
- 8.10. En el plano yacen un conductor rectilíneo infinitamente largo y un conductor en forma de cierta circunferencia de radio  $a$  (fig. 242). La distancia entre el centro del conductor anular hasta el del rectilíneo es igual a  $d$ . Hallar la inducción mutua.

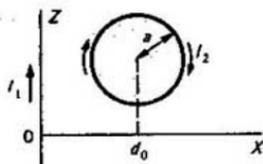


Fig. 242  
Disposición mutua de las corrientes circular y directa que están en interacción

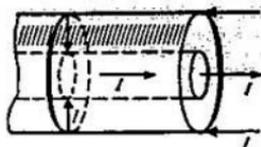


Fig. 243  
Cable con diafragma móvil

- 8.11. Los conductores circular y rectilíneo, descritos en el problema 8.10, son recorridos por corrientes de intensidades  $I_1$  e  $I_2$ . ¿Qué fuerza actúa sobre el conductor anular?
- 8.12. Hallar la inducción mutua del devanado de un toroide (fig. 195) y de un conductor rectilíneo de longitud infinita que coincide con el eje axial de simetría del toroide.
- 8.13. Hallar la inductancia del devanado del toroide de una sección circular de radio  $r$  y con  $n$  espiras. El radio mayor del toroide es igual a  $R$ .
- 8.14. Un cable coaxial, cuyo alma y envoltura tienen una conductibilidad infinita y los radios son  $r_1$  y  $r_2$ , está cortocircuitado mediante un diafragma móvil (fig. 243). Hallar la fuerza que ejerce sobre el diafragma móvil cuando por el cable circula una corriente de intensidad  $I$ .
- 8.15. Un cilindro vacío de radio  $r_2$  y un conductor cilíndrico, coaxial con él, de radio  $r_1$  que posee una conductibilidad muy elevada, se sumergen en un magnético líquido conductor con una permeabilidad magnética  $\mu$  y una densidad de masa  $\rho$  (fig. 244). El circuito es recorrido por una corriente de intensidad  $I$ . Hallar la altura a la que sube el magnético líquido en el cilindro.
- 8.16. Un cilindro dieléctrico de radio  $a$  gira alrededor de su eje con una velocidad angular  $\omega$ , paralelamente a la cual está dirigido el vector de inducción  $B$  de un campo magnético continuo. Hallar la polarización del cilindro y la densidad superficial de la carga ligada. La constante dieléctrica de la substancia del cilindro es igual a  $\epsilon$ .
- 8.17. Un disco conductor fino con conductividad  $\gamma$  se encuentra en un campo magnético alternativo, cuya inducción es  $B = B \cos(\omega t + \varphi)$  y está dirigida perpendicularmente al plano del disco. Hallar la densidad de las corrientes de Foucault inducidas en el disco.
- 8.18. Hallar la inductancia del devanado de un toroide de  $n$  espiras de sección cuadrada con lado  $a$ . El radio mayor del toroide es igual a  $R$ .

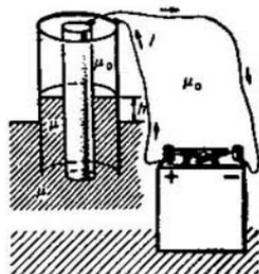


Fig. 244  
Arrastre del magnético hacia el espacio entre los conductores coaxiales con corriente

- 8.19. Un bucle redondo de radio  $a$  gira alrededor de su diámetro con una velocidad angular constante  $\omega$  en un campo magnético homogéneo de inducción  $B$ . Su resistencia óhmica es  $R$  y el eje de rotación es perpendicular a  $B$ . Hallar la intensidad de la corriente  $I(t)$ , el momento de las fuerzas que frenan la rotación del cuadro  $M(t)$  y la potencia media ( $P$ ) que se gasta en mantener constante la velocidad angular de rotación del cuadro. A título de punto de referencia  $t=0$  tómese el momento en que el plano del bucle es perpendicular a  $B$ .
- 8.20. La sección de un circuito consta de dos tubos cilíndricos coaxiales de radios  $a_1$  y  $a_2$  ( $a_2 > a_1$ ) y de longitud  $l$ . En uno de los extremos los tubos se unen mediante una placa plana conductora. Hallar la inductancia de la sección del circuito.
- 8.21. Dos espiras de alambre circulares planas cerradas de radios  $a_1$  y  $a_2$  yacen en un plano a una distancia  $d$  la una de la otra. Considerando que la distancia  $d$  es bastante grande y que se puede hacer uso de la aproximación dipolar, hallar la inductancia mutua de los circuitos.
- 8.22. La inducción magnética  $B_0$  entre los polos paralelos planos de un imán eléctrico puede considerarse constante y homogénea. En el espacio entre los polos se introduce una placa de área  $S$  hecha de material paramagnético con susceptibilidad magnética  $\chi_p$ . Sus superficies son paralelas a las superficies de los polos del imán eléctrico. Hallar la fuerza que actúa sobre la placa.
- 8.23. Hallar la fuerza radial que actúa sobre el toroide, cuyos datos se citan en el problema 8.13, si por él circula una corriente de intensidad  $I$ .
- 8.24. Dos circuitos idénticos con inductancias  $L = L_{11} = L_{22}$  se encuentran de tal manera que su inductancia mutua  $L_{12}^{(0)} = 0$ . Los circuitos son recorridos por corrientes superconductoras de intensidad  $I_0$ . Después de eso cambia la posición recíproca de los circuitos, como consecuencia de lo cual su inductancia mutua se hace igual a  $L_{12}$ . Hallar la intensidad de corrientes en el estado final.
- 8.25. Un circuito eléctrico consta de cuatro nudos. Tres de ellos coinciden con los vértices de un triángulo equilátero y el cuarto, con su centro (el punto de intersección de las medianas o bisectrices). Entre los vértices del triángulo las capacidades de las secciones son iguales a  $C$  ( $R = 0, L = 0$ ) y entre los vértices del triángulo y su centro se conectan inductancias  $L$  ( $R = 0, C = 0$ ). Hallar la frecuencia de resonancia del sistema.

## Respuestas

- 8.1.  $L = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{d}{r_0}$ . 8.2.  $B = (\mu_0/2) j \times r$ . 8.3.  $F = \frac{S}{2} \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} n^2 I^2$ . 8.4.  $F = \frac{S}{(l+d)} \times \frac{\mu^2}{\mu_0} n^2 I^2$ . 8.5.  $U = \pi v l^2 \frac{k-2}{k} B = 9.1 \text{ B}$ . 8.6.  $E = B_0 \omega r/2 = 156 \text{ V/m}$ . 8.7.  $I = \pi b^2 n B \omega \times (R_1 t \omega^2 L^2)^{-1/2} \sin(\omega t + \varphi_0)$ . 8.8.  $h = \frac{1}{2} \frac{I^2}{mg} \frac{1}{L_{11}} \{ [L_{12}(0)]^2 - [L_{12}(h)]^2 \}$ . 8.9.  $F_1 = -\frac{1}{2} \frac{I_0^2 \omega^2 L_1 L_{12}}{R^2 + \omega^2 L_1^2} \frac{\partial L_{12}}{\partial \xi_1}$ . 8.10.  $L_{12} = \mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2})$ . 8.11.  $F_x = -\mu_0 I_1 I_2 \times \left( \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} - 1 \right)$ . 8.12.  $L_{12} = \frac{\mu_0 n d}{2\pi} \ln(r_2/r_1)$ . 8.13.  $L = \mu_0 n^2 (R - \sqrt{R^2 - r^2})$ . 8.14.  $F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln(r_2/r_1)$ . 8.15.  $h = \frac{(\mu - \mu_0) I^2 \ln(r_2/r_1)}{4\pi^2 \rho g (r_2^2 - r_1^2)}$ . 8.16.  $P = (\epsilon - \epsilon_0) B \omega r$ ,  $\sigma_{1lg} = (\epsilon - \epsilon_0) B \omega a$ . 8.17.  $j = (1/2) \gamma \omega B_0 \times r \sin(\omega t + \varphi)$ . 8.18.  $L = \frac{\mu_0 n^2 a}{2\pi} \ln \left( \frac{2R+a}{2R-a} \right)$ . 8.19.  $I(t) = \frac{\pi a^2 \omega B}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$ ,  $\text{tg } \varphi = \omega L/R$ ;  $M(t) = -\frac{\pi^2 a^4 B^2 \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)$ ;  $\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} \frac{(\pi a^2 \omega B)^2}{R^2 + \omega^2 L^2} R$ . 8.20.  $L = [\mu_0 l / (2\pi)] \ln(a_2/a_1)$ . 8.21.  $L_{12} = \mu_0 \pi a_1^2 a_2^2 / (4d^3)$ . 8.22.  $F = \chi_p S B_0^2 / [2\mu_0 (1 + \chi_p)]$ . 8.23.  $F = \mu_0 I^2 n^2 (R / \sqrt{R^2 - r^2} - 1)$ . 8.24.  $I = I_0 L / (L + L_{12})$ . 8.25.  $\omega_0 = (3LC)^{-1/2}$ .

## Ondas electromagnéticas

El campo magnético variable engendra un campo eléctrico variable que, a su vez, origina el campo magnético variable que, a su vez, engendra el campo eléctrico variable, etc. En definitiva, se forman los campos magnético y eléctrico, enlazados entre sí, que componen la onda electromagnética. Esta se "desprende" de las cargas y corrientes que la originan. El procedimiento de la existencia de la onda electromagnética hace imposible su inmovilidad en el espacio y la constancia de las intensidades de sus campos con el tiempo.

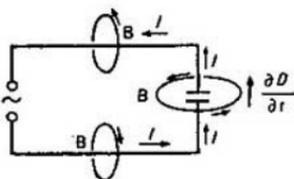
### § 57. Corriente de desplazamiento

*Se examina el contenido físico de la corriente de desplazamiento. Se realiza la consideración de la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell.*

**Esencia del proceso.** La corriente continua no recorre el circuito con condensador, mientras que la corriente alterna sí. La intensidad de la corriente estacionaria de conducción en todos los elementos, acoplados en serie, del circuito es la misma. En el condensador no puede existir la corriente de conducción, relacionada con el movimiento de los electrones, ya que las armaduras del condensador están separadas por un dieléctrico. Por esta razón, es necesario sacar la conclusión de que en el condensador transcurre cierto proceso que como si cerrara la corriente de conducción, es decir, en cierto sentido garantiza el intercambio de carga entre las armaduras del condensador sin transferir la carga entre ellas. Dicho proceso se denomina **corriente de desplazamiento**.

Examinemos un circuito de corriente alterna que posee un condensador plano (fig. 245). Entre las armaduras del condensador existe un campo eléctrico con intensidad  $E = \delta/\epsilon$ , donde  $\delta$  es la densidad de la carga en la armadura y  $\epsilon$ , la constante dieléctrica de la substancia entre las armaduras. El desplazamiento eléctrico entre las armaduras del condensador es igual a  $D = \delta = Q/S$ , donde  $Q$  es la carga en cada una de las armaduras y  $S$ , el área de la armadura. La intensidad de la corriente en el circuito es  $I = \partial Q/\partial t$ . De aquí se desprende que

$$I_{des} = S \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (57.1)$$



o sea, el proceso que cierra la corriente de conducción en el circuito es la variación del despla-

Fig. 245  
Corriente de desplazamiento

zamiento eléctrico entre las armaduras del condensador, con la particularidad de que en la fórmula (57.1) la magnitud  $I$  se da con el índice «des» («desplazamiento»), para mostrar que no es la corriente de conducción la que existe entre las armaduras, a pesar de que  $I = I_{des}$ . La densidad de corriente de desplazamiento en el espacio entre las armaduras es igual a  $j_{des} = I_{des}/S = \partial D/\partial t$ . Teniendo en cuenta que la dirección de  $j_{des}$  en cada punto entre las armaduras del condensador plano coincide con la dirección de  $\partial D/\partial t$ , en lugar de (57.1) puede escribirse la siguiente relación diferencial:

$$j_{des} = \partial D/\partial t. \quad (57.2)$$

Partiendo del carácter local de esta relación es de esperar su independencia del modelo no local (el condensador plano), en cuyos márgenes se obtiene. En efecto, es así. La fórmula (57.2) determina la densidad volumétrica de la corriente de desplazamiento  $j_{des}$ . En 1864 Maxwell enunció teóricamente el postulado sobre la existencia de la corriente de desplazamiento. En lo sucesivo otros científicos lo demostraron experimentalmente.

¿Por qué la velocidad de variación del vector de desplazamiento se denomina densidad de corriente? La igualdad matemática de por sí misma de la magnitud  $S\partial D/\partial t$  que caracteriza el proceso entre las armaduras del condensador, y las intensidades de las corrientes de conducción fuera de las armaduras del condensador, es decir, la igualdad de dos magnitudes, pertenecientes a distintas zonas del espacio y que poseen distinta naturaleza física, no contiene en general, ninguna ley física. Por eso sólo formalmente se puede denominar «corriente» a la expresión  $S\partial D/\partial t$ . Para que este nombre adquiera sentido físico; es necesario demostrar que  $S\partial D/\partial t$  posee las propiedades más características de la corriente, a pesar de que no representa el movimiento de las cargas eléctricas como la corriente de conducción. La propiedad principal de la corriente de conducción es su capacidad de engendrar el campo magnético. Por eso, la cuestión decisiva es de si origina la corriente de desplazamiento un campo magnético como lo engendra la corriente de conducción, o si mejor dicho, origina la magnitud (57.2) un campo magnético, semejante al que crea la densidad volumétrica de la corriente de conducción, igual a ella. Maxwell dio una respuesta afirmativa.

La verificación experimental de la corrección de esta respuesta consiste en lo siguiente. Según la ley de la corriente total, la circulación del vector  $B$  por el contorno que abarca la corriente, es igual a  $\mu_0 I$ . La circulación puede medirse con ayuda de la espiral de Rogowski. Desplazándola a lo largo del contorno, vemos que la circulación no varía incluso entonces cuando la espiral de Rogowski la abarca el condensador. Pero eso significa precisamente que la corriente de desplazamiento origina en el condensador un campo magnético, semejante al que crea la correspondiente corriente de conducción. No obstante, la afirmación más obvia de que la corriente de desplazamiento origina un campo magnético es la existencia de las ondas electromagnéticas. De no crear la corriente de desplazamiento un campo magnético, no podrían existir las ondas electromagnéticas.

Ecuación de Maxwell con corriente de desplazamiento. La generación del campo magnético por medio de la corriente de conducción se describe mediante la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad (57.3)$$

Teniendo en cuenta la creación del campo mediante la corriente de desplazamiento, es necesario generalizar dicha ecuación así

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{des}}. \quad (57.4)$$

Entonces, tomando en consideración (57.2), obtenemos definitivamente la ecuación

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (57.5)$$

que es una de las ecuaciones de Maxwell.

**Naturaleza relativista de la corriente de desplazamiento.** Al transformar los campos de un sistema de coordenadas a otro, los campos eléctrico y magnético se determinan mutuamente (véase el § 11). Si en cierto sistema de coordenadas existe un campo magnético heterogéneo, en el otro sistema de coordenadas dicho campo es alternativo respecto al tiempo y al mismo tiempo aparece el campo eléctrico. Pero esto es precisamente lo que testimonia el hecho de que el campo eléctrico alternativo engendra el campo magnético. No obstante, de aquí no se desprende que la creación del campo magnético mediante el campo eléctrico alternativo no es un nuevo fenómeno fundamental en la física de la electricidad y el magnetismo. Aquí la situación es semejante a la que fue examinada con detalle en los §§ 45, 46 con relación a la inducción electromagnética. *La originación del campo magnético por el campo eléctrico alternativo es un fenómeno fundamental de la naturaleza.*

La igualdad formal de la corriente de desplazamiento en el condensador y la corriente de conducción en los hilos, conectados a sus armaduras, no contiene ninguna ley física. La nueva ley física consiste en que la corriente de desplazamiento crea un campo magnético, igual que el que origina la corriente de conducción, correspondiente a ella.

**Ejemplo 57.1.** *Entre las armaduras de un condensador plano hay dos capas de material que es débil conductor y posee las conductividades  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  y las constantes dieléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . Los grosores de las capas son respectivamente iguales a  $a_1$  y  $a_2$  (fig. 246). Las áreas de las armaduras del condensador son  $S$ . Investigar el proceso de establecimiento de la intensidad de la corriente en el circuito si en el momento  $t = 0$  a las armaduras del condensador se les aplica una diferencia de potencial constante  $U_0$ . Examinar los procesos que surgen al desconectar el circuito y al poner en derivación la fuente de fem exteriores.*

Al conectar la tensión, en la superficie de separación de las capas no puede surgir instantáneamente la carga superficial. Por eso inicialmente el sistema en cuestión se comporta como si la conductividad de la substancia entre las placas fuese nula, es decir, se comporta como un condensador ideal. Por esta razón, en el espacio

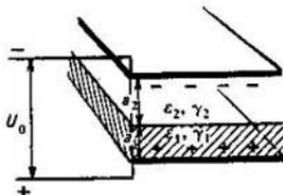


Fig. 246  
Condensador plano de dos capas de fuga

entre las placas aparece el desplazamiento

$$D = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2, \quad (57.6)$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son las intensidades del campo eléctrico en la primera y segunda capas, respectivamente. Ya que la diferencia de potencial entre las placas es  $U_0$ ,

$$\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = a_1 E_1 + a_2 E_2 = U_0, \quad (57.7)$$

donde en calidad de camino de integración de la primera placa a la segunda se toma el camino por la normal a las placas. De las fórmulas (57.6) y (57.7) se desprende que

$$D = \epsilon_1 \epsilon_2 U_0 / (\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2). \quad (57.8)$$

Toda la corriente en el momento inicial es corriente de desplazamiento. Es igual a la infinidad, ya que la diferencia de potencial se conecta instantáneamente y  $D$  crece rápidamente desde 0 hasta el valor, determinado por la fórmula (57.8). La densidad superficial de la carga en las placas también aumenta espontáneamente desde 0 hasta  $\sigma_1 = -\sigma_2 = D$ .

Las variaciones instantáneas del desplazamiento desde 0 hasta un valor finito se determinan por una velocidad muy grande de surgimiento de la polarización de la substancia bajo la influencia del campo exterior. La polarización aparece en el transcurso de tiempo, característico para los procesos intermoleculares.

En los siguientes momentos de tiempo, después de la conexión, la intensidad de la corriente de conducción comienza a crecer y al pasar un lapso suficiente ( $t \rightarrow \infty$ ) se establece el valor equilibrado de la densidad de la corriente:

$$j = \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2 = \gamma_1 \gamma_2 U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \quad (57.9)$$

donde se tuvo en cuenta la relación (57.7). Dado que la conductividad es heterogénea, en la superficie de separación de las capas existe una carga con densidad superficial

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = (\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \quad (57.10)$$

donde se hizo uso de la condición de frontera (17.36), ya que la intensidad del campo eléctrico no depende del tiempo.

En el régimen transitorio hasta lograr los valores estacionarios (57.9) y (57.10), las corrientes de conducción en la primera y segunda capas son diferentes y la densidad de la carga en la superficie de separación de las capas aumenta con el tiempo. La suma de las densidades volumétricas de las corrientes de conducción y de desplazamiento, denominada densidad volumétrica total de la corriente

$$j_t = \gamma_1 E_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_1 E_1) = \gamma_2 E_2 + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_2 E_2), \quad (57.11)$$

tiene el mismo valor en ambas capas en el régimen transitorio. Después de excluir  $E_2$  de (57.11), con ayuda de (57.7) obtenemos la ecuación para  $E_1$ :

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{E_1}{\tau} = \frac{\gamma_2 U_0}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2}, \quad (57.12)$$

donde

$$\tau = (\epsilon_1 a_2 + \epsilon_2 a_1) / (\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1). \quad (57.13)$$

Una ecuación analógica se obtiene también para  $E_2$ .

La solución de estas ecuaciones para la condición inicial (57.8) es así:

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2} e^{-t/\tau}, \quad (57.14)$$

$$E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2} e^{-t/\tau}. \quad (57.15)$$

Para  $t \rightarrow \infty$  estas soluciones, así como debe de ser, adquieren la forma (57.9).

La densidad superficial de la carga entre las capas varía según la ley

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} (1 - e^{-t/\tau}) U_0. \quad (57.16)$$

Para  $t = 0$  la densidad superficial de la carga  $\sigma = 0$  y para  $t \rightarrow \infty$ , ella, como era de esperar, tiende a (57.10).

La densidad total de corriente se encuentra de la expresión (57.11), teniendo en cuenta (57.14), y (57.15):

$$j_t = \gamma_1 E_1 + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 E_1) = \gamma_2 E_2 + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_2 E_2) = \left[ \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)} + \left( \gamma_1 - \frac{\varepsilon_1}{\tau} \right) \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} \right) e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} \delta(t) \right] U_0, \quad (57.17)$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta. Ella surge a causa de que el desplazamiento  $D$  para  $t = 0$  crece instantáneamente desde 0 hasta (57.8). Con otras palabras, al calcular la derivada respecto al tiempo en (57.17), tenemos

$$\frac{\partial (\varepsilon_1 E_1)}{\partial t} = \varepsilon_1 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_1 a_2} \delta(t), \quad (57.18)$$

y al calcular  $\partial E_1 / \partial t$  en la fórmula (57.18), hacemos uso de la expresión (57.14), válida para todos  $t > 0$ .

El análisis realizado muestra que la distribución de las tensiones por diversas secciones del circuito al conectar la tensión exterior, puede diferenciarse esencialmente de la distribución en el régimen establecido. Esta circunstancia debe tomarse en consideración cuando se calculan los circuitos.

Al abrir el circuito,  $j_t = 0$  y, por lo tanto, las ecuaciones (57.11) adquieren la forma:

$$\gamma_1 E_1 + \frac{\partial (\varepsilon_1 E_1)}{\partial t} = 0, \quad \gamma_2 E_2 + \frac{\partial (\varepsilon_2 E_2)}{\partial t} = 0. \quad (57.19)$$

Los campos se descomponen independientemente. En el régimen establecido, como se ve de las ecuaciones (57.14) y (57.15),

$$E_{10} = \gamma_2 U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2), \quad (57.20)$$

$$E_{20} = \gamma_1 U_0 / (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2).$$

La solución de las ecuaciones (57.19) para las condiciones iniciales (57.20) tiene el aspecto:

$$E_1 = \frac{\gamma_2 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} e^{-t/\tau_1}, \quad E_2 = \frac{\gamma_1 U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} e^{-t/\tau_2}, \quad (57.21)$$

donde  $\tau_1 = \varepsilon_1 / \gamma_1$ ,  $\tau_2 = \varepsilon_2 / \gamma_2$ .

La diferencia de potencial entre los terminales abiertos varía de la manera siguiente:

$$U = a_1 E_1 + a_2 E_2 = \frac{U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} [\gamma_2 a_1 e^{-t/\tau_1} + \gamma_1 a_2 e^{-t/\tau_2}], \quad (57.22)$$

La densidad superficial de la carga en la superficie de separación de las capas en el condensador se determina por la fórmula

$$\sigma = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{U_0}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} [\varepsilon_2 \gamma_1 e^{-t/\tau_2} - \varepsilon_1 \gamma_2 e^{-t/\tau_1}]. \quad (57.23)$$

Al shuntar la fuente de las fem exteriores,  $U_0 = 0$  y las ecuaciones (57.7) y (57.12) toman la forma:

$$-a_1 E_1 + a_2 E_2 = 0, \quad (57.24)$$

$$\frac{dE_1}{dt} + \frac{E_1}{\tau} = 0, \quad (57.25)$$

donde  $\tau$  se define mediante la expresión (57.13). La condición inicial para  $t = 0$  se halla de la expresión (57.10) teniendo en cuenta (57.24):

$$\epsilon_2 E_{20} - \epsilon_1 E_{10} = - \left( \frac{\epsilon_2 a_1}{a_2} + \epsilon_1 \right) E_{10} = \frac{\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} U_0. \quad (57.26)$$

La solución de la ecuación (57.25) con el valor inicial de  $E_{10}$  que se desprende de (57.26) es la siguiente:

$$E_1 = -E_2 a_2 / a_1 = - \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) a_2 U_0}{(\epsilon_2 a_1 + \epsilon_1 a_2) (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)} e^{-t/\tau}. \quad (57.27)$$

La intensidad de la corriente en el circuito y la densidad superficial de la carga entre las capas son iguales a:

$$I = \left[ \frac{(\gamma_1 \epsilon_2 - \gamma_2 \epsilon_1)}{(\epsilon_1 a_2 + \epsilon_2 a_1)} \right]^2 \frac{a_1 a_2 U_0}{(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)} e^{-t/\tau} - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 U_0}{\epsilon_1 a_2 + \epsilon_2 a_1} \delta(t) S, \quad (57.28)$$

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2}{\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2} U_0 e^{-t/\tau}. \quad (57.29)$$

El término con la función  $\delta$  en (57.28) a causa de que en el momento del shuntado de la fuente de fem exteriores, el desplazamiento  $D$  cambió a salto desde el valor, correspondiente a la fórmula (57.9) para el régimen establecido, hasta el valor, correspondiente a las condiciones normales para  $t = 0$  según la fórmula (57.26).

## § 58. Sistema de ecuaciones de Maxwell

*Se examinan el sentido físico, las condiciones de aplicación, la completitud y compatibilidad del sistema de ecuaciones de Maxwell.*

**Sistema de ecuaciones de Maxwell.** Las ecuaciones (57.5), (46.5), (36.4) y (17.30), obtenidas en los párrafos anteriores como consecuencia de la generalización de los hechos experimentales, forman el sistema de ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, & \text{(I)} & \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, & \text{(III)} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t, & \text{(II)} & \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho. & \text{(IV)} \end{aligned} \quad (58.1a)$$

Estas ecuaciones, denominadas de campo, son aplicables para describir todos los fenómenos electromagnéticos macroscópicos. Al examinar una situación concreta es necesario tener en cuenta las propiedades electromagnéticas de los medios materiales. En muchos casos eso se logra usando las relaciones (17.31), (38.24) y (16.5):

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad (V), \quad (58.1b)$$

llamadas por lo general, ecuaciones materiales. Sin embargo, existe una cantidad de fenómenos cuando las ecuaciones materiales tienen otro aspecto (por ejemplo, los fenómenos no lineales) y su composición representa una tarea científica independiente.

**Sentido físico de las ecuaciones.** La ecuación (I) expresa la ley por la que el campo magnético se origina por las corrientes de conducción y de desplazamiento, que son las dos fuentes posibles del campo magnético.

La ecuación (II) es la ley de inducción electromagnética e indica que el campo magnético variable puede ser una de las fuentes posibles que engendran el campo eléctrico. La segunda fuente del campo eléctrico son las cargas eléctricas, la creación del campo por las cuales se describe mediante la ecuación (IV) que expresa la ley de Coulomb. El sentido físico de la ecuación (III) se discute detalladamente con relación a (36.4).

Las ecuaciones materiales (I) son las relaciones entre los vectores del campo y de las corrientes que tienen en cuenta las propiedades del medio material. La consideración de las propiedades dieléctricas que se describen desde el punto de vista fenomenológico mediante la polarización, está en la constante dieléctrica  $\epsilon$ ; la consideración de las propiedades magnéticas que se describen fenomenológicamente por la imanación, se encuentra en la permeabilidad magnética  $\mu$  y la consideración de las propiedades conductoras del medio, en la conductividad  $\gamma$ .

Las ecuaciones del campo son lineales, que tienen en cuenta el principio de superposición que es un hecho experimental independiente.

**Condiciones de aplicación de las ecuaciones.** Durante la argumentación de las ecuaciones (58.1) se ve que son válidas para las siguientes condiciones:

- 1) los cuerpos materiales en el campo son inmóviles;
- 2) las constantes materiales  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  pueden depender de las coordenadas, pero no deben ser funciones del tiempo y de los vectores del campo;
- 3) en el campo están ausentes los imanes permanentes y los cuerpos ferromagnéticos.

Para tener en cuenta el movimiento del medio lo más sencillo es obrar de esta manera. La presencia del medio en los fenómenos magnéticos y eléctricos se reduce, a fin de cuentas, a la existencia de cargas en el medio y su movimiento. Por eso puede partirse de las ecuaciones de Maxwell para el vacío ( $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ), y tener en cuenta el medio de la misma manera que se hizo en los §§ 17 y 38, pero tomando en consideración el movimiento de las cargas. En definitiva resulta que las ecuaciones del campo (58.1) se conservan sin cambiar de aspecto y toda la consideración del movimiento del medio se reduce a la modificación de las ecuaciones materiales (58.1b) que se hacen dependientes de la velocidad del medio y se complican considerablemente. Entonces terminan de ser relaciones entre dos magnitudes (por ejemplo, entre  $D$  y  $E$ , etc.), sino que «se agarran» una de otra. Verbigracia, la densidad de la corriente de conducción comienza a depender de la inducción del campo magnético, mientras que antes era función sólo de la intensidad del campo eléctrico, etc.

El campo fuera de los imanes permanentes y las sustancias ferromagnéticas, suponiendo que se conoce su imanación, puede describirse con ayuda de las ecuaciones de Maxwell. Pero resolver el problema en presencia de materiales ferromagnéticos en el espacio cuando, por ejemplo, se prefijan las corrientes, no se puede mediante las ecuaciones de Maxwell. Son inaplicables para este caso.

**Completitud y compatibilidad del sistema de ecuaciones.** Aplicando las ecuaciones materiales (58.1b) de las ecuaciones de campo (58.1a) pueden excluirse las magnitudes  $D$ ,  $H$  y  $j$ , como consecuencia de lo cual se convierten en ecuaciones respecto a los vectores  $E$  y  $B$ , o sea, respecto a seis componentes independientes incógnitas de estas magnitudes. Por otra parte, la cantidad de ecuaciones escalares en (58.1a) es igual a ocho. Resulta que existen ocho ecuaciones para seis magnitudes incógnitas, es decir, la cantidad de ecuaciones supera el número de incógnitas, lo que es inadmisibles, ya que el sistema de ecuaciones aparenta estar repleto.

En cambio, en realidad el sistema no está repleto y no surge ninguna dificultad. Eso se determina por el hecho de que las ecuaciones (I) y (IV), (II) y (III) tienen los mismos corolarios diferenciales y por eso están ligadas entre sí, a pesar de que no se puede decir que algunas de ellas sean consecuencias de las otras.

Para demostrar que los corolarios diferenciales de las ecuaciones (II) y (III) son iguales, apliquemos a los dos miembros de la ecuación (II) la operación  $\text{div}$  y ambos miembros de la ecuación (III) diferenciémoslos respecto al tiempo. En los dos casos resulta una misma ecuación  $\partial \text{div } B / \partial t = 0$ .

Demostremos que teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (58.2)$$

la ecuación (IV) puede considerarse como corolario diferencial de la ecuación (I). Para ello apliquemos la operación  $\text{div}$  a los dos miembros de la ecuación (I):

$$\text{div } j + \partial \text{div } D / \partial t = 0, \quad (58.3)$$

donde  $\text{div } \text{rot } H = 0$ . Comparando (58.3) y (58.2), vemos que debe cumplirse la igualdad

$$\text{div } D = \rho, \quad (58.4)$$

que coincide con la ecuación (IV). Así queda demostrado que (IV) es un corolario diferencial de la ecuación (I), teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga.

La presencia de dos enlaces diferenciales entre las ecuaciones (I — IV) hace este sistema compatible. Un análisis más detallado muestra que el sistema de ecuaciones es completo y su solución es unívoca para las condiciones iniciales y de frontera prefijadas. La demostración de la unicidad de la solución se reduce, en rasgos generales, a lo siguiente. Si existen dos distintas soluciones, su diferencia debido al carácter lineal de las ecuaciones de Maxwell, es también una solución, pero para las cargas y corrientes nulas, así como para las condiciones iniciales y de frontera nulas. De aquí, haciendo uso de la expresión para la energía del campo electromagnético y del principio de conservación de la energía, saca-

mos la conclusión de que la diferencia de las soluciones es idénticamente igual a cero, es decir, las soluciones son iguales. Así queda demostrada la unicidad de la solución de las ecuaciones de Maxwell.

### § 59. Principio de conservación de la energía del campo electromagnético. Flujo de energía

*Se da la enunciación matemática del principio de conservación de la energía y se examina el concepto de flujo de energía electromagnética.*

**Enunciación.** La energía del campo magnético y eléctrico se define mediante las fórmulas (18.16) y (47.27). En los §§ 19 y 39 se investigaron las fuerzas en los campos magnético y eléctrico, bajo cuya influencia se efectúa el trabajo. En el § 49 se determinó el trabajo de la corriente alterna y en el § 27 se estudió el efecto térmico de la corriente. El principio de conservación de la energía requiere que todos esos procesos sean enunciados en forma de principio de conservación y transformación mutua de distintas formas de energía. Puesto que en este caso las fuentes de producción de la energía electromagnética están separadas en el espacio de los lugares de su consumo, surge la idea sobre el movimiento de la energía que se caracteriza por su flujo.

Examinemos cierto volumen  $V$  cerrado en el que existen el campo electromagnético y las corrientes (fig. 247). El calor de Joule que se desprende por las corrientes en este volumen es

$$P = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (59.1)$$

Para simplificar el cálculo, se supone que no hay transformaciones algunas de energía en el volumen. Poniendo en (59.1) la expresión para  $\mathbf{j}$  de la ecuación (58.1a), obtenemos

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV. \quad (59.2)$$

Según la fórmula (A.15), tenemos

$$\text{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} \quad (59.3)$$

y, por lo tanto,

$$P = - \int_V \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} dV - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV - \int_V \text{div} \mathbf{E} \times \mathbf{H} dV, \quad (59.4)$$

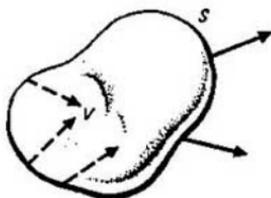


Fig. 247  
Para la enunciación del principio de conservación de la energía

donde  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Teniendo en cuenta que  $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}$  y  $\frac{\mathbf{E} \cdot \partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})}{\partial t}$ , y transformando la última integral en (59.4) por el teorema de Gauss—Ostrogradski en integral respecto a la superficie  $\sigma$ , que limita el volumen  $V$ , en definitiva obtenemos

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \right] - \int_{\sigma} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\sigma. \quad (59.5)$$

Aquí la superficie se designa por  $\sigma$  para conservar la letra  $S$  con el fin de denotar la densidad del flujo de la energía electromagnética.

#### Flujo de energía.

La magnitud

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \quad (59.6)$$

caracteriza la energía electromagnética, incluida en el volumen  $V$ . La magnitud

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}} \quad (59.7)$$

es la densidad del flujo de energía a través de la superficie que limita el volumen  $V$  y se denomina vector de Poynting. Fue obtenida por J. H. Poynting (1852—1914) en 1884. Pero diez años antes, en 1874, N. A. Umov (1846—1915) realizó una investigación general del movimiento de la energía en los cuerpos, que se caracterizaba por el correspondiente flujo de energía. Por esta razón el vector (59.7) se llama también vector de Umov—Poynting. La igualdad (59.4) es más cómodo escribirla así

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma}, \quad (59.8)$$

es decir, el cambio de la energía del campo electromagnético en el volumen transcurre debido al trabajo de las corrientes de conducción en dicho volumen y del flujo de energía que atraviesa la superficie que limita el volumen. Si la energía del campo eléctrico no varía,  $\partial W / \partial t = 0$ , entonces [véase (59.8)]

$$P = - \int_{\sigma} \mathbf{S} \cdot d\sigma. \quad (59.9)$$

Por consiguiente, todo el trabajo que se efectúa en un volumen cerrado se realiza a cuenta del flujo de energía electromagnética que atraviesa la superficie que limita el volumen.

La igualdad (59.8) expresa el principio de conservación de la energía del campo electromagnético.

Es necesario subrayar que (59.8) es precisamente la expresión del principio de conservación de la energía, pero de ninguna manera su demostración.

Al confeccionar la teoría de la electricidad y el magnetismo se supone que está prefijado el principio de conservación de la energía como una ley general de la naturaleza. Partiendo del principio de conservación de la energía como ley general, puede hallarse la expresión matemática para la densidad volumétrica de la energía de los campos eléctrico y magnético y la densidad de la energía de los campos eléctricos y magnéticos y la densidad del flujo de energía electromagnética. También se establece la relación entre ellas que expresa la idea del movimiento de la energía electromagnética. En la fórmula (59.8) la magnitud física  $P$  toma en consideración la posibilidad de transformar mutuamente las diversas formas de energía.

## § 60. Movimiento de la energía electromagnética a lo largo de las líneas de transporte

*Se examinan el cuadro físico del movimiento de la energía a lo largo de las líneas de transporte y las características principales de las líneas de transporte.*

**Mecanismo de compensación de las pérdidas de energía en calor de Joule.** Examinemos una parte del conductor de sección circular de radio  $r$ , a lo largo del cual

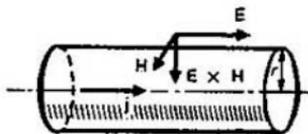


Fig. 248  
Mecanismo de compensación de las pérdidas de corriente en liberar el calor de Joule

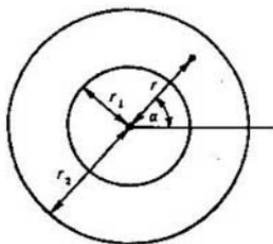


Fig. 249  
Transmisión de la energía electromagnética con ayuda de la corriente por un cable

pasa una corriente continua de densidad volumétrica  $j$  (fig. 248). Según la ley de Ohm en forma diferencial la intensidad del campo eléctrico, paralela al eje del conductor es igual a

$$E = j/\gamma. \quad (60.1)$$

Debido a la condición de frontera respecto a la continuidad de las componentes tangenciales de la intensidad del campo eléctrico, un campo semejante existe fuera del conductor en las inmediaciones de su superficie.

Calculemos por la fórmula (59.9) el flujo de energía electromagnética que atraviesa la superficie cerrada del cilindro, cuya superficie lateral coincide con

la superficie del conductor de longitud  $l$  y de bases sirven las secciones circulares del conductor.

La intensidad del campo magnético en la superficie del conductor está dirigida por la tangente a la superficie, perpendicular al eje del conductor (y al vector  $\mathbf{j}$ ) (fig. 248) y es igual a

$$H = j\pi r^2/(2\pi r) = j/(2r). \quad (60.2)$$

De esta manera, el vector de Poynting (59.7) está orientado por el radio respecto al eje del conductor y es igual a

$$S = EH = j^2 r/(2\gamma). \quad (60.3)$$

Eso significa que la energía electromagnética confluye en el conductor del espacio circundante a través de su superficie lateral. El flujo de energía a través de las bases del cilindro está ausente. En la parte del conductor de longitud  $l$  en el transcurso de 1 s confluye la energía

$$P = S \cdot 2\pi r l = (j^2/\gamma) \cdot \pi r^2 l. \quad (60.4)$$

Según la ley de Joule—Lenz, en la longitud  $l$  del conductor durante 1 s se desprende una cantidad de calor

$$P' = (j^2/\gamma) \pi r^2 l. \quad (60.5)$$

La comparación de (60.4) y (60.5) muestra que toda la energía que se libera en forma de calor en el conductor, al recorrerlo una corriente eléctrica, ingresa del espacio circundante a través de la superficie lateral del conductor. Por lo tanto, la energía que se transmite mediante la corriente eléctrica, se mueve en el espacio que rodea el conductor. Los cables desempeñan el papel de guías, a lo largo de los cuales se mueve la energía electromagnética, con la particularidad de que la densidad del flujo de energía en cualquier punto del espacio se determina por el vector de Poynting.

**Movimiento de la energía a lo largo del cable.** Por el cable central la corriente se mueve en una dirección, mientras que por la envoltura del cable, en dirección contraria (fig. 249). Entre el alma central y la envoltura se encuentra un dieléctrico. Para simplificar los cálculos supongamos que la resistencia de los hilos del cable es insignificante, por lo que se puede menospreciar, o sea, puede considerarse que la energía se transporta sin pérdidas. Entonces el potencial a lo largo del alma central y la envoltura es constante y la variación del potencial entre ellos transcurre en el consumidor de la energía y en la fuente (fem exterior). Sea la caída del potencial en el consumidor de energía igual a  $U$ . Eso significa que la diferencia de potencial entre el alma y la envoltura es  $U$ . Por lo tanto, entre ellos existe un campo eléctrico. Debido a la simetría axial del problema y a que la corriente circula a lo largo del cable sin resistencia alguna, la intensidad de dicho campo está dirigida por el radio, mientras que la componente tangencial  $E_{\alpha}$  está ausente. El eje  $Z$  del sistema de coordenadas cilíndricas coincide con el eje del cable. Las líneas de fuerza del campo magnético son circunferencias concéntricas con centro en el eje del cable. La intensidad del campo difiere de cero sólo en el espacio entre el alma y la envoltura.

pués fuera del cable es nula. La componente radial del vector de Poynting es nula. La ecuación de Maxwell  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  para el espacio entre el alma y la envoltura adquiere el aspecto

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = 0, \quad (60.6)$$

donde se utilizó la escritura de la operación de la divergencia en coordenadas cilíndricas y se tomó en consideración que las componentes tangencial y axial del vector  $\mathbf{E}$  no existen. De la expresión (60.6) obtenemos

$$E_r = a_0/r, \quad (60.7)$$

donde  $a_0$  es la constante de integración, definida por las condiciones del problema. La diferencia de potencial entre el alma y la envoltura es

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = a_0 \ln(r_2/r_1), \quad (60.8)$$

que permite hallar el valor de la constante  $a_0 = U/\ln(r_2/r_1)$ . Teniendo en cuenta este valor, la fórmula (60.7) adquiere la forma

$$E_r = \frac{U}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}. \quad (60.9)$$

La intensidad del campo magnético en el cable es

$$H_\alpha = I/(2\pi r), \quad (60.10)$$

como se desprende directamente de la ley de la corriente total, teniendo presente la simetría axial del campo. De las fórmulas (60.9) y (60.10) obtenemos

$$S_z = E_r H_\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2}. \quad (60.11)$$

Esta magnitud representa en sí la densidad del flujo de energía electromagnética, dirigido paralelamente al eje del cable en el espacio entre el alma y la envoltura. Fuera del cable, así como en el alma central y en la envoltura no existe ningún flujo de energía, ya que ahí prácticamente no hay campo eléctrico para la suposición tomada de que no existe resistencia alguna. Durante 1 s la energía electromagnética que atraviesa la sección transversal del cable, es

$$P = \int_0^{2\pi} S_z d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \cdot \frac{UI}{\ln(r_2/r_1)} = UI. \quad (60.12)$$

Para la intensidad de la corriente  $I$  que recorre la carga a una diferencia de potencial  $U$ , se disipa una potencia

$$P_c = IU. \quad (60.13)$$

La comparación de las fórmulas (60.12) y (60.13) muestra que *toda la energía que utiliza el consumidor, se mueve a lo largo del cable en el espacio entre el alma y la envoltura en forma de energía electromagnética.*

En el sentido principal no cambia nada para la corriente alterna de frecuencia no muy alta. Si la corriente en el cable cambia su dirección por la contraria, las componentes  $E_r$  y  $H_\alpha$  de los vectores del campo cambian también de dirección, permaneciendo el sentido del vector de Poynting invariable. Por eso, a pesar de que la dirección de la corriente varía por la contraria, el sentido del movimiento de la energía electromagnética se conserva: ésta se mueve todo el tiempo de la fuente al consumidor.

En otras líneas de transporte el cuadro del movimiento de la energía, en el sentido principal, no cambia, únicamente se complica la configuración de los campos y los caminos, por los que se mueve la energía.

**Línea de transporte de la corriente alterna.** Para frecuencias no muy altas y distancias bastante pequeñas, cuando puede considerarse cumplidas las condiciones casiestacionarias, las corrientes en la línea se describen totalmente por

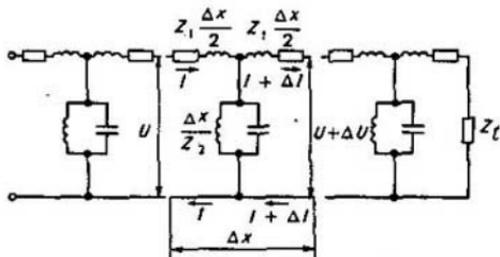


Fig. 250  
Circuito equivalente de la línea de transmisión de corrientes  
alternas

los métodos expuestos en el capítulo 8. Al no observarse las condiciones casiestacionarias, el cuadro se complica, lo que es obvio ya de la circunstancia de que la intensidad de la corriente en un mismo momento de tiempo es distinta en diferentes partes de la línea de transporte. Cualquier parte del conductor posee ciertas inductancia y capacidad, lo que convierte toda la línea de transporte en un circuito eléctrico con resistencias, capacidades e inductancias distribuidas continuamente.

**Ecuaciones para la intensidad de la corriente y la tensión.** Ante todo es necesario hallar la ley, por la que la intensidad de la corriente y la tensión entre los conductores varía a lo largo de la línea. La fig. 250 muestra el circuito equivalente de la distribución de la inductancia, capacidad y resistencia. Designemos la inductancia, capacidad y resistencia, correspondientes a 1 m de longitud de la línea, por  $L$ ,  $C$  y  $R$ . Las impedancias  $Z_1$  y  $Z_2$  se dan también respecto a 1 m de longitud. La parte  $\Delta x$  de la línea posee una impedancia, acoplada en serie que representa una resistencia compleja

$$Z_1 \Delta x = (R_1 + i\omega L) \Delta x, \quad (60.14)$$

y con la impedancia  $Z_2$ , conectada en paralelo, que ofrece una conductividad compleja

$$\frac{1}{Z_2} \Delta x = \left( \frac{1}{R_2} + i\omega C \right) \Delta x. \quad (60.15)$$

Supongamos que al comienzo de la parte de la línea  $\Delta x$  se aplica una tensión  $U$  y la intensidad de la corriente es  $I$ . Al final de esa parte dichas magnitudes son, respectivamente, iguales a  $U + \Delta U$ ,  $I + \Delta I$ . Las pérdidas a través del aislamiento aquí y en lo sucesivo no se tienen en cuenta.

Apliquemos la regla de Kirchhoff para el circuito exterior de toda la parte, tomando como dirección positiva, el recorrido en sentido dextrógiro:

$$-Z_1 \frac{\Delta x}{2} (I + \Delta I) - Z_1 \frac{\Delta x}{2} I = U + \Delta U - U. \quad (60.16)$$

Después de dividir (60.16) por  $\Delta x$ , obtenemos

$$-Z_1 \Delta I / 2 - Z_1 I = \Delta U / \Delta x. \quad (60.17)$$

Si  $\Delta x \rightarrow 0$ , el primer sumando en el primer miembro de la fórmula (60.17) tiende a cero ( $\Delta I \rightarrow 0$ ). Entonces,

$$\frac{dU}{dx} = -Z_1 I. \quad (60.18)$$

De manera análoga, la regla de Kirchhoff, aplicada al circuito izquierdo que contiene la impedancia  $Z_2/\Delta x$ , nos da

$$\frac{Z_2}{\Delta x} \Delta I - Z_2 \frac{\Delta x}{2} I = -U, \quad (60.19)$$

de donde para  $\Delta x \rightarrow 0$  obtenemos

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{1}{Z_2} U. \quad (60.20)$$

Al diferenciar los dos miembros de la expresión (60.18) respecto a  $x$  y expresar  $dI/dx$  con ayuda de la fórmula (60.20), hallamos la siguiente ecuación para  $U$ :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{Z_1}{Z_2} U. \quad (60.21)$$

Análogamente, la diferenciación de la fórmula (60.20) respecto a  $x$  y el uso de (60.18), conduce a la ecuación para la intensidad de la corriente:

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = \frac{Z_1}{Z_2} I. \quad (60.22)$$

Las ecuaciones (60.21) y (60.22) se denominan **ecuaciones de la línea de transporte**.

**Impedancia característica y constante de propagación.** La solución general de las ecuaciones de las líneas de transporte tiene la forma (por ejemplo, para  $U$ ):

$$U = A e^{-\alpha x} + B e^{\alpha x}, \quad (60.23)$$

con la particularidad de que para  $\alpha$ , denominada constante de propagación, después de poner (60.23) en (60.21), hallamos la expresión:

$$\alpha = \sqrt{Z_1/Z_2}. \quad (60.24)$$

El mismo aspecto tiene la solución de la ecuación (60.22):

$$I = A_1 e^{-\alpha x} + B_1 e^{\alpha x}. \quad (60.25)$$

Poniendo las soluciones de (60.23) y (60.25) en (60.18) y (60.20), encontramos el enlace entre las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ :

$$A_1 = A/Z_1, \quad B_1 = -B/Z_1, \quad (60.26)$$

donde

$$Z_1 = \sqrt{Z_1 Z_2} \quad (60.27)$$

es la impedancia característica de la línea. Para aclarar su sentido, supongamos que la línea de longitud  $l$  termina con una carga, cuya impedancia es igual a la característica (fig. 250). Basándose en las igualdades (60.23)–(60.27) para la tensión en la salida de la línea, es decir, en la carga  $Z_1$ , puede escribirse:

$$U_c = I_c Z_1, \quad (60.28)$$

o bien

$$A e^{-\alpha l} + B e^{\alpha l} = Z_1 \left( \frac{A}{Z_1} e^{-\alpha l} - \frac{B}{Z_1} e^{\alpha l} \right). \quad (60.29)$$

De aquí se desprende que  $B = 0$ ,  $A = U_{en}$ , donde  $U_{en}$  es la tensión en la entrada de la línea para  $x = 0$ . Así pues, la tensión y la intensidad de la corriente en la línea se determinan por las expresiones:

$$U = U_{en} e^{-\alpha x}, \quad I = U_{en} e^{-\alpha x} / Z_1. \quad (60.30)$$

Por lo tanto, la impedancia de entrada de la línea es igual a la característica:

$$Z_{en} = U_{en} / I_{en} = Z_1. \quad (60.31)$$

Esto significa que si la línea termina con una carga que posee una impedancia característica, su impedancia de entrada es igual a la característica independientemente de la longitud, es decir, en este caso la corriente se transmite por la línea sin cambiar la relación entre la tensión y la intensidad de la corriente.

**Resistencia característica.** En la mayoría de los casos importantes las resistencias óhmicas de los elementos de las líneas son mucho menores que las inductancias y capacitancias correspondientes ( $R_1 \ll \omega L$ ,  $1/R_2 \ll \omega C$ ) y se pueden menospreciar. Entonces la impedancia característica para esta condición es:

$$Z_1 = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{\frac{R_1 + i\omega L}{1/R_2 + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (60.32)$$

es una magnitud real, es decir, es una resistencia, llamada resistencia característica.

La resistencia característica depende de la forma y las dimensiones de los conductores, de la distancia entre ellos y otros factores, de los que dependen la capacidad y la inductancia de las partes de la línea. Verbigracia, la resistencia característica de los conductores cilíndricos paralelos de radio  $a$ , la distancia entre cuyos ejes es  $D$ , es igual a

$$Z_1 = 276 \log (D/a). \quad (60.33)$$

Se considera que los conductores se encuentran en un medio, cuya constante dieléctrica es próxima a la unidad (vacío, aire, etc.).

**Velocidad de propagación.** Más arriba se examinó el caso de distribución de la intensidad de la corriente y de la tensión a lo largo de la línea en cierto momento de tiempo. Si en la entrada la intensidad de la corriente y la tensión varían periódicamente con una frecuencia  $\omega$ , en todas las partes de la línea ellas cambian con la misma frecuencia. Para las condiciones cuando la impedancia característica es una magnitud real (60.32), la constante  $\alpha$  [véase (60.24)] es puramente imaginaria:

$$\alpha = i\omega \sqrt{LC}. \quad (60.34)$$

Por eso, tomando la dependencia de las magnitudes respecto al tiempo en forma de  $\exp i\omega t$ , se puede, basándose en (60.30), escribir:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_0 \exp [i(\omega t - \omega \sqrt{LC} x)], \\ I(x, t) &= (U_0 / \sqrt{LC}) \exp [i(\omega t - \omega \sqrt{LC} x)]. \end{aligned} \quad (60.35)$$

La fórmula (60.35) describe la onda con una frecuencia que se propaga a lo largo del eje  $X$  con una velocidad

$$v = 1/\sqrt{LC}. \quad (60.36)$$

Recordemos que en esta fórmula  $L$  y  $C$  son la capacidad y la inductancia de la línea de transporte, correspondientes a 1 m de longitud. Para dos conductores cilíndricos finos de radios  $a$  que se encuentran en el vacío a una distancia  $D$  el uno del otro, las capacidades e inductancias por 1 m de longitud de la línea son iguales a:

$$C = \epsilon_0 / [2 \ln (D/a)], \quad L = 2\mu_0 \ln (D/a) \quad (60.37)$$

y por eso la velocidad de propagación de la onda es

$$v = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c. \quad (60.38)$$

**Reflexión.** Si la resistencia de la carga es igual a la característica, toda la energía que se transporta por la línea, se absorbe por la carga. Se dice que la carga y la línea de transporte están adaptadas entre sí. *Si no existe tal adaptación, parte de esa energía se refleja de la carga y se mueve por la línea al encuentro del flujo inicial de energía.*

Examinemos como ejemplo una línea de transporte, cortocircuitada en el extremo, o sea, cuando  $U_c = 0$ . Las ecuaciones (60.23) y (60.25) adquieren el

aspecto:

$$0 = Ae^{-i\beta l} + Be^{i\beta l}, \quad (60.39)$$

$$I = Ae^{-i\beta l/\rho} - Be^{i\beta l/\rho}, \quad (60.40)$$

donde para simplificar la escritura de las fórmulas se introducen las designaciones:  $\beta = \omega\sqrt{LC}$  y  $\rho = \sqrt{L/C}$ . Después de resolver estas ecuaciones con respecto a  $A$  y  $B$ , obtenemos

$$A = I_0 \rho e^{i\beta l/2}, \quad B = -I_0 \rho e^{-i\beta l/2}. \quad (60.41)$$

Por eso las expresiones (60.23) y (60.25) para la tensión y la intensidad de la corriente a lo largo de la línea de transporte se escriben de la siguiente manera:

$$U = I_0 \frac{\rho}{2} [e^{-i\beta(x-l)} - e^{i\beta(x-l)}], \quad (60.42)$$

$$I = \frac{I_0}{2} [e^{-i\beta(x-l)} + e^{i\beta(x-l)}]. \quad (60.43)$$

Puesto que la dependencia de las magnitudes respecto al tiempo se caracteriza por el factor  $\exp(i\omega t)$ , puede sacarse la conclusión de que los primeros sumandos en el segundo miembro de estas fórmulas describen la onda que se propaga en sentido positivo del eje  $X$  y los segundos, en sentido negativo (es decir, describen la onda reflejada del extremo cortocircuitado de la línea). De aquí puede deducirse que no sólo la imposibilidad de transportar toda la energía a la carga en ausencia de la adaptación a la línea dicta la necesidad de la adaptación. Si las señales se transmiten en forma de impulsos, las reflexiones sucesivas de la carga y luego de nuevo de la entrada, provocan una distorsión tan fuerte de la señal, que llega a la carga, que resulta difícil trabajar con ella.

La energía que se transmite por la corriente eléctrica, se mueve en el espacio que rodea a los conductores. Estos últimos desempeñan el papel de guías, a lo largo de los cuales se mueve la energía electromagnética. El calor de Joule en el conductor se desprende a causa de la energía electromagnética que se suministra al conductor mediante su superficie del espacio circundante.

¿Qué significa la impedancia característica de la línea y la constante de propagación? Describanse los procesos físicos que conducen a la reflexión de la energía de la carga.

¿Para qué condición la reflexión está ausente y toda la energía transmitida por la línea se absorbe por la carga?

## § 61. Emisión de las ondas electromagnéticas

*Se da la solución del problema sobre la emisión de un oscilador lineal. La solución obtenida se generaliza para el caso de un electrón no relativista acelerado al azar. Se examina la reacción de la emisión.*

**Ecuación para el potencial vectorial.** La inducción y la intensidad de los campos alternativos se expresan mediante las fórmulas (46.8) y (46.12) por medio

de los potenciales vectorial y escalar, para encontrar los cuales es necesario tener ecuaciones.

Partimos de la ecuación de Maxwell (58.1, I) que es más cómodo escribirla así

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (61.1)$$

donde para simplificar se supone que  $\mu$  y  $\varepsilon$  no dependen de las coordenadas. Poniendo (46.8) y (46.12) en (61.1), obtenemos

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{j} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (61.2)$$

Tomando en consideración que  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ , transformemos (61.2) a la forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (61.3)$$

Utilizando que los potenciales son multiformes y están definidos con una precisión de la transformación de calibración (46.13), se puede imponerles cierta condición. Para simplificar al máximo las ecuaciones (61.3) esta condición se elige en forma de igualdad

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (61.4)$$

denominada condición de Lorentz. En definitiva, [véase (61.3)], obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (61.5)$$

la ecuación de d'Alembert.

Elección de la función de calibración  $\chi$ . Al imponer sobre los potenciales las condiciones de Lorentz (61.4), la función con cuya ayuda se efectúa la transformación de calibración de los potenciales (46.13), no puede elegirse al azar. Es necesario que la condición de Lorentz (61.4) se conserve durante las transformaciones de calibración. Tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A}' + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi'}{\partial t} &= \operatorname{div} (\mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi) + \\ + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\varphi - \partial \chi / \partial t) &= \operatorname{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left( \nabla^2 \chi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

De esta manera, la condición de Lorentz es invariante sólo para las transformaciones de calibración con la función  $\chi$  que satisface la ecuación

$$\nabla^2 \chi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad (61.6)$$

La ecuación de este tipo se denomina ecuación de onda o ecuación homogénea de d'Alembert.

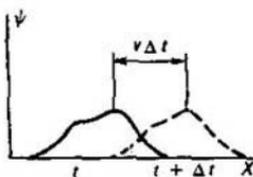


Fig. 251  
Variación con el tiempo de la solución para la ecuación unidimensional de la onda

**Ecuación para el potencial escalar.** Poniendo (46.12) en la ecuación de Maxwell (58.11), hallamos

$$\operatorname{div} \left( -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (61.7)$$

Al excluir de aquí  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  con ayuda de (61.4), obtenemos en definitiva la siguiente ecuación para el potencial escalar:

$$\nabla^2 \varphi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (61.8)$$

Así pues, para las proyecciones cartesianas del potencial vectorial (61.5) y para el escalar se obtiene una misma ecuación tipo

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t), \quad (61.9)$$

donde en lugar de  $\Phi$  pueden ponerse  $A_x, A_y, A_z, \varphi$  y en lugar de  $f, \mu_j, \mu_j, \mu_j, \rho/\epsilon$ , respectivamente. Aclaremos el sentido de  $\epsilon\mu = 1/v^2$ .

**Solución de la ecuación de onda.** Ante todo examinemos las soluciones de la ecuación (61.9) para  $f = 0$ , es decir, de una ecuación homogénea. Tomemos el caso unidimensional  $\Phi = \Phi(x)$ . La ecuación (61.9) tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (61.10)$$

Comprobando directamente nos cercioramos de que la solución de la ecuación (61.10) es cualquier función  $\Phi$  del argumento  $t - x/v$  ó  $t + x/v$ . Comprobemos eso, por ejemplo, para la función  $\Phi(t - x/v)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi', \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \Phi'', \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{v} \Phi', \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \Phi'', \quad (61.11)$$

donde  $\Phi'$  es la derivada respecto al argumento de la función. De (61.11) se desprende que la función arbitraria  $\Phi(t - x/v)$  satisface en realidad la ecuación (61.10). Análogamente se demuestra que la función  $\Phi(t + x/v)$  también satisface esta ecuación.

El sentido de estas soluciones es muy sencillo. La función  $\Phi(t - x/v)$  es en sí una onda que se mueve en dirección de los valores positivos del eje  $X$  con una velocidad  $v$ . En efecto,

$$t - x/v = t + \Delta t - (x + \Delta x)/v \quad (61.12)$$

para  $\Delta x/\Delta t = v$ . Esto significa que si en el momento de tiempo  $t$  la función  $\Psi(t - x/v)$  se representa como cierta curva (fig. 251), en el momento de tiempo  $t + \Delta t$  se da mediante la misma curva pero desplazada en dirección de los valores positivos del eje  $X$  en  $v \Delta t$ , o sea, es una onda que se mueve en dirección de los valores positivos del eje  $X$  con una velocidad  $v$ . Por esta razón se introdujo la designación  $\epsilon\mu = 1/v^2$ .

De la misma manera se muestra que la función  $\Phi(t + x/v)$  es de por sí una onda que se propaga con una velocidad  $v$  en dirección de los valores negativos del eje  $X$ .

Examinemos la solución de la ecuación de onda para el caso esféricamente simétrico, es decir, considerando que en (61.9)  $f = 0$  y  $\Phi = \Phi(r)$  donde  $r$  es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto en cuestión. En este caso  $\Phi$  no depende de los ángulos y el operador de Laplace tiene la forma

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi). \quad (61.13)$$

Por eso la ecuación de onda para  $\Phi$  se escribe como

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\Phi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} = 0. \quad (61.14)$$

La solución de esta ecuación para  $r\Phi$ , lo mismo que en el caso anterior, son las funciones arbitrarias de los argumentos  $t - x/v$  y  $t + x/v$ , es decir, la expresión general para  $\Phi$  es así:

$$\Phi(r, t) = \frac{\Psi_1(t - r/v)}{r} + \frac{\Psi_2(t + r/v)}{r}. \quad (61.15)$$

La función  $\Psi_1(t - r/v)$  es una onda que se mueve en sentido radial desde el origen de coordenadas con una velocidad  $v$ . La forma de la onda no varía, mientras que la amplitud disminuye como  $1/r$ . Esta onda se denomina *divergente*. La función  $\Psi_2(t + r/v)$  representa una onda, convergente hacia el origen de coordenadas.

Volviendo a las ecuaciones (61.5) y (61.8) vemos que los potenciales del campo y, por lo tanto, los propios campos se propagan en un espacio libre ( $\rho = 0$ ) con una velocidad  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . En el vacío  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$ , por eso la velocidad de propagación de los campos es igual a la velocidad de la luz  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Así pues, *las ondas electromagnéticas y todas las variaciones de los campos magnético y eléctrico se propagan en el vacío con la velocidad de la luz*. Pero eso significa que las interacciones electromagnéticas se propagan con la velocidad de la luz. Por ejemplo, si dos cargas puntuales están en reposo a una distancia  $r$  y una de las cargas en cierto momento de tiempo se desplaza de su sitio, la otra carga «siente» este desplazamiento al cabo de un tiempo  $\tau = r/c$ .

**Potenciales de avance y retardados.** Teniendo en cuenta las propiedades de las soluciones de la ecuación de onda, es de esperar que la solución de las ecuaciones (61.5) y (61.8) para los potenciales de campos variables se diferencie de las soluciones de las ecuaciones (37.11a) y (14.35) para los potenciales de los campos constantes solamente en que es necesario tomar en consideración la velocidad finita de propagación de las interacciones electromagnéticas. Con otras palabras, *la carga en movimiento y el elemento de la corriente alterna crean en cada punto del espacio circundante un mismo potencial como si la carga fuese inmóvil y la corriente continua, pero diferenciándose en que dicho potencial en cada punto se origina no en el mismo momento de tiempo, sino más tarde, en el tiempo de retardo, es decir, en el tiempo, necesario al campo electromagnético*

para propagarse desde la fuente hasta el punto de observación. Por esta razón, para las cargas y corrientes que se encuentran en la zona finita del espacio en lugar de las fórmulas (37.11a) y (14.35) obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (61.16)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (61.17)$$

donde  $v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu}$ ;  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  es la distancia entre el punto en que se calcula el potencial y el elemento  $dV'$  del volumen de integración.

En el momento de tiempo dado en el punto dado el potencial no se determina por la posición y el valor de la carga y de las intensidades de la corriente en el momento de tiempo dado, sino que por sus posiciones y valores en los momentos antecedentes de tiempo que se definen teniendo en cuenta la velocidad de propagación del campo electromagnético. Verbigracia, sea que cierta carga eléctrica se aproxime a cualquier punto. El potencial escalar, creado por la carga en el punto no se determina por la distancia entre la carga y el punto en dicho momento de tiempo, sino que por la distancia en un momento de tiempo anterior, es decir, por una distancia mayor. Si la velocidad de la carga es próxima a la velocidad de la luz, la diferencia entre las distancias puede ser bastante considerable.

Aquí no se cita la verificación formal de que las fórmulas (61.16) y (61.17) satisfacen las ecuaciones (61.5) y (61.8). En principio, eso se hace de la misma manera que para las soluciones de (14.35) y (37.11a).

Los potenciales tipo (61.16) y (61.17) se denominan retardados, porque describen los potenciales en un momento de tiempo  $t$  más tardío en comparación con el momento de tiempo  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$  para las cargas y corrientes que han creado el mencionado potencial. Formalmente, las soluciones de las ecuaciones (61.5) y (61.8) son también las soluciones análogas a (61.16) y (61.17), pero sustituyendo los argumentos de tiempo  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$  por  $t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ , lo que corresponde a dos signos posibles en los argumentos de las soluciones (61.15) de la ecuación de onda. La solución con el signo «+» en el argumento carece de un sentido físico claro, ya que corresponde formalmente a la situación en la que se crea primero el potencial y luego aparecen las cargas y corrientes que le corresponden, es decir, el potencial avanza las cargas y corrientes. Por esta razón, se le da el nombre de potencial de avance. Con el fin de obtener las soluciones de los problemas con condiciones de frontera mediante el potencial de avance, se tiene que utilizar a la par con el potencial retardado. Esto puede comprenderse de lo siguiente. Supongamos que es necesario hallar el campo electromagnético que satisfaga ciertas condiciones en la superficie de separación. Está claro que en los puntos dentro del volumen el campo debe ser tal, que al alcanzar la frontera en un momento de tiempo más tardío, poder tener valores, dados por las condiciones de frontera. Es obvio que al resolver semejantes problemas es necesario guiarse no sólo del pasado, sino que tomar en consideración lo que debe suceder en el futuro, o sea, es indispensable hacer uso de los potenciales de avance. Pero eso no significa de ninguna manera la perturbación del principio de causalidad como se ve directamente del razonamiento, expuesto antes. Desde el

punto de vista físico eso es simplemente la respuesta a la pregunta de qué debe suceder en el pasado para que en la actualidad sea como es para las leyes conocidas de desarrollo.

**Dipolo hertziano.** Este es un dipolo eléctrico, cuyo momento varía con el tiempo. De prototipo real del dipolo hertziano sirve un conjunto de dos bolas metálicas (fig. 252) unidas por un conductor. Si a las bolas se les comunican cargas iguales, pero de signo contrario y se abandona el sistema a su suerte, tendrá lugar un proceso oscilante de la transferencia de cargas entre las bolas.

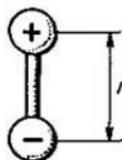


Fig. 252  
Modelo de un dipolo

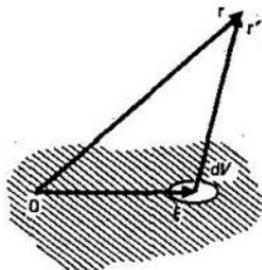


Fig. 253  
Para calcular el potencial del dipolo

Las oscilaciones de la corriente serán amortiguadas. Si la resistencia de los conductores es pequeña, así como las pérdidas en la emisión durante un período, en el transcurso de una cantidad bastante grande de períodos puede prescindirse del amortiguamiento. Entonces a distancias, mucho mayores que  $l$ , el sistema puede examinarse como un dipolo, cuyo momento varía con el tiempo. Hertz hizo uso de semejante dipolo, obteniendo por primera vez por vía experimental las ondas electromagnéticas. Por esta razón, recibió el nombre de dipolo hertziano.

**Potencial escalar del dipolo que varía con el tiempo.** El potencial del dipolo se determina por la fórmula (61.17) que es más cómodo escribirla como

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\xi, t - r'/c)}{r'} dV_\xi, \quad (61.18)$$

donde se supone que el dipolo se encuentra en el vacío ( $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ). Al calcular (61.18) el origen de coordenadas es útil colocarlo en la zona de propagación de la carga. La posición del origen en los márgenes de la zona de propagación de la carga no tiene importancia, ya que las dimensiones del dipolo se suponen tan pequeñas, como se quiera en comparación con las distancias hasta los puntos en que se estudia su campo. La posición del punto en que se calcula el potencial del campo se caracteriza por el radio vector  $\mathbf{r}$ ;  $\xi$  es el radio vector del elemento de volumen  $dV_\xi$   $r'$  es la distancia entre el elemento de volumen  $dV_\xi$  y el punto de observación (fig. 253).

Examinemos el potencial a grandes distancias del dipolo ( $\xi/r \ll 1$ ). Teniendo en cuenta que

$$r' = r - \xi, \quad r' = \sqrt{r^2 - 2r\xi + \xi^2}, \quad (61.19)$$

se puede la expresión para  $r'$  desarrollar en serie respecto a  $\xi/r$  y limitarnos con el término lineal del desarrollo:

$$r' = r \left( 1 - 2 \frac{r\xi}{r^2} - \frac{\xi^2}{r^2} \right)^{1/2} = r - \frac{r\xi}{r} + \dots \quad (61.20)$$

Haciendo uso de esta fórmula, descompongamos el integrando en (61.18) en serie de Taylor en el punto  $r$ :

$$\frac{\rho(\xi, t-r'/c)}{r'} = \frac{\rho(\xi, t-r/c)}{r} - \frac{r\xi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\rho(\xi, t-r/c)}{r} \right] + \dots \quad (61.21)$$

Poniendo (61.21) en (61.18), hallamos

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int \rho dV_\xi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\xi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int \xi\rho dV_\xi, \quad (61.22)$$

donde se toma en consideración que durante la integración  $r$  es una magnitud constante. Como consecuencia de la neutralidad eléctrica del sistema, la primera integral en el segundo miembro de (61.22) es nulo y la segunda es en sí el momento del dipolo [véase (17.2)]

$$\int \xi\rho(t-r/c) dV_\xi = \mathbf{p}(t-r/c). \quad (61.23)$$

Por eso, en definitiva, el potencial del dipolo que varía con el tiempo se determina por la fórmula

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\xi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} \right]. \quad (61.24)$$

Haciendo uso de la expresión para la divergencia en coordenadas esféricas, la fórmula (61.24) puede representarse así

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r}. \quad (61.25)$$

**Potencial vectorial.** Se calcula desarrollando el integrando de (61.16) en la serie tipo (61.21):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} \right]. \quad (61.26)$$

**Campos eléctrico y magnético.** Para simplificar la escritura de las siguientes fórmulas, introduzcamos la designación

$$\Pi = \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} = \mathbf{p}_0\Phi(t, r), \quad (61.27)$$

donde  $\mathbf{p}_0$  es un vector constante que caracteriza la dirección de las oscilaciones del dipolo. Partiendo de las fórmulas (61.25) y (61.26), obtenemos:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot } \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi, \quad (61.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad div } \Pi - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \text{grad div } \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{rot rot } \Pi, \end{aligned} \quad (61.29)$$

donde se toma en consideración que  $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  y se tiene en cuenta la fórmula (A.10) y el vector  $\Pi$  satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Pi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0. \quad (61.30)$$

El valor de  $\text{rot } \Pi$  se calcula mediante la fórmula (A.16):

$$\text{rot } \Pi = \text{rot } \mathbf{p}_0 \Phi = \text{grad } \Phi \times \mathbf{p}_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p}_0. \quad (61.31)$$

Los cálculos posteriores es más cómodo realizarlos en el sistema de coordenadas esféricas. Dirijamos el eje polar  $Z$  a lo largo del vector  $\mathbf{p}_0$ , colocándolo en el origen de coordenadas en el centro del dipolo. Los ángulos acimutal y polar se denotan por  $\theta$  y  $\alpha$ , respectivamente, (fig. 254). Es obvio que

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_r = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_\theta = 0, \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_0)_\alpha = -r p_0 \sin \theta, \quad (61.32)$$

por eso

$$\text{rot}_r \Pi = \text{rot}_\theta \Pi = 0, \quad \text{rot}_\alpha \Pi = -\sin \theta \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \quad (61.33)$$

De aquí, basándose en la fórmula (61.28), obtenemos:

$$B_r = B_\theta = 0, \quad B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}_\alpha \Pi = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sin \theta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}. \quad (61.34)$$

Las proyecciones del vector  $\mathbf{E}$  se calculan aplicando la fórmula para el rotor en el sistema de coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \text{rot}_\alpha \Pi) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \text{rot}_\alpha \Pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (61.35)$$

Las fórmulas (61.34) y (61.35) muestran que el vector de intensidad del campo eléctrico yace en los planos meridionales y el vector de inducción del campo magnético es perpendicular al plano meridional, trazado por el punto correspondiente, con la particularidad de que las líneas magnéticas de fuerza coinciden con las li-

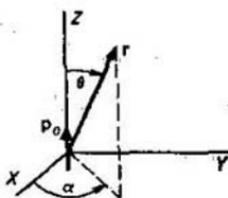


Fig. 254 Elección del sistema esférico de coordenadas para calcular el campo del dipolo

neas paralelas del sistema de coordenadas esféricas en cuestión. Los vectores de los campos magnético y eléctrico en cada punto son mutuamente perpendiculares.

Las fórmulas (61.34) y (61.35) son válidas para una dependencia arbitraria de la función  $\Phi(t, r)$  en (61.27) respecto al tiempo. Considerando que el momento del dipolo varía por una ley armónica,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{i\omega t}, \quad (61.36)$$

obtenemos

$$\Pi = p_0 \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r}. \quad (61.37)$$

Después de efectuar las correspondientes diferenciaciones en las fórmulas (61.34) y (61.35), hallamos las expresiones para las proyecciones diferentes de cero:

$$B_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} i\omega \sin \theta \left( \frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right) \Pi, \quad E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cos \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} \right) \Pi, \quad E_\theta = \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Pi. \quad (61.38)$$

El campo en la proximidad inmediata al dipolo a distancias, inferiores a la longitud de onda  $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$ , es semejante al campo de un dipolo estático y corriente. A distancias mucho mayores que la longitud de onda, el campo del oscilador se diferencia en principio del campo de un dipolo permanente y corriente. La zona correspondiente se denomina zona de onda.

Campo del oscilador en la zona de onda. La distancia  $r$  hasta los puntos de la zona de onda satisface, según la definición, la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}. \quad (61.39)$$

Por eso en las fórmulas (61.38) pueden menospreciarse  $1/r$  y  $1/r^2$  en comparación con  $\omega/c$  y  $\omega^2/c^2$ . En definitiva, obtenemos las siguientes expresiones para las proyecciones de los vectores del campo:

$$B_\alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \Pi \sin \theta, \quad B_r = B_\theta = 0; \quad (61.40)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \Pi \sin \theta, \quad E_r = E_\alpha = 0. \quad (61.41)$$

En estas fórmulas a título de  $\Pi$  puede tomarse o bien la parte real de la expresión (61.37) o bien la imaginaria, por ejemplo:

$$\Pi = \frac{p_0 \cos \omega(t-r/c)}{r}. \quad (61.42)$$

Por esta razón, en definitiva, la intensidad y la inducción del campo electromagnético en la zona de onda del oscilador pueden representarse de la siguiente manera:

$$E_\theta = cB_\alpha = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\sin \theta}{r} p_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \\ E_r = E_\alpha = 0, \quad B_r = B_\theta = 0. \quad (61.43)$$

Estas fórmulas muestran que en la zona de onda los vectores magnético y eléctrico son mutuamente perpendiculares y perpendiculares al radio vector  $r$ . Los vectores  $E$ ,  $B$ ,  $r$  forman en cada punto un sistema de mano derecha de vectores. La intensidad del campo disminuye inversamente proporcional al primer grado de la distancia. La onda que se presenta por la fórmula (61.43) se denomina esférica. Ella se propaga en dirección del radio vector. Las superficies de fase constante de dicha onda son esferas. La velocidad de la onda (de fase) es igual a la velocidad de la luz. Dado que  $E_{\theta} = cB_{\phi}$ , los pequeños sectores de la superficie de la onda esférica pueden considerarse como ondas electromagnéticas planas.

**Potencia emitida por el oscilador.** La densidad del flujo de la energía electromagnética se caracteriza por el vector de Poynting (59.7). Por eso el flujo de energía electromagnética  $P$  que atraviesa la superficie  $S$  de la esfera de radio  $r$  que rodea el oscilador, es igual a

$$\begin{aligned} P &= \int_S \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E_{\theta} H_{\phi} dS = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ &= \frac{1}{6\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3} \cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned} \quad (61.44)$$

Esto es el potencial del flujo, es decir, la energía de emisión del oscilador en 1 s. La potencia de emisión, media durante un período de emisión, es igual a

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{12\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}. \quad (61.45)$$

Esta fórmula muestra que la potencia de emisión del oscilador depende en gran medida de la frecuencia y es proporcional al cuarto grado de ésta. Ello significa que para aumentar la potencia de emisión es útil pasar a longitudes más cortas de ondas.

Puesto que el vector de Poynting disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, y el área de la superficie de la esfera crece directamente proporcional al cuadrado de la distancia, el flujo total de energía, que atraviesa la superficie de la esfera, no cambia con la distancia, por lo tanto, la energía se transporta sin pérdidas del oscilador a las partes alejadas del espacio en forma de ondas electromagnéticas. La densidad del flujo de emisión disminuye al crecer la distancia inversamente proporcional al cuadrado de las distancias. Merced a la pérdida de energía en la emisión, las vibraciones del oscilador deben ser amortiguadas. Para obtener vibraciones no amortiguadas del oscilador es necesario continuamente suministrarle de afuera cierta energía. El oscilador es el emisor más sencillo de ondas electromagnéticas.

**Emisión de un cuadro con corriente.** Otro de los emisores elementales de las ondas electromagnéticas es un cuadro con corriente que se caracteriza por

el momento magnético  $p_m = IS$  (fig. 255). Su emisión es semejante a la emisión de un dipolo. Citemos sólo el resultado. El momento magnético del cuadro con corriente varía según la ley

$$p_m = p_{m0} \cos \omega t. \quad (61.46)$$

Coloquemos el origen del sistema de coordenadas esféricas en el centro del cuadro y el eje  $Z$  dirijémoslo a lo largo del momento magnético, es decir, en la fig. 254 hay que imaginarse que la corriente circula en el plano  $z = 0$  y el mo-

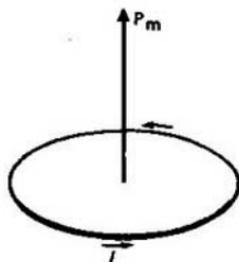


Fig. 255  
Cuadro con corriente

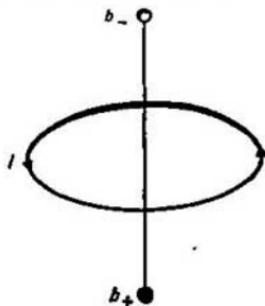


Fig. 256  
Relación entre el desplazamiento de las cargas eléctricas que originan el momento eléctrico dipolar, y la corriente en el cuadro que crea el momento magnético

mento magnético de la corriente  $p_m$  se sitúa como  $p$ . Para el campo de la emisión del cuadro con corriente se obtienen las siguientes fórmulas:

$$E_\alpha = -cB_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^3}{c} \frac{\text{sen } \theta}{r} p_{m0} \cos \omega(t-r/c), \quad (61.47)$$

$$E_r = E_\theta = 0, \quad B_r = B_\alpha = 0.$$

La comparación de las fórmulas (61.47) y (61.43) muestra que si entre el momento magnético  $p_{m0}$  de la corriente y el momento dipolar  $p_0$  se observa la relación (fig. 256)

$$p_{m0} = cp_0, \quad (61.48)$$

la intensidad del campo eléctrico y la inducción magnética de la emisión del dipolo son iguales según el módulo a los módulos correspondientes de los vectores del campo de emisión del cuadro con corriente, sólo cambian su dirección en el espacio. El dipolo posee una intensidad del campo eléctrico, dirigida por las meridianas y el cuadro tiene la intensidad perpendicular a los planos meridionales por las líneas paralelas. De manera correspondiente varía también la orientación de los vectores del campo magnético. Como se ve de (61.47) y (61.43),

los vectores del campo de emisión del dipolo y del cuadro con corriente se encuentran entre sí en la siguiente relación:

$$\begin{aligned} E_{\alpha} \text{ (del cuadro)} &= -cB_{\alpha} \text{ (del dipolo)} \\ cB_{\theta} \text{ (del cuadro)} &= E_{\theta} \text{ (del dipolo)}. \end{aligned} \quad (61.49)$$

La potencial de emisión del cuadro con corriente se determina por las fórmulas (61.44) y (61.45), sustituyendo en ellas el momento dipolar por el momento magnético según la fórmula (61.48).

El oscilador y el cuadro con corriente son emisores elementales de las ondas electromagnéticas. La emisión de sistemas más complejos puede reducirse a los elementales con ayuda del principio de superposición.

**Emisión de un electrón en movimiento acelerado.** Coloquemos imaginariamente una carga positiva, igual por el valor a la carga del electrón en el origen de coordenadas. Dicha carga es inmóvil y, según la ley de Coulomb, crea en el espacio circundante un campo eléctrico, constante con el tiempo, y con una intensidad que decrece inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. El conjunto del electrón en movimiento y la carga positiva inmóvil forman un dipolo, cuyo momento varía con el tiempo. Los vectores del campo de emisión del dipolo son alternativos y disminuyen inversamente al cuadrado del primer grado de la distancia. Está claro que el campo eléctrico constante de la carga inmóvil se compensa por el campo eléctrico del electrón y no puede tener relación alguna con el campo de emisión, es decir, el campo de emisión es el campo de emisión del electrón oscilante. La carga positiva se ubica en el origen de coordenadas sólo mentalmente, lo que permite hacer uso de las fórmulas obtenidas antes para la emisión del dipolo con momento variable con el tiempo.

El momento dipolar que surge al desviarse el electrón del origen de coordenadas a  $z(t)$ , es igual a

$$p(t) = -|e| z(t) i_z, \quad (61.50)$$

donde  $i_z$  es el versor a lo largo del eje  $Z$ . El signo menos surge a causa de que el momento complementario está dirigido de la carga negativa a la positiva. Considerando que

$$z = b \cos \omega t, \quad (61.51)$$

donde  $b$  es la amplitud de oscilación del electrón, para el momento dipolar (61.50) obtenemos

$$p = -i_z |e| b \cos \omega t. \quad (61.52)$$

La comparación de (61.22) con la parte real de (61.36) para el dipolo muestra que en la fórmula (61.36)  $p_0$  está ligado con las magnitudes que caracterizan el movimiento del electrón, mediante las relaciones:

$$p_0 = -i_z |e| b, \quad p_0 = |e| b. \quad (61.53)$$

La fórmula (61.43) que caracteriza los vectores del campo de emisión, adquiere ahora el aspecto:

$$E_{\theta} = cB_{\alpha} = -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} |e| b \cos \omega \left( \tau - \frac{r}{c} \right), \quad (61.54)$$

$$E_{\alpha} = E_r = 0, \quad B_r = B_{\theta} = 0, \quad (61.54)$$

donde  $\tau$  es el tiempo de llegada de la onda al punto de observación en la esfera de radio  $r$ . La variable  $t = \tau - r/c$  se reserva para el tiempo que caracteriza el movimiento del electrón. De la fórmula (61.51) se desprende que

$$\ddot{z} = -\omega^2 b \cos \omega t, \quad (61.55)$$

y por eso (61.54) puede escribirse de nuevo así:

$$E_{\theta}(r, \tau) = cB_{\alpha}(r, \tau) = \frac{|e|}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{z} \Big|_{t=\tau-r/c} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\sin\theta}{r} \ddot{z} \Big|_{t=\tau-r/c}, \quad (61.56)$$

donde se tiene en cuenta que la carga del electrón es negativa. La fórmula (61.44) para la potencia de emisión adquiere la siguiente forma:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2, \quad (61.57)$$

es decir, *la potencia de emisión es proporcional al cuadrado de la aceleración del electrón. La carga en movimiento uniforme no emite.*

Las fórmulas (61.56) y (61.57) se recibieron para el modelo del electrón oscilante. No obstante, ellas dependen sólo de la aceleración del electrón en cualquier momento dado de tiempo. Por consiguiente, el campo de emisión que describen, no depende de cómo se movía el electrón hasta el momento prefijado y de qué manera se moverá después de este momento. Por esta razón, las fórmulas mencionadas son siempre aplicables y representan las expresiones para la intensidad y la inducción del campo de emisión y de la potencia de emisión en dependencia de la aceleración, cualquiera que sea el movimiento. En cambio, en este caso las velocidades del electrón deben ser pequeñas, por eso, hablando estrictamente, estas fórmulas son para el electrón en reposo que posee cierta aceleración, lo que es obvio partiendo de la definición del dipolo que ocupa una zona infinitésima del espacio y que se encuentra en reposo en ella.

Sin embargo, no cuesta gran trabajo generalizar estas fórmulas para velocidades arbitrarias. Para eso hay que sencillamente pasar al sistema de coordenadas donde el electrón se mueve con una velocidad arbitraria y hacer uso de las fórmulas de transformación de los campos y aceleraciones. En definitiva, se obtienen fórmulas, válidas para las velocidades y aceleraciones arbitrarias de la carga. En el presente libro no se citan.

Fuerza de deceleración por radiación. Merced a la emisión, el electrón pierde su energía y se decelera, o sea, sobre él actúa una fuerza de deceleración. Hallémosla. Es obvia, que la ecuación de las oscilaciones del electrón, teniendo

en cuenta las fuerzas de deceleración, tiene la forma

$$m\ddot{z} + m\omega^2 z = F, \quad (61.58)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de las oscilaciones libres en ausencia de la fuerza de deceleración. Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por  $\dot{z}$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2} z^2 \right) = F\dot{z}. \quad (61.59)$$

En el segundo miembro de (61.59) se encuentra el trabajo de la fuerza de deceleración por radiación, respecto al tiempo. Según la definición, él es igual a la potencia de emisión [véase (61.57)], por eso

$$F\dot{z} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}^2. \quad (61.60)$$

La igualdad (61.60) expresa el principio de conservación de la energía durante la emisión. De ella no se puede hallar en general las fuerzas  $F$  en forma de función de  $z$  y de sus derivadas. Eso se puede hacer únicamente de modo aproximado, suponiendo que:

1) la emisión y, por lo tanto, el amortiguamiento de las oscilaciones no son muy grandes, de manera que en el transcurso de cierta cantidad de períodos el movimiento puede considerarse prácticamente periódico;

2) partiendo del principio de conservación de la energía para valores medios, referentes a una cantidad pequeña de períodos, puede sacarse la conclusión de la igualdad de los valores instantáneos de dichas magnitudes.

Partimos de la igualdad evidente:

$$\ddot{z}^2 = -\ddot{z}\dot{z} + (\dot{z}\ddot{z}). \quad (61.61)$$

Tomando el valor medio de  $(\dot{z}\ddot{z})$  por un período y haciendo uso de la primera suposición, tenemos

$$\langle (\dot{z}\ddot{z}) \rangle = \frac{1}{T} [(\dot{z}\ddot{z})_{t=T} - (\dot{z}\ddot{z})_{t=0}] = 0. \quad (61.62)$$

Entonces (61.60), teniendo en cuenta (61.61) y (61.62), adquiere el aspecto

$$\langle F\dot{z} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \langle \ddot{z}^2 \rangle. \quad (61.63)$$

Basándose en la segunda suposición, hallamos

$$F = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \ddot{z}. \quad (61.64)$$

Esta fórmula determina la fuerza de deceleración por radiación. La ecuación de las oscilaciones del electrón, teniendo en cuenta la fuerza de deceleración, tiene la forma

$$m\ddot{z} + m\omega^2 z - [e^2/(6\pi\epsilon_0 c^3)] \ddot{z} = 0. \quad (61.65)$$

En la electrodinámica la expresión para la fuerza de deceleración se generaliza para el movimiento arbitrario. Ahí la fuerza se describe también por la tercera derivada respecto al tiempo propio de las magnitudes correspondientes que caracterizan el movimiento del electrón. La ecuación que se recibe en este caso es invariante desde el punto de vista relativista. Durante largo tiempo se consideraba que dicha ecuación describe correctamente la reacción de radiación. En cambio, hace poco se realizó un cálculo, aplicando el ordenador, de unos cuantos casos sencillos de movimiento y fueron obtenidos resultados absurdos de antemano. Por eso la cuestión sobre la descripción clásica invariante desde el punto de vista relativista del movimiento del electrón, teniendo en cuenta la reacción de emisión no puede considerarse resuelta en la actualidad.

La existencia de la fuerza de deceleración se confirmó experimentalmente en los aceleradores. Como ya se ha dicho, las partículas cargadas en el acelerador sufren pequeñas oscilaciones armónicas cerca de la órbita equilibrada, denominadas oscilaciones de betatrón (véase el § 56). Además, en su movimiento la carga emite intensivamente. La fuerza de deceleración por radiación provoca el amortiguamiento de las oscilaciones de betatrón.

## § 62. Propagación de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos

*Se examinan las propiedades principales y las peculiaridades de la propagación de las ondas electromagnéticas en los dieléctricos.*

**Ondas planas.** La onda electromagnética se denomina plana si los vectores de la onda poseen una misma magnitud en todos los puntos de cualquier plano, perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Claro está que dichos vectores varían de plano a plano. Puede decirse que los planos, perpendiculares a la dirección de propagación son superficies de fase constante en la onda plana. La onda se llama monocromática si los vectores de la onda cambian con el tiempo según la ley armónica con una frecuencia determinada. Por ejemplo, si una onda electromagnética plana se propaga a lo largo del eje Z, los vectores del campo de la onda tienen la forma:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(z) e^{i\omega t}; \quad \mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}(z) e^{i\omega t}. \quad (62.1)$$

*Si las superficies de la fase constante coinciden con las de la amplitud constante, la onda se denomina homogénea.*

**Ecuaciones para los vectores del campo de la onda.** No vamos a partir de los potenciales, como en el § 61, sino que directamente de los vectores del campo. Examinemos el caso de un medio ilimitado homogéneo  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ . La conductividad del dieléctrico  $\gamma = 0$ . Las ecuaciones de Maxwell

tienen la forma:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (62.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (62.3)$$

Al diferenciar los dos miembros de la ecuación (62.2) respecto al tiempo y excluyendo en el primer miembro de la igualdad obtenida la derivada  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  con ayuda de (62.3), recibimos

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (62.4)$$

Haciendo uso de la fórmula (A.10) y teniendo en cuenta que  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , ya que las cargas libres están ausentes, hallamos la ecuación para  $\mathbf{E}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (62.5)$$

De la misma manera encontramos la ecuación para  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (62.6)$$

Así, pues, los vectores del campo satisfacen la ecuación de la onda en la que la velocidad de propagación es igual a

$$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu} = c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (62.7)$$

La fórmula (62.7) muestra que en el dieléctrico la velocidad de propagación de las ondas es menor que en el vacío.

**Vectores de onda.** Hagamos coincidir el eje  $Z$  y la dirección de propagación de la onda electromagnética. Los vectores del campo se determinan por las fórmulas tipo (62.1). Poniendo en (62.5) la expresión para  $\mathbf{E}$  [véase (62.1)] y reduciendo los dos miembros de la ecuación por  $e^{i\omega t}$  después de diferenciar, hallamos para  $\mathbf{E}(z)$  la ecuación

$$d^2 \mathbf{E}(z)/dz^2 + k^2 \mathbf{E}(z) = 0, \quad (62.8)$$

donde  $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ . La solución general de esta ecuación es la siguiente:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_{01} e^{-ikz} + \mathbf{E}_{02} e^{ikz}, \quad (62.9)$$

donde  $\mathbf{E}_{01}$  y  $\mathbf{E}_{02}$  son constantes. Poniendo (62.9) en la fórmula (62.1), encontramos que

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_{01} e^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{E}_{02} e^{i(\omega t + kz)}. \quad (62.10)$$

El primer sumando del segundo miembro de (62.10) representa una onda que se propaga en dirección de los valores positivos del eje  $Z$ , y el segundo, en dirección de los valores negativos [véase (61.12)].

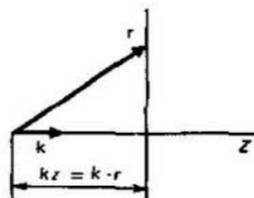


Fig. 257  
Superficie de la fase constante de la onda plana

De la misma manera hallamos la solución para B. Admitamos que la onda se propaga en dirección positiva del eje Z. Entonces,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}; \quad \mathbf{B}(z, t) = B_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (62.11)$$

Semejante onda es plana, monocromática y homogénea.

**Velocidad de fase (de propagación).** Las fórmulas (62.11) muestran que las ondas planas en un dieléctrico homogéneo se propagan sin variar la amplitud, o sea, sin absorción. La velocidad de movimiento del plano de la fase constante se denomina **velocidad de fase**. Se halla diferenciando las condiciones de constancia de la fase respecto al tiempo:

$$\omega t - kz = \text{const}, \quad (62.12)$$

que proporciona

$$\omega - k \frac{dz}{dt} = 0, \quad (62.13)$$

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \quad (62.14)$$

Las fórmulas (62.11) están escritas para una elección especial del sistema de coordenadas cuando el eje Z coincide con la dirección de propagación de la onda. De esta restricción puede liberarse con ayuda del vector de onda  $\mathbf{k}$ , dirigido a lo largo de la propagación de las ondas y se determina por el módulo mediante la expresión (61.8). Según la definición de onda plana, que se propaga en dirección del vector  $\mathbf{k}$ , los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en cualquier punto del plano, perpendicular a esta dirección, en el caso dado al eje Z, son los mismos. Sea  $r$  el radio vector de cierto punto en semejante plano de fase constante.

Es obvio que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz$  (fig. 257) y en lugar de (62.11) puede escribirse:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}; \quad (62.15a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

**Longitud de onda.** Según la definición, es la distancia a la que se desplaza cierto punto de fase constante durante un período de oscilaciones:

$$\lambda = vT = \omega T / k = 2\pi / k, \quad (62.15b)$$

donde

$$k = 2\pi / \lambda \quad (62.15c)$$

es el número de onda o también se llama constante de longitud.

**Propiedades de las ondas.** Para investigar las propiedades de las ondas planas sustituyamos las expresiones (62.15a) en las (62.2) y (62.3). Para simplificar los cálculos es útil hacer uso de la representación simbólica operacional de las operaciones vectoriales. En calidad de inicial sirve el operador vectorial

de habla:

$$\nabla = i_x \frac{\partial}{\partial x} + i_y \frac{\partial}{\partial y} + i_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (62.16)$$

donde  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $i_z$  son versores en dirección de los ejes de coordenadas.

No es difícil comprobar que mediante este operador las operaciones principales del análisis vectorial se representan así:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{rot} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (62.17)$$

donde  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  y  $\nabla \times \mathbf{A}$  son los productos vectorial y escalar del operador  $\nabla$  por el vector  $\mathbf{A}$ . Tengamos en cuenta que

$$\nabla e^{-ik \cdot r} = -ik e^{-ik \cdot r}. \quad (62.18)$$

Aplicando las ecuaciones de Maxwell y las expresiones (62.15a), pueden investigarse las propiedades de las ondas planas. La ecuación de Maxwell  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  nos da

$$\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = -ik \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (62.19)$$

Esto significa que el vector de intensidad  $\mathbf{E}$  de la onda es perpendicular a  $\mathbf{k}$ , es decir, es perpendicular a la dirección de su propagación. Análogamente, la ecuación de Maxwell

$$\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = -ik \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (62.20)$$

muestra que  $\mathbf{B}$  es también perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Poniendo las expresiones (62.15a) en (62.2) y (62.3), hallamos:

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \varepsilon \mu \omega \mathbf{E}, \quad (62.21)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}. \quad (62.22)$$

Sea  $\mathbf{n}$  un versor dirigido en el sentido de la propagación de la onda. Entonces, basándose en (62.8) puede escribirse

$$\mathbf{k} = n\omega \sqrt{\varepsilon \mu} = n\omega/v. \quad (62.23)$$

Por eso [véase (62.22)]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}. \quad (62.24)$$

Con ayuda de (62.19) y (62.20) se mostró que los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares a  $\mathbf{n}$ . Las fórmulas (62.21), (62.22) y (62.24) muestran que estos vectores son también perpendiculares uno a otro. Tomando en los dos miembros de la igualdad (62.24) los módulos de las magnitudes, hallamos

$$E = vB. \quad (62.25)$$

Partiendo de la relación (62.24) puede sacarse la conclusión de que en un dieléctrico homogéneo los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  varían en una misma fase. Todas las fórmulas de este párrafo son válidas para el vacío si se supone que  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  y  $v = c$  es la velocidad de la luz. La variación de los vectores de la onda plana en el espacio se muestra en la fig. 258.

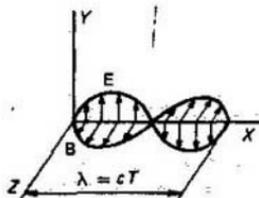


Fig. 258  
Onda electromagnética plana armónica

**Densidad del flujo de energía.** Ésta se determina por el vector de Poynting, cuyo módulo en el caso de onda plana es igual a

$$|S| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = |\mathbf{E}| |\mathbf{H}| = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2} \left( \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu^2} B^2 \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}), \quad (62.26a)$$

donde  $1/\sqrt{\epsilon\mu} = v$  es la velocidad de propagación de la onda y

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (62.26b)$$

es la densidad volumétrica de la energía en ella. La expresión para el flujo de energía puede representarse como

$$\mathbf{S} = w \mathbf{v}. \quad (62.27)$$

Eso significa que *la velocidad de transporte de la energía de la onda plana en un dieléctrico homogéneo es igual a la velocidad de fase de la onda.*

Las ondas electromagnéticas se emiten sólo por las corrientes alternas y por las cargas eléctricas que se mueven con aceleración. Las corrientes continuas y las cargas en movimiento uniforme y rectilíneo no emiten.

¿En qué consisten los procesos físicos que conducen a la posibilidad de existencia de las ondas electromagnéticas?

¿Cuál es la estructura de la onda plana y cuál es la velocidad de su propagación en el vacío?

### § 63. Propagación de las ondas electromagnéticas en medios conductores

*Se examinan las propiedades principales y las peculiaridades de la propagación de las ondas electromagnéticas en los medios conductores.*

**Constante dieléctrica compleja.** Se estudia el caso de un medio homogéneo:  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$  ( $\gamma \neq 0$ , es decir, el medio es conductor). Entonces las ecuaciones de Maxwell tienen el aspecto:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \gamma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (63.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (63.2)$$

donde se utilizaron las designaciones simbólicas de las operaciones vectoriales y se tuvo en cuenta que  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ . Sustituyendo en estas ecuaciones las expresio-

nes (62.15a), para los vectores del campo hallamos:

$$-\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{B} = \omega\mu [\varepsilon + \gamma/(i\omega)] \mathbf{E}, \quad (63.3)$$

$$\mathbf{k}_\omega \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}, \quad (63.4)$$

con la particularidad de que  $\mathbf{k}_\omega$  en (62.15a) se denota por  $\mathbf{k}_\omega = \mathbf{k}^{(0)}k_\omega$ , donde  $\mathbf{k}^{(0)}$  es el versor.

La ecuación (63.3) pasa a ser la ecuación (62.21) para los dieléctricos en el caso de  $\gamma = 0$ . La ecuación (63.4) no se diferencia de la ecuación correspondiente para los dieléctricos. De esta manera, el medio conductor en sentido matemático se diferencia del dieléctrico sólo en que en vez de la constante dieléctrica  $\varepsilon$  para el medio entra la constante dieléctrica compleja

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon + \gamma/(i\omega) = \varepsilon - i\gamma/\omega. \quad (63.5)$$

Todos los cálculos posteriores coinciden con los cálculos para los dieléctricos, únicamente que es necesario utilizar  $\varepsilon_\omega$  en lugar de  $\varepsilon$ . Así pues, en vez del número de onda real  $k$  aparece la magnitud compleja  $k_\omega$ , con la particularidad de que

$$k_\omega^2 = \omega^2 \varepsilon_\omega \mu = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega\gamma\mu. \quad (63.6)$$

Representando  $k_\omega$  en forma de un número complejo:

$$k_\omega = k - is, \quad (63.7)$$

escribamos la igualdad (63.6) en la forma

$$k^2 - 2iks - s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega\gamma\mu. \quad (63.8)$$

Al igualar las partes reales e imaginarias de (63.8), hallamos:

$$k^2 - s^2 = \omega^2 \varepsilon \mu \equiv a, \quad (63.9)$$

$$2ks = \omega\gamma\mu \equiv b. \quad (63.10)$$

La solución de este sistema algebraico de las ecuaciones es así:

$$k^2 = \frac{a}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right)^2} + 1 \right), \quad (63.11)$$

$$s^2 = \frac{a}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right) = \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\varepsilon \omega} \right)^2} - 1 \right). \quad (63.12)$$

**Profundidad de penetración.** Investiguemos la amplitud de la onda que se propaga en dirección de los valores positivos del eje  $Z$ :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kx)} = E_0 e^{-sx} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (63.13)$$

De esta manera, la amplitud de la onda durante la propagación disminuye, es decir, en el medio conductor la onda electromagnética se propaga amortiguándose la amplitud. En el camino

$$\Delta = 1/s \quad (63.14)$$

la amplitud de la intensidad del campo de la onda disminuye  $e$  veces, por lo que  $\Delta$  adquiere el nombre de **profundidad de penetración** de la onda plana en un medio conductor.

Estimemos la profundidad de penetración de las ondas de diversa longitud. Para la luz visible la longitud de onda es igual a

$$\lambda = (0,4 \dots 0,75) \cdot 10^{-6} \text{ m}, \quad (63.15)$$

lo que corresponde a la frecuencia  $\omega$  del orden de  $5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ . La conductividad de los metales tiene el orden de  $10^7 \Omega^{-1} \times \text{m}^{-1}$  y el valor de  $\epsilon$  puede tomarse igual a  $\epsilon_0$ . Así pues,

$$\gamma/(\epsilon\omega) \approx 2 \cdot 10^3 \gg 1. \quad (63.16)$$

Para longitudes de ondas mayores que la de la luz, dicha desigualdad aumenta. Por eso en la fórmula (63.12) puede menospreciarse la unidad en comparación con  $\gamma/(\epsilon\omega)$  y escribirse la expresión para  $s$  de esta forma

$$s = \sqrt{\omega\gamma\mu/2}. \quad (63.17)$$

Por consiguiente, la profundidad de penetración es igual a

$$\Delta = 1/s = \sqrt{2/(\omega\gamma\mu)}. \quad (63.18)$$

Puesto que la longitud de onda  $\lambda$  está enlazada con la frecuencia  $\omega$  mediante la relación  $\omega = 2\pi/(\lambda\sqrt{\epsilon\mu})$ , la fórmula (63.18) puede escribirse de nuevo

$$\Delta = \sqrt{\lambda/\pi\gamma} \sqrt{\epsilon/\mu}, \quad (63.19)$$

donde  $\sqrt{\mu/\epsilon}$  tiene dimensión de resistencia y es una resistencia característica del medio. Para el vacío es igual a

$$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\Omega. \quad (63.20)$$

Examinemos, por ejemplo, el cobre para el cual  $\gamma = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\mu \approx \mu_0$ ,  $\epsilon \approx \epsilon_0$ . Para  $\lambda = 1 \text{ m}$  la profundidad de penetración es igual a  $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Por eso en realidad no se puede ni hablar de que la onda penetre en un medio conductor, simplemente existe la absorción en una capa superficial muy pequeña. Incluso para ondas muy cortas dicha conclusión queda siendo válida. Verbigracia, para longitudes de ondas del orden de las ondas luminosas ( $\lambda \approx 10^{-6} \text{ m}$ ) la profundidad de penetración es  $\Delta \approx 4 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ .

**Causa física de la absorción.** La causa física de tal rápido amortiguamiento de las ondas electromagnéticas en un medio conductor es la transformación de la energía electromagnética de la onda en calor de Joule: *la intensidad del campo electromagnético de la onda excita en el medio conductor las corrientes de conducción que, según la ley de Joule—Lenz, calientan la substancia del medio.*

**Interpretación del efecto pelicular.** Ahora puede interpretarse el efecto pelicular. La fórmula (63.19) para el espesor de penetración de la corriente coincide con la fórmula (63.18) para la profundidad de penetración de la onda electromagnética en el conductor, lo que posee una base física profunda.

La energía, transportada por la corriente, se mueve en el espacio alrededor de los conductores en forma de energía electromagnética. Parte de ella atraviesa la superficie del conductor y penetra dentro de éste para mantener el movimiento de los electrones y allí se transforma en energía cinética de los electrones, la cual, a su vez, se convierte en calor de Joule. Por esta razón, la corriente puede mantenerse sólo en aquellas partes del conductor a donde se suministra del espacio circundante la energía electromagnética. Ya que esta energía puede penetrar al conductor sólo a la profundidad  $\Delta$  [véase (63.18)], únicamente en los márgenes de semejante profundidad en las inmediaciones de la superficie del conductor puede existir la corriente, es decir,  $\Delta$  es espesor de la penetración de la corriente.

**Velocidad de fase y longitud de onda en un medio conductor.** La fórmula (62.14), teniendo en cuenta (63.13) y (63.11), adquiere el aspecto:

$$v = \frac{\omega}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \frac{2}{(1 + [\gamma/(\omega\epsilon)]^2)^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}. \quad (63.21)$$

Esta velocidad es inferior a la velocidad de las ondas en un medio no conductor para los mismos valores de  $\mu$  y  $\epsilon$ , o sea, la presencia de la conductividad del medio reduce la velocidad de fase. La longitud de onda en un medio conductor es igual a

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} \left\{ \frac{2}{(1 + [\gamma/(\omega\epsilon)]^2)^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}, \quad (63.22)$$

es decir, disminuye en comparación con la longitud de onda en un medio no conductor con las mismas magnitudes de  $\mu$  y  $\epsilon$ .

La fórmula (63.22) muestra que en el medio conductor la velocidad de fase es función de la frecuencia, es decir, se observa el fenómeno de dispersión. Por esta razón, el medio conductor es siempre de dispersión. La peculiaridad más esencial de la propagación de las señales en los medios de dispersión es la variación de su forma durante la propagación.

**Relación entre las fases de las oscilaciones de los vectores del campo.** La magnitud compleja  $k_\omega$  en (63.7) es más cómodo representarla en forma exponencial:

$$k_\omega = |k_\omega| e^{i\varphi}. \quad (63.23)$$

La fórmula (63.4) puede representarse como

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} e^{i\varphi} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}, \quad (63.24)$$

donde  $\mathbf{k}^{(0)}$  es el versor en dirección de la propagación de la onda, en el presente caso en dirección del eje  $Z$ . Los vectores  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares a este eje.

Sea que la intensidad del campo eléctrico de la onda, conforme a (63.13), se da mediante la fórmula

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (63.25)$$

donde, sin limitar la generalidad, puede considerarse que el vector  $\mathbf{E}_0$  es real, ya que la elección del punto de referencia del tiempo  $t$  es siempre arbitrario.

Poniendo (6.5) en (63.24), hallamos

$$\mathbf{B} = \frac{|k_\omega|}{\omega} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz + \varphi)}. \quad (63.26)$$

Después de determinar las partes reales de las expresiones (63.25) y (63.26), hallamos las fórmulas para las oscilaciones reales de los vectores del campo en una onda plana que se propaga en un medio conductor:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz), \\ \mathbf{B} &= \frac{|k_\omega|}{\omega} \mathbf{k}^{(0)} \times \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz + \varphi). \end{aligned} \quad (63.27)$$

Por lo tanto, las fases de las oscilaciones de los vectores magnético y eléctrico de la onda plana se diferencian. De (63.7) hallamos

$$\operatorname{tg} \varphi = -s/k = \sqrt{\epsilon\mu/\gamma} - \sqrt{1 + (\epsilon\mu/\gamma)^2}, \quad (63.28)$$

es decir, el ángulo  $\varphi$  es negativo. Esto significa que la fase  $\mathbf{B}$  alcanza cierto valor más tarde que la fase  $\mathbf{E}$ . Eso se manifiesta mediante dos vías.

Si se examinan las oscilaciones de los vectores de la onda en un punto fijo, junto al cual pasa la onda,  $\mathbf{B}$  alcanza su valor, diríamos, máximo, más tarde que  $\mathbf{E}$ , o sea,  $\mathbf{B}$  como función del tiempo se retrasa de  $\mathbf{E}$ .

Si se examina una onda en el momento de tiempo fijo,  $\mathbf{B}$  alcanza, por ejemplo, su valor máximo para valores de  $z$  menores que  $\mathbf{E}$ , es decir,  $\mathbf{B}$  como función de  $z$  avanza a  $\mathbf{E}$ .

Estas afirmaciones se complementan mutuamente y hallan su unicidad en el hecho de que la onda electromagnética progresiva se mueve en dirección de su propagación (en el caso dado en dirección de los valores positivos de  $Z$ ).

Relación entre las amplitudes de los vectores del campo. De las fórmulas (63.25) y (63.26) se desprende que

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{|k_\omega|}{\omega} = \sqrt{\mu\epsilon} (1 + [\gamma/(\epsilon\mu)]^2)^{1/4}. \quad (63.29)$$

Comparando las expresiones (63.29) y (63.25), vemos que en el medio conductor  $|\mathbf{B}|$  respecto a  $|\mathbf{E}|$  es mayor que en un medio no conductor siendo los parámetros  $\mu$  y  $\Sigma$  los mismos.

## § 64. Invariancia de la onda plana

*Se discuten las invariantes de las transformaciones del campo electromagnético y las consecuencias del análisis de las invariantes.*

**Transformación de los campos.** Al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, las intensidades de los campos cambian. Las igualdades (11.15) son las fórmulas de transformación.

Puede resultar que en un sistema inercial de referencia existen los campos magnético, y eléctrico, mientras que en el otro, sólo el campo eléctrico, etc.

La onda electromagnética plana se caracteriza bien por sus propiedades definidas: los vectores  $E$  y  $B$  son mutuamente perpendiculares y sus módulos están enlazados mediante la relación:  $E = cB$ . Se pregunta: ¿se conservan estas propiedades de los vectores del campo al pasar a otro sistema inercial de referencia? Si se conservan, el concepto de la onda electromagnética plana es invariante desde el punto de vista relativista que refleja todas las propiedades internas del campo electromagnético de la onda plana. Pero si no, dicho concepto depende de la elección hecha al azar de un sistema inercial de referencia u otro y no determina el objeto físico que existe objetivamente. Con ayuda de las fórmulas (11.15) es fácil verificar que los vectores de las intensidades del campo electromagnético que satisfacen la condición de la onda plana en un sistema de coordenadas, satisfacen estas mismas condiciones en otro sistema de coordenadas, es decir, *la onda plana es un concepto invariante desde el punto de vista relativista que determina el objeto físico que existe imparcialmente*. En lugar de la verificación directa de una afirmación particular sobre la invariancia de la onda plana es útil analizar una cuestión más amplia sobre las invariantes de las transformaciones del campo electromagnético y la afirmación sobre la invariancia de la onda plana argumentarla como una deducción particular, a la par con la cual, sin embargo, se obtienen otras muchas deducciones muy importantes.

**Invariantes de las transformaciones del campo electromagnético.** Se llaman invariantes de las transformaciones del campo electromagnético a las magnitudes, compuestas de vectores del campo que no cambian su valor al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Los vectores del campo en distintos sistemas de coordenadas están enlazados entre sí mediante las transformaciones (11.15).

Existen procedimientos de búsqueda de las invariantes de transformaciones. Aplicando las fórmulas (11.15) y calculando directamente, puede comprobarse que al pasar de un sistema inercial de referencia a otros las siguientes invariantes no cambian su valor:

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2, \quad I'_1 = H^2 - c^2 D^2; \quad (64.1)$$

$$I_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}, \quad I'_2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}; \quad (64.2)$$

$$I_3 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (64.3)$$

Comprobemos, por ejemplo, que la magnitud  $I_2$  es invariante. Según las fórmulas (11.15) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' &= B'_x E'_x + B'_y E'_y + B'_z E'_z = B_x E_x + \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{B_y + (v/c^2) E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \\ &+ \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{B_z - (v/c^2) E_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} = B_x E_x + B_y E_y + B_z E_z = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (64.4)$$

De manera análoga se demuestra la invariancia de las demás magnitudes.

La onda plana se determina por la igualdad a cero de las invariantes  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 0$ , y su invariancia no requiere una posterior demostración, ya que  $I_1$  e  $I_2$  son invariantes. Sin embargo, la invariancia de las magnitudes de (64.1) —

(64.3) permite deducir otras cosas muy importantes sobre el comportamiento de los campos electromagnéticos al pasar de un sistema de referencia a otro.

**Análisis de los invariantes del campo.** Partiendo de la invariancia de las magnitudes de (64.1)—(64.3), pueden sacarse las siguientes conclusiones:

1) si en cierto sistema inercial de referencia  $c^2 B^2 > E^2$  y  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ , puede elegirse un sistema inercial de referencia en el que el campo eléctrico esté ausente y el magnético se diferencie de cero. Pero si  $\mathbf{B}$  no es perpendicular a  $\mathbf{E}$ , semejante sistema inercial de referencia no existe;

2) si en cierto sistema inercial de referencia  $c^2 B^2 < E^2$  y  $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$ , puede elegirse un sistema inercial de referencia en el que el campo magnético esté ausente y el eléctrico se diferencie de cero. Si  $\mathbf{B}$  no es perpendicular a  $\mathbf{E}$ , semejante sistema inercial de referencia no existe;

3) si en cierto sistema inercial de referencia existe sólo el campo eléctrico o sólo el magnético, al pasar a otro sistema inercial de referencia, en general, existen tanto el campo eléctrico, como el magnético que son mutuamente perpendiculares;

4) la onda plana, para la cual  $E = cB$ ,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , en todos los sistemas inerciales de referencia permanece siendo plana.

## § 65. Presión de las ondas electromagnéticas. Impulso del fotón

*Se describe el mecanismo de aparición de la presión de las ondas electromagnéticas. Se calcula la densidad volumétrica del impulso de la onda electromagnética y se determina el impulso del fotón.*

**Mecanismo de surgimiento de la presión.** Si una onda plana se propaga en un medio conductor, su campo eléctrico excita en el medio una densidad volumétrica de la corriente de conducción según la ley de Ohm:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad (65.1)$$

Sobre el elemento de corriente  $\mathbf{j} dV$  actúa por parte del campo magnético de la onda una fuerza (fig. 259):

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV, \quad (65.2)$$

dirigida por el vector  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , es decir, hacia la propagación de la onda. Designando por  $\mathbf{n}$  el vector en dirección de la propagación de la onda, puede escribirse:

$$d\mathbf{F} = \gamma \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV = n \gamma E B dV = n j E dV / v = n dP / v, \quad (65.3)$$

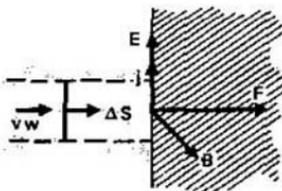


Fig. 259  
Diagrama de la aparición de la presión en una onda electromagnética

donde se ha hecho uso de la relación entre los módulos de los vectores de la onda plana ( $E = vB$ ) y se ha tomado en consideración la ley de Joule-Lenz  $dP = jE dV$ . Es necesario prestar atención a que en la fórmula (65.3) la magnitud  $dP$  es la energía absorbida con respecto al tiempo.

**Presión.** Sea que del vacío incide sobre el medio conductor un flujo de energía de las ondas electromagnéticas que se absorbe por completo. En el transcurso de  $t$  s sobre el elemento superficial  $dS$  incide, conforme a la fórmula (62.27), una cantidad de energía

$$dP = vw dS, \quad (65.4)$$

que se absorbe y crea en la normal a la superficie una fuerza (65.3) que, a base de (65.4), es igual a

$$dF = nw dS. \quad (65.5)$$

Por eso la presión a lo largo de la normal a la superficie es

$$P_p = \frac{dF}{dS} = nw. \quad (65.6)$$

La magnitud

$$w = 1/2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (65.7)$$

es la densidad volumétrica de la energía de las ondas electromagnéticas.

**Impulso del tren de ondas electromagnéticas.** Supongamos que la energía  $W$ , que se encuentra en cierto volumen en el tren de ondas electromagnéticas, se absorbe en cierto volumen de un cuerpo conductor durante un lapso  $\Delta t$ . Entonces, de acuerdo con (65.3), sobre este volumen del cuerpo actúa la fuerza

$$\mathbf{F} = n \frac{W}{\Delta t} \frac{\mathbf{1}}{v}. \quad (65.8)$$

Según la ley de Newton, la fuerza que actúa sobre el volumen, está enlazada con el impulso que adquiere el volumen, mediante la relación

$$\mathbf{F} = p/\Delta t. \quad (65.9)$$

Poniendo (65.9) en (65.8), obtenemos

$$\mathbf{p} = n \frac{W}{v}. \quad (65.10)$$

La fórmula (65.10) contiene una afirmación fundamental: *el tren de ondas electromagnéticas que posee una energía  $W$  y se mueve con una velocidad  $v$ , tiene un impulso  $\mathbf{p}$ , ligado con la energía mediante la relación (65.10). El impulso está dirigido hacia la propagación de las ondas.*

**Densidad volumétrica del impulso de las ondas electromagnéticas.** Después de dividir los dos miembros de (65.10) por el volumen que abarca la energía  $W$ , obtenemos para la densidad volumétrica del impulso de las ondas electromagnéticas la siguiente fórmula

$$\mathbf{G} = \mathbf{p}/V = n\mathbf{w}/v, \quad (65.11)$$

donde  $w = W/V$  es la densidad de la energía electromagnética en la onda plana. Con ayuda de la fórmula (62.27), la expresión (65.11) puede escribirse así

$$G = S/v^2, \quad (65.12)$$

donde  $S$  es el vector de Poynting y  $v$ , la velocidad de movimiento de las ondas.

La presión de las ondas electromagnéticas puede calcularse por la variación de su impulso. Verbigracia, si las ondas electromagnéticas inciden por la normal a la superficie y se absorben totalmente, la presión, conforme a la fórmula (65.12), es igual a

$$p_p = vG = S/v = w, \quad (65.13)$$

lo que, claro está, coincide con (65.6). Pero si la onda se refleja totalmente, al cuerpo se le transmite un impulso doble y la presión es

$$p_p = 2vG = 2w. \quad (65.14)$$

De la misma manera puede calcularse la presión durante una absorción parcial, durante la incidencia oblicua sobre la superficie, etc.

Fue el científico ruso P. N. Lébedev (1866—1912) quien por primera vez descubrió experimentalmente en 1900 la presión de las ondas luminosas. Como se ve de (65.14), la presión es muy pequeña. Por ejemplo, para el flujo de  $1,4 \text{ kW/m}^2$ , lo que aproximadamente es igual al flujo de la energía solar en la órbita de la Tierra, la presión de la luz es de unos  $5 \text{ }\mu\text{Pa}$ . Por eso se necesitó la elaboración de unos métodos muy precisos de medición.

**Impulso del fotón.** Conforme a las representaciones cuánticas, la luz es en sí un conjunto de cuantos de energía, denominados fotones. La energía del fotón está ligada con la frecuencia de la luz mediante la relación de Einstein:

$$\boxed{\varepsilon = \hbar\omega}, \quad (65.15)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck. *La existencia de la presión de la luz obliga a reconocer que los fotones poseen también impulso.* De acuerdo con (65.10), el impulso del fotón es

$$p = \hbar\omega/c, \quad (65.16)$$

donde  $c$  es la velocidad de propagación de la luz en el vacío. Escribamos de nuevo la fórmula (65.16), teniendo en cuenta (62.23):

$$\boxed{p = \hbar k}. \quad (65.17)$$

La relación (65.17) es, a la par con (65.15), la ecuación fundamental de la teoría cuántica de la luz.

La intensidad del campo eléctrico de una onda plana excita en el medio conductor las corrientes de conducción, debido a cuya interacción con la inducción del campo magnético de la onda surge la fuerza de Lorentz que se manifiesta como presión de la onda electromagnética.

¿Qué representa en sí en el modelo clásico la fuerza que conduce al surgimiento de la presión durante la absorción de la onda electromagnética en el medio conductor?

¿Qué es lo que determina la densidad de impulso de la onda electromagnética?

**Ejemplo 65.1.** Determinar la fuerza con que los fotones, cuya densidad volumétrica de la energía es  $S$ , actúan sobre una esfera de reflexión absoluta y de radio  $r$  (fig. 260).

Debido a la simetría axial de la distribución de la presión, sólo la componente de la fuerza en dirección del flujo inicial de los fotones se diferencia de cero. De acuerdo con la fórmula (65.13), sobre el elemento superficial  $d\sigma$  (fig. 260) actúa una fuerza  $dF = (2S/c) \cos\theta d\sigma$  dirigida hacia el centro de la esfera, y la componente de dicha fuerza en dirección del eje  $Z$  es

$$dF_z = -(2S/c) \cos^2\theta d\sigma.$$

El área del elemento superficial en el sistema de coordenadas esféricas  $d\sigma = r^2 \sin\theta \times \alpha d\theta d\alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo axial en el plano perpendicular al eje  $Z$ . Para la fuerza total a lo largo del eje  $Z$  obtenemos

$$F_z = -\left(\frac{2S}{c}\right)r^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{3} \frac{S}{c} r^2,$$

es decir, la fuerza es  $4/3$  veces mayor que para el caso cuando toda la energía del flujo se absorbe por la esfera.

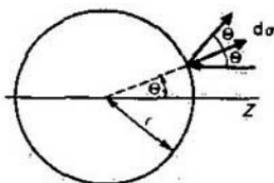


Fig. 260

Para calcular la presión de la radiación electromagnética sobre la esfera absolutamente reflectora

## § 66. Guías de ondas y resonadores

*Se describen las características fundamentales de las guías de ondas y las peculiaridades de propagación de las ondas electromagnéticas en ellas. Se da la clasificación de las ondas en las guías de ondas. Se examina el principio de funcionamiento del resonador.*

**Sección del circuito.** Cualquier sección del circuito posee resistencia óhmica, capacidad e inductancia. El esquema equivalente de la sección del circuito se muestra en la fig. 261, a. La resistencia óhmica  $R$  existe siempre porque los cables la poseen. La capacidad surge como consecuencia de que en la sección del circuito existen siempre cargas volumétricas o superficiales y campos eléctricos en los que se acumula la energía del campo eléctrico. Al pasar la corriente por la sección del circuito, se excita un campo magnético en el que se acumula la energía. Por lo tanto, la sección del circuito posee también inductancia. El papel relativo de  $R$ ,  $C$ ,  $L$  depende de las propiedades concretas de la sección del circuito y de la frecuencia.

**Sección del conductor.** A una sección rectilínea pequeña de conductor le corresponden una carga superficial bastante pequeña y una energía del campo

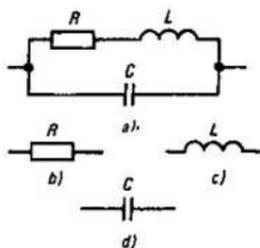


Fig. 261

Circuitos equivalentes para la sección del circuito con diferentes frecuencias

magnético. Esto significa que su capacidad e inductancia son bastante pequeñas. Por esta razón, a pequeñas frecuencias la capacitancia de la sección resulta mayor que la resistencia óhmica y la inductancia, menor, es decir, tiene lugar la desigualdad  $1/(\omega C) \gg R \gg \omega L$ . Por eso en el circuito, dado en la fig. 261, a la corriente circula principalmente por la sección  $R, L$ , mientras que la capacidad aparenta estar desconectada. Dado que  $\omega L \ll R$ , la inductancia no tiene un valor esencial y la sección del conductor a pequeñas frecuencias se representa así como se muestra en la fig. 261, b.

Al aumentar la frecuencia, la resistencia  $R$  crece. Ya que el espesor de penetración de la corriente disminuye como  $1/\sqrt{\omega}$ , puede considerarse

que la resistencia aumenta como  $\sqrt{\omega}$ . La inductancia  $L$ , al crecer la frecuencia, disminuye poco y por eso la inductancia  $\omega L$  crece como  $\omega$ . Por consiguiente, al aumentar la frecuencia, el papel relativo de la inductancia de la sección del conductor crece y ya no se le puede considerar simplemente como una sección con resistencia óhmica. Con el aumento de la frecuencia la capacitancia  $1/(\omega C)$  disminuye. Por eso a frecuencias suficientemente grandes, una parte considerable de la corriente aparece en forma de corrientes de desplazamiento. Eso significa que a frecuencias grandes, el esquema equivalente de la sección del conductor tiene la forma mostrada en la fig. 261, a, con la particularidad de que tanto  $R$ , como  $L$  y  $C$  tienen que tomarse en consideración. Su papel relativo depende de la frecuencia. Para frecuencias extremadamente altas, el papel decisivo lo desempeña la capacidad.

**Bobina de inductancia.** A frecuencias bajas la bobina tiene  $1/(\omega C) \gg \omega L \gg R$ . La corriente circula principalmente a través de  $R$  y  $L$  (fig. 261, a) y dado que  $R \ll \omega L$ , el esquema equivalente de la bobina de inductancia a pequeñas frecuencias tiene la forma dada en la fig. 261, c.

Al crecer la frecuencia, la inductancia de la bobina aumenta y la capacitancia disminuye. Por eso una parte cada vez mayor de la corriente pasa en forma de corriente de desplazamiento a través de las capacidades que existen entre las espiras aisladas de la bobina. A la par con la resistencia óhmica y la inductancia, la capacidad comienza a desempeñar un papel importante. En definitiva, el esquema equivalente de la bobina de inductancia se convierte en un circuito, mostrado en la fig. 261, a, con la particularidad de que el papel relativo de  $R, L$  y  $C$  depende de la frecuencia. Para una frecuencia muy elevada casi toda la corriente pasa en forma de corriente de desplazamiento, como si saltase de una espira a otra, y la inductancia como si se desconectase del circuito.

**Condensador.** A frecuencias bajas, la capacitancia del condensador es inferior a la resistencia óhmica y la inductancia [ $1/(\omega C) \ll R, 1/(\omega C) \ll \omega L$ ]. Como consecuencia, en el circuito (fig. 261, a) la sección  $R, L$  como si se desco-

nectase y el esquema equivalente del condensador tiene el aspecto que muestra la fig. 261, *d*.

Al aumentar la frecuencia, la situación cambia. Para aclarar qué sucede en ese caso, examinemos como ejemplo un condensador plano.

Al crecer la frecuencia en el condensador plano, aumenta la desviación del campo eléctrico con respecto al homogéneo. La causa de ello es la interacción entre la inducción electromagnética y las corrientes de desplazamiento. A primera vista parece que el cuadro del fenómeno debe ser análogo al que conduce a la aparición del efecto pelicular (fig. 223), pero eso no es así. La diferencia se determina por otras relaciones de fase entre los vectores de los campos.

Examinemos el diagrama vectorial de los campos y las corrientes en caso del efecto pelicular (fig. 223). La inducción del campo magnético se encuentra en fase con la intensidad de la corriente e intensidad del campo eléctrico que la origina. La derivada de la inducción del campo magnético las adelanta en  $\pi/2$ , mientras que la intensidad  $\Delta E$ , engendrada por la variación del campo magnético, de un campo eléctrico complementario que conduce directamente al efecto pelicular, retarda en  $\pi/2$  de la intensidad  $E$  del campo. Por eso siendo el enfoque más estricto, en la fig. 223 debería tomarse en consideración no sólo la distribución espacial de los campos, sino las fases de la variación de las intensidades.

El diagrama vectorial de aparición del efecto pelicular se muestra en la fig. 262, *a*.

Las fórmulas de cálculo tienen en cuenta automáticamente la relación entre las fases de los vectores.

En el condensador (fig. 262, *b*) la relación entre las fases de los vectores del campo es otra. Dado que el campo magnético se origina por las corrientes de desplazamiento, según la ley

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

su inducción está en fase con  $\partial E/\partial t$  y, por lo tanto, adelanta en  $\pi/2$  la intensidad  $E$  (fig. 262, *c*). Por eso la intensidad  $\Delta E$  que surge según la ley de la inducción electromagnética y que conduce a la redistribución de la intensidad del campo  $E$  en el condensador, se encuentra en fase con la intensidad  $E$  (fig. 262, *c*). La diferencia principal respecto a los fenómenos que tienen lugar al aparecer el efecto pelicular, consiste en una relación distinta de fases entre  $E$  y  $B$ : al surgir

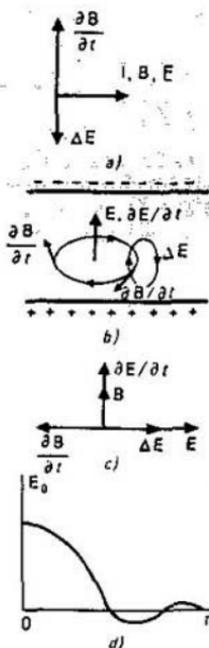


Fig. 262  
Relación entre las intensidades de los campos en el condensador a frecuencias altas

el efecto pelicular, sus fases coinciden, mientras que en el condensador la inducción del campo magnético adelanta en fase la intensidad del campo eléctrico en  $\pi/2$ . Por eso, verbigracia, para el campo eléctrico nulo, en el cuadro del efecto pelicular la inducción del campo magnético es nula y en el condensador posee un valor máximo. Al crecer la intensidad  $E$  del campo durante el efecto pelicular desde el valor nulo, la inducción del campo magnético aumenta y la línea  $\partial B/\partial t$  forma con  $E$  un sistema de mano derecha (fig. 223), mientras que en el condensador dicha intensidad disminuye, por eso las líneas  $\partial B/\partial t$  forman con  $E$  un sistema de mano izquierda (fig. 262, b). Por consiguiente, la intensidad  $\Delta E$  del campo eléctrico rotacional está dirigida de manera que aumenta la intensidad del campo eléctrico en el centro del condensador y debilita éste en la periferia, o sea, en el condensador el campo se debilita desde el centro a la periferia. A cierta distancia del centro la intensidad se anula, cambiando posteriormente su dirección en contraria (fig. 262, d).

La característica cuantitativa de este fenómeno puede obtenerse debido a la solución de la ecuación para la intensidad  $E$  del campo, partiendo de la fórmula (62.5). En el caso dado existen una componente de  $E$  y la simetría axial del problema, es decir,  $E = E(r)$ , donde  $r$  es la distancia desde el eje del condensador hasta el punto en el que se determina la intensidad. Suponiendo, como de costumbre,

$$E(r, t) = E_0(r) e^{i\omega t}$$

y considerando para definitud que entre las armaduras del condensador  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ , obtenemos para  $E_0(r)$  la ecuación

$$\frac{d^2 E_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_0}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} E_0 = 0,$$

escrita en coordenadas cilíndricas. Esta ecuación lleva el nombre de ecuación de Bessel con índice nulo, cuya solución se escribe en forma de  $J_0(\omega r/c)$ . Las funciones de Bessel están bien estudiadas. La fig. 262, d muestra la marcha de la función  $J_0(\omega r/c)$ . Las raíces mínimas de la función con índice nulo son  $\xi_1 = 2,40$ ;  $\xi_2 = 5,52$ ;  $\xi_3 = 8,65$ ; . . . Tendremos en cuenta que  $\omega/c = 2\pi/\lambda$ , donde  $\lambda$  es la longitud de la onda electromagnética con frecuencia  $\omega$  en el vacío. Por eso las distancias en las que la intensidad de corriente en el condensador se anula, son  $r_1 = \lambda \xi_1 / (2\pi)$ .

Por ejemplo, la primera vez la intensidad se reduce a cero a la distancia  $r_1 = \lambda \xi_1 / (2\pi) = 0,38\lambda$ . Merced a este comportamiento de la intensidad, el condensador cesa de ser una capacidad pura. Está claro que los campos magnéticos en el condensador se hacen esenciales, pero eso significa que comienza a desempeñar su papel la inductancia. Con otras palabras, el condensador pierde también a frecuencias elevadas sus funciones iniciales de capacidad.

**Radiación.** En el § 61 se mostró que la potencia de emisión del oscilador crece proporcionalmente al cuarto grado de la frecuencia ( $\sim \omega^4$ ), es decir, con gran rapidez. Pero ello significa que al pasar las corrientes de alta frecuencia por los cables, tiene lugar una radiación intensa de la energía electromagnética. A una frecuencia alta, las pérdidas se hacen tan considerables que resulta inútil

transmitir la energía por cables. Es necesario hallar otros procedimientos para transportar la energía electromagnética de alta frecuencia, ya que los métodos elaborados para las frecuencias bajas, de generación y transporte de las oscilaciones electromagnéticas son inaplicables para frecuencias muy altas.

**Guías de ondas.** La idea principal de la guía de ondas es dirigir las ondas electromagnéticas por cierto canal, reduciendo al mínimo las pérdidas posibles durante la propagación. Con este fin, por lo visto, es necesario excluir en lo posible la excitación de las corrientes de conducción, así como excluir la penetración de la energía electromagnética a través de la pared del canal. De modelo más sencillo de guía de ondas sirve un tubo vacío, dentro del cual se propagan las ondas electromagnéticas. Examinemos las peculiaridades principales de estas ondas electromagnéticas en el ejemplo más simple: en una guía de ondas rectilínea rectangular.

**Guía de ondas rectangular.** Las paredes de este dispositivo se consideran completamente conductoras, sus dimensiones y la posición del sistema de coordenadas se dan en la fig. 263. En general, en las guías de ondas pueden propagarse muchos tipos de ondas. Examinemos uno de ellos.

Supongamos que el vector eléctrico de la onda esté orientado a lo largo del eje  $Y$ . Para simplificar la situación tomemos la longitud de la guía de ondas infinita a lo largo del eje  $Y$ . Esto nos libera de tener en cuenta las condiciones de frontera para el vector  $E$  en las superficies de la guía de ondas, paralelas al plano  $XZ$  y facilita considerablemente la solución de la tarea. Además, para la extensión infinita de la guía de ondas en dirección del eje  $Y$  el problema puede examinarse con el método de representaciones, lo que permite aclarar la situación física y la esencia de los procesos que transcurren al propagarse las ondas en la guía de ondas.

Así pues, la tarea se reduce a dos mediciones. La ecuación de onda para la intensidad del campo eléctrico tiene el aspecto

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \quad (66.1)$$

donde  $E = E_y(x, z, t)$ .

Ya que las paredes de la guía de ondas son completamente conductoras, la condición de frontera para  $E$  es así

$$E(x, 0, t) = 0, \quad E(x, a, t) = 0. \quad (66.2)$$

Busquemos la solución de la ecuación como

$$E = E_0 \operatorname{sen} k_z z e^{i(\omega t - k_x x)}, \quad (66.3)$$

con la particularidad de que para satisfacer las condiciones de frontera (66.2) es necesario hacer

$$k_z a = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (66.4)$$

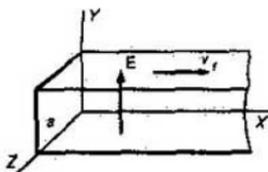


Fig. 263  
Guía de ondas rectangular

Es obvio que la solución (66.3) satisface la condición de ausencia de cargas libres en la guía de ondas:  $\text{div } \mathbf{E} = \partial E_y / \partial y = 0$ ,  $E_x = E_z = 0$ . Poniendo (66.3) en (66.1), obtenemos

$$(-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2) E = 0. \quad (66.5)$$

Esta igualdad puede satisfacerse sólo a condición de que

$$-k_x^2 - k_z^2 + \omega^2/c^2 = 0, \quad (66.6)$$

de la que se desprende que

$$k_x = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2 n^2/a^2}. \quad (66.7)$$

**Frecuencia límite.** La onda electromagnética se propaga en la guía de ondas sin amortiguación si en la fórmula (66.3) la magnitud  $k_x$  es real. Esto significa que en la expresión (66.7) el radicando no debe ser negativo. De aquí obtenemos la condición para la cual en la guía de ondas se propagan las ondas:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{a^2} \geq 0 \quad (66.8)$$

o bien

$$\omega \geq \frac{\pi c}{a} n. \quad (66.9)$$

Así pues, para el valor prefijado de  $n$ , que caracteriza la forma de la onda en dirección del eje  $Z$ , existe una **frecuencia límite**. Las ondas electromagnéticas con menor frecuencia no pueden propagarse en la guía de ondas. El valor de esta frecuencia se obtiene de (66.9) para  $n = 1$ :

$$\omega_0 = \pi c/a. \quad (66.10)$$

La presencia de la frecuencia límite significa, con otras palabras, la existencia de la onda con longitud máxima de onda que puede propagarse en la guía de ondas. Teniendo en cuenta que  $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$ , obtenemos para la longitud límite de onda

$$\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 2a. \quad (66.11)$$

Esta igualdad posee un sentido geométrico muy claro: *en la guía de ondas en cuestión pueden propagarse sólo las ondas, cuya longitud de onda es inferior a la sección transversal doble de la guía de ondas.*

*La presencia de la frecuencia límite es un rasgo característico de todas las guías de ondas, a pesar de que su valor concreto es distinto para diversas guías de ondas.*  
**Velocidad de fase.** Conforme a la expresión (66.3), esta velocidad se encuentra de la condición

$$\omega t - k_x x = \text{const}, \quad (66.12)$$

de donde

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2}} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \pi^2 c^2/a^2}} > c, \quad (66.13)$$

es decir, *la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas en la guía de ondas supera la velocidad de la luz. Eso es también un rasgo característico de las guías*

de ondas, aunque el valor concreto de la velocidad de fase depende de las propiedades de la guía de ondas y los tipos de ondas.

Teniendo en cuenta las expresiones (66.10) y (66.11), la fórmula (66.13) es cómodo representarla como

$$v_1 = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}} \quad (66.14)$$

Por consiguiente,  $\omega \geq \omega_0$ ,  $\lambda \leq \lambda_0$ , ya que en caso contrario la velocidad de fase se hace imaginaria, es decir, no puede haber propagación de las ondas.

**Longitud de ondas en la guía de ondas.** Según la definición de longitud de onda, tenemos

$$\lambda_0 = v_1 T = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda)^2}} > \lambda, \quad (66.15)$$

donde  $\lambda = cT$ . La longitud de onda en la guía de ondas es siempre superior a la longitud de onda en el espacio libre. Elevando los dos miembros de (66.15) al cuadrado y tomando sus recíprocas, obtenemos

$$1/\lambda_0^2 = 1/\lambda^2 - 1/\lambda_0^2 \quad (66.16)$$

La relación (66.16) es válida para las guías de ondas de cualquier forma, a pesar de ser deducida para un caso particular.

**Aplicación del método de representaciones al análisis de las guías de ondas.** Para aclarar con más precisión el cuadro físico de la propagación de las ondas en la guía de ondas y el sentido de las relaciones obtenidas analicemos el ejemplo por el método de representaciones. A título de emisor elemental tomemos un conductor recto infinito, recorrido por la corriente alterna de frecuencia  $\omega$ . Este emisor, análogamente al oscilador (dipolo) de Hertz, emite ondas, cuyo vector eléctrico está dirigido paralelamente al conductor. Por lo visto, en caso de un conductor infinitamente largo las ondas serán cilíndricas. Sin embargo, a una distancia suficientemente grande respecto al emisor se las puede considerar planas.

La fig. 264 muestra las proyecciones de las paredes de la guía de ondas sobre el plano XZ. El vector eléctrico de las ondas está orientado perpendicularmente al plano del diseño. Coloquemos el primer emisor en el medio de la guía de ondas a la distancia de  $a/2$  de cada una de sus paredes perpendiculares al plano del diseño. La fase de las oscilaciones del emisor se denota por un punto, es decir, la corriente en el momento dado fluye hacia nosotros. El emisor radia ondas por todas las direcciones y por eso en las paredes de la guía de ondas la intensidad del campo es diferente de cero. La tarea consiste en elegir el sistema de emisores de manera que la intensidad sumaria de sus campos en las paredes de la guía de ondas durante todo el tiempo sea nula. El campo que satisfaga

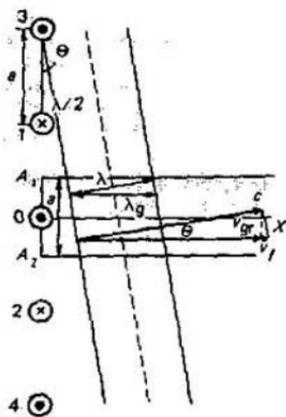


Fig. 264  
Estudio del guía de ondas rectangular aplicando el método de representaciones

esta condición será precisamente el campo buscado en la guía de ondas. Claro que cuando las ondas se propagan de emisores imaginarios y las paredes de la guía de ondas se consideran también imaginarias, las ondas imaginarias las atraviesan sin obstáculos.

Para que en la pared  $A_1$  de la guía de ondas se liquide el campo, engendrado por el emisor  $O$ , es necesario colocar a la distancia  $a/2$  de ella el emisor  $I$  que oscile con un desplazamiento de las oscilaciones en un semiperíodo respecto al emisor  $O$ . Por lo tanto, el emisor  $I$  debe oscilar en una fase contraria al emisor  $O$ , lo que se indica con el signo  $(-)$  («la corriente parte de nosotros»). Las ondas del emisor  $I$  llegan a los puntos de la pared  $A_1$  de la guía de ondas durante el mismo lapso que del emisor  $O$ . Ya que las fases de la onda desde  $O$  y  $I$  en la pared  $A_1$  se diferencian en  $\pi$ , la suma de las intensidades de estas ondas es nula. De la misma manera el emisor  $2$  apaga en la pared  $A_2$  la emisión  $O$ .

En cambio, el emisor  $I$  crea un campo en la pared  $A_2$  y el emisor  $2$ , en la pared  $A_1$ . Es necesario añadir los siguientes emisores que apaguen dichos campos. Para suprimir la emisión del  $1$  en la pared  $A_2$ , es indispensable coger el emisor  $4$  y para suprimir la emisión del  $2$  en la pared  $A_1$  sirve el emisor  $3$ , etc., hasta el infinito. La intensidad del campo originado por un sistema infinito de semejantes emisores, es nula en las paredes  $A_1$  y  $A_2$ . Por consiguiente, el campo obtenido satisface las ecuaciones de Maxwell siendo la superposición de los campos, cada uno de los cuales satisface estas ecuaciones y es en sí una onda electromagnética en la guía de ondas. El campo fuera de la guía de ondas tiene un significado auxiliar, por lo que no nos interesa.

Carácter discreto de las direcciones de propagación de las ondas planas que provienen de un sistema de emisores. De un emisor individual las ondas planas se propagan en todas las direcciones. Pero de un sistema de emisores las ondas planas pueden propagarse sólo en direcciones bien determinadas, pero no cualesquiera. Semejantes direcciones pueden ser sólo aquellas, en las cuales las ondas planas de emisores aislados se amplifican mutuamente. Eso puede ocurrir sólo cuando la diferencia de los recorridos de las ondas, emitidas por los emisores vecinos, sea igual a un número entero de longitudes de ondas con una mitad, ya que los emisores vecinos radian las ondas en oposición de fase. Como consecuencia resulta que en la dirección en cuestión de todos los emisores se propagan ondas con una diferencia de fases de un número entero de períodos y, por lo tanto, estas ondas se amplifican. En la fig. 264 la dirección de propagación de las ondas se caracteriza por el ángulo  $\theta$ . La condición de amplificación mutua de las ondas tiene el aspecto

$$a \sin \theta = \lambda (m + 1/2) \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (66.17)$$

La condición análoga puede escribirse para las ondas que se propagan por la otra parte respecto al eje de la guía de ondas, es decir, para los ángulos  $\theta$  negativos.

Longitud de onda de corte. La condición (66.17) muestra que para cada longitud de onda existe un ángulo de propagación, mínimo respecto al eje, que se alcanza para  $m = 0$ , así como el valor máximo del número  $m$  para el que el ángulo es igual a  $\theta = \pi/2$ , o sea, la onda se propaga perpendicularmente a la

longitud de la guía de ondas. Siendo la longitud de onda bastante grande, ya  $m = 0$  nos lleva a la condición  $\sin \theta = 1$ , es decir, esta onda puede propagarse sólo perpendicularmente al eje de la guía de ondas. Eso significa que las ondas con dicha longitud de onda y mayores no pueden propagarse en la guía de ondas. Esto es precisamente la longitud de onda de corte  $\lambda_0$  que se determina por la fórmula (66.17) para  $\sin \theta = 1$  y  $m = 0$ :

$$a = \lambda_0/2, \quad (66.18a)$$

lo que coincide con (66.11). A esta longitud de onda le corresponde la frecuencia límite de (66.10).

**Longitud de onda y velocidad de fase en la guía de ondas.** La velocidad de fase es la velocidad de los puntos de la superficie de fase constante de la onda en dirección de la guía de ondas, es decir, la velocidad del punto de intersección del frente de la onda plana y las paredes de la guía de ondas. De la fig. 264 se ve que es igual a

$$v_t = c/\cos \theta. \quad (66.18b)$$

Tomando en la fórmula (66.17) la onda con  $m = 0$ , obtenemos  $\sin \theta = \lambda/(2a)$  y representemos la expresión (66.18b) como

$$v_t = \frac{c}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - [\lambda/(2a)]^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_0/\omega)^2}}, \quad (66.19)$$

lo que coincide con (66.14). Así pues, *la velocidad de fase no está ligada con el movimiento en el espacio de cualquier objeto físico y la energía.* Puede imaginarse que en la fig. 264 el eje  $X$  representa el borde de la mesa de escribir y la línea que muestra el frente de la onda, es una regla. Entonces, para un ángulo  $\theta$ , bastante próximo a  $\pi/2$ , las velocidades pequeñas de desplazamiento de la regla perpendicularmente a su longitud, conducen a las velocidades del punto de contacto entre la regla y el borde de la mesa que superan la velocidad de la luz. Está claro que la existencia de esta velocidad no está en contradicción con la restricción que pone la teoría de la relatividad sobre la velocidad del movimiento de los objetos físicos y la propagación de las interacciones.

La longitud de onda  $\lambda_0$  se determina también como consecuencia de la construcción geométrica en la fig. 264:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}}, \quad (66.20)$$

lo que coincide con (66.15). De la fórmula (66.20) se desprende también la expresión (66.16).

**Velocidad de grupo.** Está claro que la velocidad de fase no representa la velocidad de movimiento de la energía de la onda a lo largo de la guía de ondas. La energía en la onda plana se mueve en el vacío con una velocidad  $c$  perpendicularmente al frente de onda. En dirección del eje de la guía de ondas la velocidad de movimiento de la energía se determina por la proyección de la velocidad  $c$  sobre el eje. Esta velocidad se denomina de **grupo**. Como se ve de la

fig. 264, es igual a

$$v_g = c \cos \theta = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}. \quad (66.21)$$

La velocidad de grupo es siempre inferior a la velocidad de la luz. Su nombre lo recibió debido a que es igual a la velocidad de la cresta de la amplitud sumaria del grupo de ondas con frecuencias próximas que se propagan con distintas velocidades de fase, dependientes de la frecuencia. El conjunto de ondas con diferentes frecuencias en la guía de ondas forma un grupo de ondas, cuya dependencia de las velocidades de fase respecto a la frecuencia se determina por la fórmula (66.14). La propiedad física más importante de la velocidad de grupo ya se anunció: es la velocidad de movimiento de la energía, relacionada con las ondas.

**Relación entre las velocidades de fase y de grupo.** Multiplicando término por término las fórmulas (66.21) y (66.19), obtenemos

$$v_f v_g = c^2. \quad (66.22)$$

Esta relación es fundamental en la teoría de propagación de las ondas y tiene carácter universal, a pesar de que se obtuvo para un ejemplo particular y aplicando un método especial.

**Campo magnético.** La inducción del campo magnético de la onda plana es perpendicular a la intensidad de su campo eléctrico. Por eso los vectores de inducción magnética se encuentran en planos, paralelos al plano de la fig. 264. Dado que las ondas planas se propagan bajo un ángulo al eje de la guía de ondas, la inducción del campo magnético de cada una de las ondas planas posee componentes a lo largo del eje de la guía de ondas y perpendicularmente a ella.

Lo mismo puede decirse de la inducción del campo magnético de la superposición de las ondas planas que forman una onda en la guía de ondas. Esto significa que las ondas electromagnéticas que se mueven en la guía de ondas no son puramente transversales: tienen una componente de inducción del campo magnético en dirección de la propagación. En otros casos pueden haber tipos de ondas cuando existe la componente de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la dirección de la propagación, etc. Es necesario señalar que las ondas en la guía de ondas, en general, no son homogéneas.

**Clasificación de las ondas en la guía de ondas.** La siguiente clasificación de las ondas en las guías de ondas se considera general:

1. Las ondas transversales magnéticas (ondas T.M.) que se determinan por la exigencia  $H_x = 0$ , es decir, por la ausencia de la componente de la intensidad del campo magnético en dirección de la propagación de las ondas. Puede mostrarse que en este caso todas las características de las ondas se expresan sólo a través de  $E_x$ .

2. Las ondas transversales eléctricas (ondas T.E.), definidas por la exigencia  $E_x = 0$ . En este caso las soluciones se expresan sólo mediante  $H_x$ .

3. Ondas transversales electromagnéticas (ondas T.E.M.), determinadas por las exigencias  $E_x = 0$ ,  $H_x = 0$ .

4. Ondas híbridas cuando al mismo tiempo  $H_x \neq 0$  y  $E_x \neq 0$ . Ellas surgen cuando las condiciones de frontera requieren que  $E_x$  y  $H_x$  sean distintos de cero simultáneamente, lo que se realiza en las guías de ondas reales, cuya conductividad de las paredes es finita.

**Resonadores.** Examinemos un condensador, cuya gráfica de variación de la intensidad del campo en frecuencias altas se da en la fig. 262, d. En la superficie cilíndrica de radio  $r_1$ , el campo eléctrico está ausente. Esto significa que el vector de Poynting en dicha superficie es nulo y, por lo tanto, no hay movimiento de energía a través de ella. Consideremos que esta superficie cilíndrica es un conductor ideal que une las armaduras del condensador. El campo eléctrico en su superficie, como siempre, permanece nulo. El campo magnético no es igual a cero y sus líneas de fuerza son circunferencias, concéntricas con los puntos del eje del cilindro. A lo largo del conductor cilíndrico circulan las corrientes de una placa del condensador a otra, como se desprende de la condición de frontera (38.35) para la componente tangencial del vector  $\mathbf{H}$ . Ahora todo el volumen cerrado cilíndrico, limitado por las paredes completamente conductoras, puede ser aislado y abandonado a su suerte. El campo eléctrico en él oscilará con una frecuencia  $\omega$  y con esta misma frecuencia tendrá lugar la recarga de las placas del condensador. El volumen cerrado, dentro del cual suceden las oscilaciones del campo electromagnético, se denomina resonador. En ausencia de pérdidas de energía electromagnética la frecuencia de las oscilaciones del campo se llama frecuencia propia (o natural) del resonador. Semejante resonador se denomina cilíndrico. En el resonador, lo mismo que en la guía de ondas, pueden existir oscilaciones y ondas estacionarias de distintos tipos. Ellas poseen diferentes frecuencias de resonancia. Para el tipo de oscilaciones en el condensador cilíndrico, examinado ahora mismo, las frecuencias de resonancia  $\omega_l$  de las oscilaciones son iguales a  $\omega_l = \xi_l c / r_0$ , donde  $\xi_l$  son las raíces de la función de Bessel con índice nulo. Así pues, el resonador para este tipo de oscilaciones tiene no una frecuencia de resonancia, sino una cantidad inmensa. Para otros tipos posibles de oscilaciones se obtienen otras frecuencias de resonancia. En el resonador real existen pérdidas de energía y las oscilaciones resultan ser amortiguadas. La terminología y los conceptos, relacionados con las oscilaciones en los resonadores, coinciden totalmente con los que se utilizan al estudiar las vibraciones mecánicas.

La peculiaridad característica de cualquier guía de ondas es la existencia de la frecuencia límite. En cualquier guía de ondas la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas es mayor que la velocidad de la luz.

## Problemas

- 9.1. Determinar la potencia media de emisión para el cuadro con corriente  $I = I_0 \cos \omega t$ . El área del cuadro es  $\sigma$ . Considerar que  $I_0 = 10$  A,  $\sigma = 100$  cm<sup>2</sup> y  $\omega = 10^8$  s<sup>-1</sup>.
- 9.2. Haciendo uso de los datos del problema 9.1, hallar la densidad máxima del flujo de emisión en el plano del cuadro con corriente a la distancia de 200 m de él.
- 9.3. Determinar el brazo del dipolo si la potencia de su emisión es igual a la potencia de emisión del cuadro con corriente, dado en el problema 9.1. La frecuencia de las oscilaciones del dipolo es igual a la frecuencia de las oscilaciones de la intensidad de la corriente en el cuadro y cada una de las cargas del dipolo es igual a  $|q| = 10^{-4}$  C.

- 9.4. A una intensidad del campo eléctrico  $E \approx 30$  kV/cm, tiene lugar la descarga disruptiva en el aire. ¿Pará qué densidad del flujo de energía de las ondas electromagnéticas planas de una frecuencia no muy alta transcurre la descarga disruptiva en el aire?
- 9.5. Una onda electromagnética polarizada plana con frecuencia angular  $\omega = 10^8$  s<sup>-1</sup> incide de la arista sobre el cuadro de conductor, con la particularidad de que el vector de inducción de la onda está dirigido perpendicularmente al plano del cuadro. Las dimensiones lineales del cuadro son pequeñas en comparación con la longitud de onda. El área del cuadro  $\sigma = 100$  cm<sup>2</sup>, la densidad media del flujo de energía en la onda  $\langle S \rangle = 1$  W/m<sup>2</sup>. Hallar la fem máxima de inducción en el circuito.
- 9.6. En la órbita de la Tierra el flujo de energía solar de radiación es aproximadamente igual a  $S = 1,4$  kW/m<sup>2</sup>. Hallar el radio de una partícula esférica que es radiador completo y posee una densidad  $\rho = 5$  g/cm<sup>3</sup> y para la cual la presión de la luz en el espacio interplanetario es igual a la atracción solar. La masa del Sol es  $m_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg y la constante de gravitación  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>. La distancia entre la Tierra y el Sol es  $R = 150 \cdot 10^6$  km.
- 9.7. Un condensador plano con placas redondas de radio  $a$  se conecta a una fuente continua de fem exteriores  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$ . La distancia entre las placas varía lentamente por la ley armónica  $d = d_0 + \Delta \sin \omega t$ . Hallar la intensidad del campo magnético, originado por las corrientes de desplazamiento.
- 9.8. Un cuadro de  $n$  espiras que abarca un área  $S$ , yace en el plano  $XZ$ . En dirección del eje  $X$  se propaga una onda electromagnética plana, cuyo vector eléctrico es paralelo al eje  $Y$ :  $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz)$ . Hallar la fuerza electromotriz, inducida en el cuadro. La longitud de onda es mucho mayor que las dimensiones lineales del cuadro.
- 9.9. El flujo de energía solar en la órbita de la Tierra es  $S = 1340$  W/m<sup>2</sup>. ¿Cuáles son las amplitudes de  $E_0$  y  $B_0$  de una onda electromagnética plana con semejante densidad de flujo de energía?
- 9.10. Como se desprende de la fórmula (65.14), la presión de la onda electromagnética sobre una superficie idealmente reflectora para un ángulo de incidencia  $\theta$  es igual a  $p_\theta = 2w \cos^2 \theta$ , donde  $w$  es la densidad de la energía electromagnética en la onda incidente. Supongamos que sobre la superficie incide una radiación isotrópica, o sea, la densidad de los flujos de energía que llegan de todas las direcciones posibles, es la misma. Hallar la presión de la onda sobre la superficie.
- 9.11. Hallar la amplitud de la intensidad del campo eléctrico de la emisión de un dipolo eléctrico en el plano que atraviesa el dipolo perpendicularmente a su dirección, a una distancia de 10 km del dipolo, siendo la potencia de emisión del dipolo de 10 kW.
- 9.12. El medio entre las armaduras del condensador plano posee una constante dieléctrica  $\epsilon$  y una conductividad pequeña  $\gamma$  (un dieléctrico no ideal). La capacidad del condensador es  $C$ . A las armaduras del condensador se les aplica una diferencia de potencial  $U$ , después de lo cual se aíslan. Hallar la ley de variación de la magnitud de la carga con el tiempo en cada una de las armaduras del condensador y la corriente de desplazamiento que circula por el condensador.

## Respuestas

- 9.1.  $\langle P \rangle = \mu_0 \omega^4 I_0^2 \sigma^2 / (12\pi c^3) = 0,124$  W. 9.2.  $S_{\text{máx}} = \mu_0 \omega^4 I_0^2 \sigma^2 / (16\pi^2 c^3 r^2) = 0,47 \times 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup>. 9.3.  $l = I_0 \sigma / (|q| c) = 3,3 \cdot 10^{-4}$  m = 0,33 mm. 9.4.  $\langle S \rangle = [\epsilon_0 / (4\mu_0)]^{1/2} E_0^2 = 1,2 \cdot 10^3$  kW/cm<sup>2</sup> = 12 GW/m<sup>2</sup>. 9.5.  $\mathcal{E}_{\text{máx}}^{\text{ind}} = \sqrt{2 \langle S \rangle} \mu_0 (\epsilon_0 \mu_0)^{1/4} \sigma \omega = 9$  mV. 9.6.  $r = \frac{3SR^2}{4Gm_{\text{sp}}} = 0,5 \cdot 10^{-7}$  m. 9.7.  $H_\phi = -e_0 \mathcal{E}_{\text{ext}} \omega \Delta r \cdot \cos \omega t / [2 (d_0 + \Delta \sin \omega t)^2]$ . 9.8.  $\mathcal{E}^{\text{ind}} = nkSE_0 \sin \omega t$ . 9.9.  $E_0 = 1005$  V/m,  $B_0 = 3,35 \cdot 10^{-6}$  T. 9.10.  $p = w_{\text{tot}}/3$ . 9.11.  $E_0 = 0,095$  V/m. 9.12.  $Q = CUe^{-\gamma t/\epsilon}$ ,  $I_{\text{des}} = -(\gamma/\epsilon) CU \cdot e^{-\gamma t/\epsilon}$ .

## Fluctuaciones y ruido

Los ruidos en un circuito con corriente se determinan por el carácter discreto de los portadores de la carga y las fluctuaciones de la corriente. Los ruidos en principio son iliminables por completo, pero se pueden reducir. En condiciones determinadas pueden detectarse las señales útiles más abajo del nivel de los ruidos.

### § 67. Fluctuaciones en un circuito con corriente. Ruido de resistencia

*Se analizan las causas físicas que determinan la existencia del ruido y se examinan las características cuantitativas del ruido en los circuitos con corriente.*

**Teorema de la equipartición de la energía respecto al grado de libertad.** En la física estadística un gran papel lo desempeña la teoría acerca de que en estado de equilibrio termodinámico a cada grado de libertad del sistema le corresponde una misma energía, igual a  $kT/2$  ( $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$ , la temperatura termodinámica). La manifestación evidente de la validez de dicha afirmación es el movimiento browniano. La energía cinética media del movimiento de traslación ( $mv^2/2$ ) de la partícula browniana satisface la relación  $\langle mv^2/2 \rangle = 3kT/2$ , ya que existen tres grados de movimiento de traslación. **Aplicación del teorema de equipartición de la energía respecto a un galvanómetro de espejo.** Si en un hilo elástico se suspende libremente un espejito, según el teorema de equipartición de la energía, él no puede ser absolutamente inmóvil. Como consecuencia de la interacción del espejito y el movimiento térmico de las moléculas del aire, se excitan sus vibraciones de torsión y a cada grado de libertad debe corresponderle una energía  $kT/2$ . Recordemos que el teorema de equipartición de la energía por los grados de libertad se refiere no sólo a la energía cinética, sino también a la energía potencial del oscilador.

Designemos el módulo de torsión del hilo por  $D$  y el ángulo de desviación del espejo respecto a su posición de equilibrio por  $\varphi$  (fig. 265). La ecuación de las vibraciones de torsión tiene la forma

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad (67.1)$$

donde  $J$  es el momento de inercia del espejo respecto al eje de torsión. Multiplicando los dos miembros de (67.1) por  $\dot{\varphi}$  e integrando la expresión obtenida, hallamos el principio de conservación de la energía:

$$1/2 J \dot{\varphi}^2 + 1/2 D \varphi^2 = \text{const.} \quad (67.2)$$

Puesto que a cada grado de libertad le corresponde una energía  $kT/2$ , de la fórmula (67.2) obtenemos

$$\langle 1/2 J \dot{\varphi}^2 \rangle = \langle 1/2 D \varphi^2 \rangle = 1/2 kT \quad (67.3)$$

y por lo tanto,

$$\langle \varphi^2 \rangle = kT/D. \quad (67.4)$$

Esto significa que el espejo no puede encontrarse en posición de equilibrio, sino que oscila alrededor de esta posición con el cuadrado medio del ángulo de



Fig. 265  
Fluctuaciones de las vibraciones de torsión

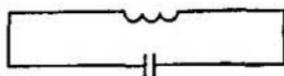


Fig. 266  
Fluctuaciones en un circuito oscilante

desviación (67.4). De esta manera, la expresión (67.4) caracteriza la desviación del ángulo respecto al valor medio, es decir, describe las fluctuaciones. Está claro que si existe cierta vibración de torsión, según el principio de superposición, puede concluirse que la fórmula (67.4) caracteriza la fluctuación del cuadrado de la amplitud.

**Fluctuaciones en un circuito oscilante.** En un circuito oscilante (fig. 266) ocurren oscilaciones con la frecuencia  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ , cuya esencia física consiste en la transformación mutua de la energía del campo eléctrico en el condensador y la energía del campo magnético en la inductancia. El principio de conservación de la energía tiene la forma

$$Q^2/(2C) + LI^2/2 = \text{const.}, \quad (67.5)$$

donde  $Q$  es la carga en las armaduras del condensador e  $I$ , la intensidad de la corriente en el circuito.

Es imposible imaginarse un circuito que no tenga corrientes y un condensador en cuyas armaduras no surjan cargas. Hablando con mayor precisión, semejante situación puede crearse únicamente a la temperatura de 0 K. Para una temperatura, diferente de 0 K, el movimiento térmico de los electrones conduce a la aparición de cargas en las armaduras del condensador y de corrientes en el circuito. Según el teorema de equipartición, tenemos

$$\langle Q^2/(2C) \rangle = \langle LI^2/2 \rangle = kT/2. \quad (67.6)$$

Por consiguiente, el cuadrado medio de la carga en las armaduras del condensador y el cuadrado medio de la intensidad de la corriente son igua-

les a

$$\langle(Q)^2\rangle = kTC, \quad \langle(I)^2\rangle = kT/L. \quad (67.7)$$

Partiendo del principio de superposición, puede decirse que las expresiones (67.7) son en sí las fluctuaciones cuadráticas medias de las magnitudes de la carga e intensidad de la corriente en un circuito oscilante.

Distribución de las fluctuaciones respecto a las frecuencias. La fórmula (69.7) nos da sólo la magnitud media cuadrática completa de las fluctuaciones, sin decirnos de qué manera se distribuye respecto a las frecuencias. Para responder a esta pregunta es necesario resolver la ecuación de oscilaciones para el circuito, sobre el que actúan fuerzas aleatorias, representándolas en forma de una serie (integral) de Fourier respecto a las frecuencias:

$$U = \sum_{\omega} U_{\omega} e^{i\omega t}. \quad (67.8)$$

La ecuación (50.10) para las oscilaciones de la carga adquiere el aspecto

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = \sum_{\omega} U_{\omega} e^{i\omega t}, \quad (67.9)$$

de donde

$$Q = \sum_{\omega} \frac{U_{\omega} e^{i\omega t}}{-L\omega^2 + iR\omega + 1/C}, \quad (67.10)$$

lo que se comprueba diferenciando. Para el cuadrado medio de la amplitud  $\langle |QQ^*| \rangle = \langle |Q|^2 \rangle$ , de aquí hallamos

$$\langle |Q|^2 \rangle = \langle QQ^* \rangle = \left\langle \sum_{\omega, \omega'} \frac{U_{\omega} U_{\omega'}^* e^{i\omega t} e^{-i\omega' t}}{(-L\omega^2 + iR\omega + 1/C)(-L\omega'^2 - iR\omega' + 1/C)} \right\rangle. \quad (67.11)$$

Las fuerzas electromotrices que excitan las oscilaciones de diferentes frecuencias, son independientes y no correlacionadas entre sí. Por eso, al promediar, en la fórmula (67.11) desaparecen los términos con  $\omega \neq \omega'$  y nos queda

$$\langle Q^2 \rangle = \langle |Q|^2 \rangle = \sum_{\omega} \frac{\langle U_{\omega}^2 \rangle}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}, \quad (67.12)$$

donde  $\langle Q^2 \rangle$  y  $\langle U_{\omega}^2 \rangle$  son los valores medios de los cuadrados reales de las amplitudes de las magnitudes correspondientes.

Ahora pasemos al espectro continuo de frecuencias, ya que los cálculos anteriores se efectuaron para el espectro discreto sólo para simplificar los cálculos. El espectro real es continuo. Es necesario pasar de las magnitudes medias cuadráticas para las frecuencias del espectro discreto a las densidades de las magnitudes correspondientes.

El cuadrado medio de la carga total se forma de las contribuciones de las frecuencias aisladas. Por eso

$$\langle Q^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{d \langle Q_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} d\omega, \quad (67.13a)$$

donde  $d \langle Q_{\omega}^2 \rangle / d\omega$  es la densidad de los cuadrados de las amplitudes de las oscilaciones de la carga y  $d \langle Q_{\omega}^2 \rangle$ , el cuadrado medio de la amplitud de las oscilaciones de la carga, correspondiente al intervalo de frecuencias  $(\omega, \omega + d\omega)$ . Bajo el signo de la suma en la fórmula (67.12) sustituyamos:

$$\langle U_{\omega}^2 \rangle \rightarrow \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} d\omega, \quad (67.13b)$$

comprendiendo por  $d \langle U_{\omega}^2 \rangle / d\omega$  la densidad de la distribución de los cuadrados de las amplitudes de las tensiones respecto a las frecuencias. Después de semejante sustitución se puede en la fórmula (67.12) pasar de la suma a la integral. En definitiva obtenemos

$$\langle Q^2 \rangle = \int_0^{\infty} \frac{[d \langle U_{\omega}^2 \rangle / d\omega] d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2} = \int_0^{\infty} \frac{d \langle Q_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} d\omega, \quad (67.14)$$

de donde

$$d \langle Q_{\omega}^2 \rangle = \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}. \quad (67.15)$$

**Ruido de resistencia.** La energía media de las oscilaciones armónicas es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por eso *la densidad del cuadrado medio de la amplitud de las oscilaciones caracteriza la densidad de su energía*. El análisis posterior se fundamenta en la suposición de que la densidad media de los cuadrados de las amplitudes  $\left( \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega} = A \right)$  no depende de la frecuencia. La argumentación de su validez se basa en el carácter aleatorio de las fuerzas electromotrices. Por eso la fórmula (67.14) puede escribirse así:

$$\langle Q^2 \rangle = A \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}, \quad (67.16)$$

$$A = \frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega}.$$

La integral se calcula por los métodos elementales y nos lleva a la igualdad

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2} = \frac{\pi C}{2R}. \quad (67.17)$$

De la expresión (67.7), teniendo en cuenta las fórmulas (67.16) y (67.17), hallamos

$$d \langle U_{\omega}^2 \rangle = (2/\pi) kRT d\omega. \quad (67.18)$$

De aquí, basándose en la expresión (67.15), se desprende que

$$d \langle Q_{\omega}^2 \rangle = \frac{(2/\pi) kTR d\omega}{(L\omega^2 - 1/C)^2 + R^2\omega^2}. \quad (67.19)$$

Es necesario prestar atención a que  $\frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{d\omega}$  determina la densidad del cuadrado medio de la amplitud, referente al intervalo de las frecuencias circulares  $\omega$ . Con mucha frecuencia se utiliza la densidad del cuadrado medio de la amplitud, no referente a la frecuencia circular  $\omega = 2\pi/T$ , sino que simplemente a la frecuencia  $\nu = 1/T$ , es decir, a la magnitud  $d \langle U_{\nu}^2 \rangle / d\nu$ . Teniendo en cuenta que  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $d\omega = 2\pi d\nu$ , hallamos

$$\frac{d \langle U_{\omega}^2 \rangle}{2\omega} = \frac{1}{d\pi} \frac{d \langle U_{\nu}^2 \rangle}{d\nu}. \quad (67.20)$$

Entonces, [véase (67.18)]

$$d \langle U_{\nu}^2 \rangle = 4kTR d\nu, \quad (67.21)$$

es la fórmula de Nyquist: *el cuadrado medio de la amplitud de la tensión de las fluctuaciones es proporcional al intervalo de las frecuencias y depende sólo de la resistencia en el circuito y de la temperatura*. La existencia experimental de semejantes fluctuaciones fue descubierta por Johnson, por eso ellas se denominan ruido de Johnson o ruido de las resistencias.

**Generador equivalente de ruido.** Las fluctuaciones, determinadas por la resistencia  $R$ , cuyo cuadrado medio de la tensión se define por la fórmula (67.21), pueden representarse como el resultado de la acción del generador de fem  $U_{\nu}$  y la resistencia interna  $R$ . El generador equivalente de corriente está shuntado por la resistencia  $R$  y se caracteriza (conforme a la ley de Ohm) por el cuadrado medio de la intensidad de la corriente:

$$d \langle I_{\nu}^2 \rangle = 4kT d\nu/R. \quad (67.22)$$

**Potencia del ruido del generador.** La antena, con cuya ayuda se reciben las radioseñales que a continuación se dirigen al receptor, es equivalente, por su papel en el circuito, a un generador con la correspondiente impedancia interna. Su adaptación al receptor consiste en hacer que la suma de las componentes reactivas de las impedancias de la antena y el receptor sean nulas y sus resistencias óhmicas iguales entre sí (véase el § 49). Entonces la potencia máxima que el generador (antena) puede entregar al receptor [(véase (49.35)], es igual a

$$P_{c.máx} = \langle U^2 \rangle / (4R), \quad (67.23)$$

donde  $\langle U^2 \rangle$  es el cuadrado medio de la fem de la antena y  $R$ , su resistencia interna, igual a la resistencia de la carga.

Supongamos que la resistencia de carga  $R$  no efectúa por sí misma ningún ruido y es, por ejemplo, la resistencia óhmica que se mantiene en la cercanía de la temperatura de 0 K. Podemos imaginarnos en calidad de carga un receptor ideal que por sí mismo no posee ningún ruido interno. A pesar de ello, la señal que se recibe de la antena, va a contener un rudio, cuya potencia, de acuerdo

con las fórmulas (67.23) y (67.21), es igual a

$$dP_r = \frac{d\langle U_v^2 \rangle}{4R} = kT dv. \quad (67.24)$$

Este ruido en los auriculares se oír para una amplificación suficiente, y ningunos perfeccionamientos del receptor podrán eliminarlo. También se puede ver en la pantalla del oscilógrafo. El aumento del factor de amplificación del receptor eleva proporcionalmente en la salida del receptor tanto la señal útil, como también el ruido (67.24), suministrado a su entrada, sin cambiar la relación entre ellos.

**Sensibilidad máxima.** La señal puede detectarse si su potencia es mayor que la potencia del ruido. Por eso de la expresión (67.24) para la potencia mínima de la señal detectada (o demodulada) se obtiene la fórmula

$$dP_0 = kT dv, \quad (67.25)$$

válida para un receptor ideal. Esta potencia representa el umbral de sensibilidad del receptor.

La única posibilidad de aumentar la sensibilidad (para una temperatura fija) es la reducción de la anchura de la banda de frecuencias utilizadas  $dv$ . Pero en este caso disminuye la cantidad de información que la señal lleva en sí, y en cada caso existe su nivel inferior hasta el que se puede reducir la banda. Por ejemplo, para transmitir la voz por la radio mediante la modulación de amplitud sin gran distorsión es necesario tener una banda del orden de  $dv = 10$  kHz. A temperatura ambiente ( $T = 290$  K) eso nos da para la potencia detectada mínima:

$$dP_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290 \cdot 10^4 \text{ W} = 4 \cdot 10^{-17} \text{ W}. \quad (67.26)$$

Para transmitir las imágenes de televisión la anchura de la banda debe ser del orden de 4 MHz, ya que la capacidad de información para restablecer la imagen es mucho mayor que para restituir la voz. Para estas condiciones la potencia mínima de la señal, suministrada a un receptor ideal, es de  $1,6 \cdot 10^{-14}$  W. **Temperatura equivalente de ruido del receptor.** En realidad el propio receptor es una fuente de ruidos complementarios que se superponen a los ruidos de la antena. Por eso la potencia  $dP_1$  de la señal mínima, que puede detectarse, es mayor que  $dP_0$  en  $dP_{rec}$  del ruido interno del receptor:

$$dP_1 = dP_0 + dP_{rec}. \quad (67.27)$$

La potencia  $dP_{rec}$  del ruido interno del receptor se acostumbra a expresarse por la fórmula (67.25) mediante la temperatura equivalente de ruido  $T_e$  en forma

$$dP_{rec} = kT_e dv. \quad (67.28)$$

El receptor ideal posee  $T_e = 0$  K. No obstante, en la práctica no hay necesidad de acercarse mucho a este límite. Es suficiente que la temperatura equivalente sea unas diez veces inferior a la temperatura correspondiente del generador (antena) para que el ruido complementario del receptor sea prácticamente insignificante.

**Coefficiente de ruido.** A temperatura ambiente, conforme a la fórmula (67.27), a un intervalo de frecuencias  $dv = 1$  Hz le corresponde una potencia  $dP_{01} = 4 \cdot 10^{-21}$  W. La característica de ruido del receptor se describe por el coeficiente de ruido

$$F = \frac{dP_1}{dP_{01}} \quad (67.29)$$

Por lo general se expresa en decibelios.

**Relación señal/ruido.** La señal se detecta con tanto mayor fiabilidad, cuanto más supera el nivel del ruido, lo que es muy importante, por ejemplo, para la transmisión cualitativa y la reproducción de las obras musicales. Esta característica de los dispositivos de recepción y reproducción se determina por la relación de la amplitud de la tensión de la señal respecto a la amplitud de la tensión del ruido. Ya que esta razón en condiciones corrientes es un número muy grande, se expresa en decibelios, según la fórmula

$$N = 20 \log \frac{U_s}{U_r} = 10 \log \frac{U_s^2}{U_r^2} \quad (67.30)$$

donde  $U_s$  y  $U_r$  son las amplitudes de la tensión de la señal y el ruido, respectivamente.

Examinemos como ejemplo la relación señal/ruido para un triodo a vacío (fig. 267). La señal se suministra a la entrada del circuito entre la rejilla y el cátodo. La fuente de la señal se caracteriza por la fuerza electromotriz  $U_g$  y la resistencia interna  $R_1$ . La potencia del ruido de la resistencia del generador, a base de la expresión (67.21), es igual a

$$4kT dv = U_{r1}^2 / R_1 \quad (67.31)$$

donde  $U_{r1}$  es la fem del generador equivalente de ruido que se conecta en el circuito en serie con  $R_1$  y el generador  $U_g$ .

Otra fuente de ruido es la resistencia  $R$ , de la que se toma la tensión. La potencia de ruido de esta fuente es

$$4kT dv = U_{r2}^2 / R \quad (67.32)$$

donde  $U_{r2}$  es la fem del generador equivalente de ruido.

Para calcular la potencia de ruido en la rejilla tomemos en consideración que la carga para el generador de ruido  $U_{r1}$  es la resistencia  $R_2$  y para el generador de ruido  $U_{r2}$ , la resistencia  $R_1$ . Está claro que los generadores de ruido funcionan independientemente y por eso el cuadrado medio de la tensión del ruido total es igual a la suma de los cuadrados medios de las tensiones de ruidos, creados por cada uno de los generadores.

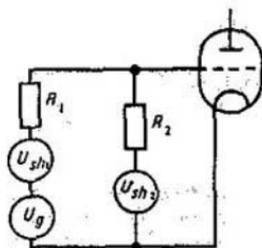


Fig. 267  
Para calcular el ruido en la rejilla del triodo a vacío

Por esta razón, para el cuadrado medio de la tensión de ruido en la rejilla obtenemos

$$U_r^2 = \left( \frac{U_{r1}}{R_1 + R_2} R_2 \right)^2 + \left( \frac{U_{r2}}{R_1 + R_2} R_1 \right)^2 = \\ = 4kT \, dv \left[ \frac{R_1 R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{R_2 R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \right] = 4kT \, dv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (67.33)$$

Tomemos en consideración que el cuadrado medio de la amplitud de la señal en la rejilla es

$$U_s^2 = \left( \frac{U_g}{R_1 + R_2} R_2 \right)^2. \quad (67.34)$$

De las fórmulas (67.33) y (67.34) obtenemos la relación entre el cuadrado medio de la tensión de la señal y el cuadrado medio de la tensión de ruido en la rejilla:

$$\frac{U_s^2}{U_r^2} = \frac{U_g^2}{4kT \, dv} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_1} = \frac{P}{kT \, dv} \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad (67.35)$$

donde  $P = U_g^2/(4R_1)$  es la potencia máxima de la señal que entrega el generador al circuito exterior [véase (67.23)]. De la fórmula (67.35) se ve que *para la adaptación total de la carga al generador ( $R_2 = R_1$ ) la relación señal/ruido no es la mejor. Al contrario, para la desadaptación, aumentando la resistencia de la carga  $R_2$ , puede mejorarse dicha relación aproximadamente el doble.*

A esta misma conclusión puede llegarse estimando la sensibilidad. La potencia mínima de la señal del generador que en la rejilla aún se puede diferenciar del ruido, se obtiene de la fórmula (67.35) si  $U_s^2/U_r^2 = 1$ :

$$P_1 = kT \, dv \frac{R_1 + R_2}{R_2}. \quad (67.36)$$

Por lo visto, la potencia detectada mínima durante la adaptación de la carga al generador ( $R_2 = R_1$ ) es igual a  $2kT \, dv$  y durante la desadaptación ( $R_2 \gg R_1$ ), a  $kT \, dv$ , es decir, *en el caso de desadaptación de la carga del generador la sensibilidad aumenta.*

Si en el circuito en cuestión de generador sirve la antena, todas estas conclusiones son aplicables para el sistema antena—receptor.

Durante la adaptación total de la carga al generador la relación señal/ruido no es la mejor. Se puede mejorar aproximadamente el doble si durante la desadaptación de la carga al generador se aumenta la resistencia de la carga  $R_2$ . A esta misma conclusión puede llegarse mediante la estimación de la sensibilidad: durante la desadaptación de la carga al generador, aumentando la resistencia de la carga  $R_2$ , la sensibilidad crece.

## § 68. Ruido de agitación térmica y ruido de corriente

*Se examina la causa física de la aparición del ruido de agitación térmica y se analiza su distribución respecto a la frecuencia. Se citan las características fundamentales del ruido de corriente.*

**Fuente del ruido de agitación térmica.** La corriente eléctrica es en sí un movimiento de cargas elementales discretas y no un flujo continuo de carga. Por eso nos da una sucesión de impulsos de corrientes, cada uno de los cuales se determina por la llegada de un electrón aislado al punto en cuestión. La corriente que atraviesa cierta superficie se parece a un flujo de perdigones menudos a través de ella, lanzados desde cierto dispositivo y distribuidos caóticamente respecto al tiempo. Está claro que la cantidad de perdigones menudos que intersecan la superficie en pequeños lapsos iguales consecutivos, sufrirá fluctuaciones considerables. De manera análoga, debido al carácter discreto de las cargas fluctuará la intensidad de la corriente. Dichas fluctuaciones se denominan **ruido de agitación térmica**.

**Distribución del ruido según las frecuencias.** La llegada de cada electrón equivale a un impulso de corriente, cuya duración es extremadamente pequeña. Para el electrón puntual es necesario considerarla nula y el impulso de corriente infinito, es decir, el impulso se representa por la función  $\delta$ . Puesto que la carga que contiene el impulso de corriente es igual a la carga del electrón  $e$ , la corriente determinada por la llegada del electrón en el momento de tiempo  $t_1$ , puede representarse en la forma

$$i(t) = e\delta(t - t_1). \quad (68.1)$$

Sea  $T$  un intervalo grande de tiempo, durante el cual llegan, en término medio,  $N$  electrones. La intensidad media de la corriente determinada por el acceso de un electrón en este intervalo de tiempo, es igual a  $\langle i \rangle = e/T$  y la intensidad media de la corriente, definida por la llegada de  $N$  electrones, se da por la expresión  $\langle I \rangle = N \langle i \rangle = Ne/T$ . Pero los electrones acuden no uniformemente, como consecuencia de lo cual surgen las fluctuaciones de corriente que originan el ruido. Para determinar la composición espectral del ruido representemos la intensidad de la corriente  $i(t)$  en forma de la serie de Fourier en el intervalo  $(-T/2, T/2)$ :

$$i(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (\omega = 2\pi/T), \quad (68.2)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \cos n\omega t dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (68.3a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \sin n\omega t dt \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (68.3b)$$

Teniendo en cuenta la regla de integración con la función  $\delta$

$$\int f(t) \delta(t - t_1) dt = f(t_1),$$

de las fórmulas (68.3a) y (68.3b), considerando (68.1), obtenemos

$$a_n = \frac{2e}{T} \cos n\omega t_1, \quad b_n = \frac{2e}{T} \sin n\omega t_1. \quad (68.4)$$

Entonces, [véase (68.2)]

$$i(t) = \frac{e}{T} + \frac{2e}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega(t - t_1). \quad (68.5)$$

El valor medio del cuadrado de la intensidad de la corriente de la  $n$ -ésima componente es igual a

$$\langle i_n^2 \rangle = \frac{4e^2}{T^2} \left\langle \cos^2 \frac{2\pi n}{T} t \right\rangle = \frac{2e^2}{T^2}. \quad (68.6)$$

Puesto que los electrones aislados se mueven en desorden e incorrelacionadamente uno con otro, sus contribuciones en el desarrollo de la serie de Fourier para la intensidad de la corriente se diferenciarán por la fase. Al calcular el cuadrado de la fluctuación de la intensidad de la corriente, la promediación respecto a la fase anula todos los términos con frecuencias desiguales y en la serie quedarán sólo los términos con las mismas frecuencias. Por esta razón, para el cuadrado medio de fluctuaciones de la  $n$ -ésima componente de Fourier de la intensidad de la corriente para  $N$  electrones que acuden durante el tiempo  $T$ , tenemos

$$\langle T_n^2 \rangle = N \langle i_n^2 \rangle = 2e^2 N / T^2 = 2eI_0 / T, \quad (68.7)$$

donde  $I_0 = eN/T$  es la intensidad media de la corriente.

La cantidad de componentes de la serie de Fourier, cuyas frecuencias están entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ , es igual a  $T d\nu$ , ya que estas componentes se encuentran la una de la otra a distancias de  $1/T$  iguales según las frecuencias. El intervalo  $T$  puede considerarse muy grande y la distancia entre las frecuencias vecinas  $[(n+1)/T] - (n/T) = 1/T$ , muy pequeñas.

Al sumar las contribuciones de estas componentes en el intervalo de frecuencias  $d\nu$ , obtenemos, a base de la fórmula (68.7), para la fluctuación cuadrática media de la intensidad de la corriente la siguiente relación:

$$d \langle I^2 \rangle = \langle I_n^2 \rangle T d\nu = 2eI_0 d\nu. \quad (68.8)$$

Esta fórmula describe el ruido de agitación térmica.

La relación (68.8) se denomina fórmula de Schottky. Señalemos que si en el intervalo espectral de frecuencias  $\nu$  se incluyen sus valores negativos, el factor 2 en la fórmula (68.8) desaparece. Así se hace, por lo general, al utilizar la forma exponencial de las series o integrales de Fourier.

**Ruido de corriente.** A frecuencias muy pequeñas, surgen ruidos acondicionados por diversas heterogeneidades de las resistencias. El cuadrado medio de las

amplitudes de tensiones de este ruido decrece inversamente proporcional a la frecuencia.

El estudio experimental de este ruido, denominado ruido de corriente, conduce a la fórmula

$$\langle (\Delta U)^2 \rangle = \alpha I_0^2 / \nu, \quad (68.9)$$

donde  $\alpha$  es una constante empírica que depende de la geometría de la resistencia y su material. En conductores metálicos voluminosos el ruido prácticamente no existe. En distinto género de resistencias de composición el ruido es muy grande.

La naturaleza de este ruido en la actualidad aún no se aclaró hasta el final. En cambio, al aumentar la frecuencia, su papel en todos los casos se hace despreciablemente pequeño.

**Métodos de reducción del ruido.** Los ruidos distorsionan la forma de la señal útil y es deseable disminuirlos. Desde el punto de vista cuantitativo, la relación entre la señal y el ruido se caracteriza mediante la relación señal/ruido. La tarea consiste en aumentar dicha relación.

La amplificación de la señal no nos conviene para este fin, ya que el amplificador cambia en una misma cantidad de veces tanto la señal, como el ruido, que llegan a su entrada y, además, al pasar la señal, el amplificador le añade su ruido interno. Por eso la amplificación disminuye la relación señal/ruido, es decir, empeora este índice y no puede servir de método para reducir los ruidos.

El ruido de la resistencia puede disminuirse a causa de la reducción de la temperatura en la que funcionan los dispositivos correspondientes. Este método se aplica en gran escala, pero también tiene sus límites. Primero, complica considerablemente el funcionamiento y, segundo, al enfriarse intensamente, los elementos de los dispositivos cambian sus características eléctricas, con la particularidad de que a veces ese proceso es irreversible.

El ruido de agitación térmica y el de corriente se debilitan al disminuir la intensidad de la corriente. El ruido de corriente disminuye también al crecer la frecuencia de la señal. El aumento de la frecuencia de la señal se restringe por las características de alta frecuencia de los circuitos y los elementos del circuito.

Todos los tipos de ruidos disminuyen al reducir la banda pasante. No obstante, la anchura de la banda pasante se limita por las propiedades de la señal, ya que cualquier señal posee una anchura finita y la reducción de la banda pasante más bajo de esta anchura provoca distorsiones esenciales de la señal, es decir, introduce un ruido nuevo.

Así pues, el mejoramiento de las características técnicas de los dispositivos para recibir las señales permite elevar la relación señal/ruido, pero choca con restricciones de principio. Por eso se elaboraron métodos de recepción de la señal que permiten superar estas restricciones. Uno de los métodos difundidos consiste en lo siguiente.

Supongamos que existe una señal que se repite periódicamente y está deformada mucho por el fondo originado por ruidos (fig. 268, a). El período de señales puede determinarse con una precisión suficiente, ya que el ruido no efec-

túa distorsiones del período. Después de eso puede sincronizarse el momento de medición de la señal con la periodicidad de su variación, es decir, ejecutar la medición del valor de la señal múltiples de veces en un mismo punto de su período, por ejemplo, en el punto  $a$  en la fig. 268;  $a$ . Cada medición, a causa de la superposición del ruido, nos da un valor diferente, pero el valor medio de

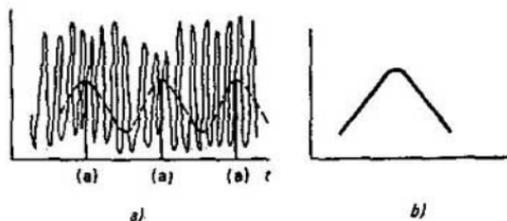


Fig. 268  
Ilustración del proceso de separación de la señal en el fondo originado por ruidos fuertes.

una cantidad grande de mediciones conduce, con una precisión correspondiente, a la magnitud de la señal en este punto del período. En principio, esta precisión puede elevarse ilimitadamente, aumentando sólo de manera correspondiente la cantidad de mediciones. Después de realizar semejantes mediciones para distintos puntos del período, obtenemos la forma de la señal en un período sin distorsiones por ruido (fig. 268, b).

# Apéndice

## 1. Unidades del SI utilizadas en el libro

Magnitud		Unidad		
Denominación	Designación	Dimensión	Denominación	Símbolo
<b>Unidades básicas</b>				
Longitud	<i>l</i>	L	metro	m
Masa	<i>m</i>	M	kilogramo	kg
Tiempo	<i>t</i>	T	segundo	s
Intensidad de la corriente	<i>I</i>	I	Amperio	A
Temperatura	<i>T</i>	Θ	Kelvin	K
Cantidad de substancia	<i>v</i>	N	mol	mol
Intensidad luminosa	<i>I</i>	J	Candela	cd
<b>Unidades derivadas</b>				
Velocidad	<i>v, u</i>	LT <sup>-1</sup>	metro por segundo	m/s
Aceleración	<i>a</i>	LT <sup>-2</sup>	metro por segundo al cuadrado	m/s <sup>2</sup>
Fuerza	<i>F</i>	LMT <sup>-2</sup>	Newton	N
Presión	<i>p</i>	L <sup>-2</sup> MT <sup>-2</sup>	Pascal	Pa
Impulso	<i>p</i>	LMT <sup>-1</sup>	kilogramo-metro por segundo	kgm/s
Energía	<i>W, U, E</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>	Julio	J
Potencia	<i>P</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup>	Vatio	W
Momento de inercia	<i>J</i>	L <sup>2</sup> M	kilogramo-metro cuadrado	kg·m <sup>2</sup>
Momento de fuerza	<i>M</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup>	Newton-metro	N·m
Momento de impulso	<i>L</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-1</sup>	kilogramo-metro cuadrado por segundo	kg·m <sup>2</sup> /s
Carga eléctrica	<i>Q, q</i>	TI	Culombio	C
Densidad volumétrica de la carga	<i>ρ</i>	L <sup>-3</sup> TI	culombio por metro cúbico	C/m <sup>3</sup>
Densidad superficial de la carga	<i>σ</i>	L <sup>-2</sup> TI	Culombio por metro cuadrado	C/m <sup>2</sup>
Densidad lineal de la carga	<i>τ</i>	L <sup>-1</sup> TI	Culombio por metro	C/m
Permitividad absoluta	<i>ε</i>	L <sup>-2</sup> M <sup>-1</sup> T <sup>4</sup> I <sup>2</sup>	Faradio por metro	F/m
Constante eléctrica	<i>ε<sub>0</sub></i>	L <sup>-2</sup> M <sup>-1</sup> T <sup>4</sup> I <sup>2</sup>	Faradio por metro	F/m
Permeabilidad relativa	<i>ε<sub>r</sub></i>		magnitud adimensional	
Intensidad del campo eléctrico	<i>E</i>	LMT <sup>-2</sup> I <sup>-1</sup>	Voltio por metro	V/m
Flujo de intensidad del campo	<i>N</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup> I <sup>-1</sup>	Voltio-metro	V·m
Potencial del campo eléctrico	<i>φ</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup> I <sup>-1</sup>	Voltio	V
Momento eléctrico del dipolo	<i>p</i>	LTI	Culombio-metro	C·m
Polarización	<i>ρ</i>	L <sup>-2</sup> TI	Culombio por metro cuadrado	C/m <sup>2</sup>
Desplazamiento eléctrico	<i>D</i>	L <sup>-2</sup> TI	Culombio por metro cuadrado	C/m <sup>2</sup>
Flujo de desplazamiento eléctrico	<i>Ψ</i>	TI	Culombio	C
Capacidad eléctrica	<i>C</i>	L <sup>-2</sup> M <sup>-1</sup> T <sup>4</sup> I <sup>2</sup>	Faradio	F
Densidad volumétrica de la energía de los campos magnético y eléctrico	<i>w</i>	L <sup>-1</sup> MT <sup>-2</sup>	Julio por metro cúbico	J/m <sup>3</sup>
Tensión eléctrica	<i>U</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup> I <sup>-1</sup>	Voltio	V
Resistencia eléctrica	<i>R</i>	L <sup>2</sup> MT <sup>-2</sup> I <sup>-2</sup>	Ohmio	Ω
Movilidad de los portadores electrificados	<i>b</i>	M <sup>-1</sup> T <sup>2</sup> I	Metro cuadrado por voltio-segundo	m <sup>2</sup> /(V·s)

(Continuación del apéndice)

Magnitud			Unidad		
Denominación	Designación	Dimensión	Denominación	Símbolo	
Densidad de la corriente volumétrica	$j$	$L^{-3}$	Amperio por metro cuadrado	$A \cdot m^{-2}$	
Momento magnético del campo eléctrico	$P_m$	$L^2 I$	Amperio-metro cuadrado	$A \cdot m^2$	
Inducción magnética	$B$	$MT^{-2}T^{-1}$	Tesla	T	
Flujo magnético	$\Phi$	$L^2 MT^{-2} I^{-1}$	Weber	Wb	
Intensidad del campo magnético	$H$	$L^{-1} I$	Amperio por metro	A/m	
Inductancia	$L$	$L^2 MT^{-2} I^{-2}$	Henry	H	
Permeabilidad magnética absoluta	$\mu$	$LMT^{-2} I^{-2}$	Henry por metro	H/m	
Constante magnética	$\mu_0$	$LMT^{-2} I^{-2}$	Henry por metro	H/m	
Permeabilidad magnética relativa	$\mu_r$		magnitud adimensional		
Imanación	$J$	$L^{-1} I$	Amperio por metro	A/m	
Frecuencia de vibraciones	$\nu$	$T^{-1}$	Hertzio	Hz	
Frecuencia angular de vibraciones	$\omega$	$T^{-1}$	segundo a menos uno	$s^{-1}$	
Densidad del flujo de energía del campo electromagnético	$S$	$MT^{-3}$	Vatio por metro cuadrado	$W/m^2$	

## II. Relación entre las fórmulas en el SI y el sistema Gauss (SGS)

A pesar de que en la actualidad ya se ha pasado al Sistema Internacional (SI), a veces aún se necesita saber transformar las fórmulas, escritas en un sistema de unidades a otro. Con este fin se utiliza la presente tabla:

Magnitud	SI	Sistema Gauss (SGS)	Magnitud	SI	Sistema Gauss (SGS)
Intensidad de la corriente	$I$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} I$	Imanación	$J$	$(4\pi/\mu_0)^{1/2} J$
Densidad de la corriente	$j$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} j$	Resistencia eléctrica	$R$	$(4\pi\epsilon_0)^{-1} R$
Carga eléctrica	$Q$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} Q$	Momento dipolar eléctrico	$p$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} p$
Densidad de la carga	$\rho$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2} \rho$	Momento magnético de la corriente	$P_m$	$(4\pi/\mu_0)^{1/2} P_m$
Conductividad	$\gamma$	$4\pi\epsilon_0 \gamma$	Potencial escalar	$\phi$	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2} \phi$
Capacidad	$C$	$4\pi\epsilon_0 C$	Potencial vectorial	$A$	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2} A$
Intensidad del campo eléctrico	$E$	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2} E$	Velocidad de la luz	$c$	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
Desplazamiento eléctrico	$D$	$(\epsilon_0/4\pi)^{1/2} D$	Susceptibilidad magnética	$\chi$	$4\pi\chi$
Intensidad del campo magnético	$H$	$(4\pi\mu_0)^{-1/2} H$	Susceptibilidad dieléctrica	$\kappa$	$4\pi\kappa$
Inducción magnética	$B$	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2} B$	Permitividad	$\epsilon$	$\epsilon\epsilon_0$
Flujo de inducción magnética	$\Phi$	$[\mu_0/(4\pi)]^{1/2} \Phi$	Permeabilidad magnética	$\mu$	$\mu\mu_0$
Inductancia	$L$	$(4\pi\epsilon_0)^{-1} L$	Permitividad relativa	$\epsilon_r$	$\epsilon/\epsilon_0$
Polarización	$P$	$4\pi\epsilon_0 P$	Permeabilidad magnética relativa	$\mu_r$	$\mu/\mu_0$

Reglas para utilizar la tabla. Para transformar una relación, escrita en el SI, a la fórmula correspondiente en el sistema Gauss es indispensable cambiar el símbolo, que está en la columna «SI» por el de la columna «Sistema Gauss». Haciendo uso de esta regla en dirección inversa, puede pasarse de las fórmulas en el sistema Gauss a las fórmulas en el SI. Durante estos cambios las magnitudes mecánicas y otras no magnéticas y no eléctricas quedan invariables. Las derivadas respecto a las coordenadas y al tiempo también permanecen constantes.

Ejemplos de la utilización de la tabla.

1. Escribir la ecuación de Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (\text{«SI»})$$

en el sistema Gauss. Tenemos

$$\operatorname{rot} [(\epsilon_0 / 4\pi)^{-1/2} \mathbf{H}] = (\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\epsilon_0}{4\pi} \right)^{1/2} \mathbf{D} \right],$$

o sea,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

2. Escribir el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = [c / (4\pi)] \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{sistema Gauss})$$

en el «SI». Tenemos

$$\mathbf{S} = \frac{(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}}{4\pi} [(\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{E} \times (\epsilon_0 / 4\pi)^{1/2} \mathbf{H}] = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Nota. La transformación de SI al sistema Gauss conduce siempre a un resultado correcto. Al pasar del sistema Gauss al SI pueden surgir errores si la fórmula en el sistema Gauss está escrita para el vacío. En este caso  $D = E$ ,  $B = H$  y una de las magnitudes en la fórmula puede resultar sustituida por otra y los coeficientes de transformación para estos valores son distintos. Por esta razón, antes de pasar la fórmula del sistema Gauss al SI es necesario hacer que esté escrita en forma correcta para el medio y no sólo para el vacío.

La transformación de los valores numéricos de las magnitudes de un sistema de unidades a otro se realiza con ayuda de las tablas, citadas en los libros de los sistemas de unidades.

### III. Fórmulas del álgebra lineal y análisis

1. Propiedad del producto mixto de vectores

$$\Delta \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad (\text{A.1})$$

2. Descomposición del producto vectorial doble

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.2})$$

3. Definición del operador vectorial de nábla

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mathbf{i}_x$ ,  $\mathbf{i}_y$ ,  $\mathbf{i}_z$  son versores del sistema cartesiano de coordenadas.

4. Definición de la operación de gradiente:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi. \quad (\text{A.4})$$

5. Definición del operador de divergencia:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.5})$$

6. Definición de la operación de rotor:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.6})$$

7. Identidades vectoriales:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla (\varphi \psi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi, \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \times \mathbf{B}, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \varphi) \times \mathbf{A}, \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{A.17})$$

8. Teoremas de Gauss: la superficie cerrada  $S$  rodea el volumen  $V$ . El vector  $d\mathbf{S}$  del elemento superficial está dirigido por la normal exterior a él:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{A.18})$$

$$\int_V (\nabla \varphi) dV = \oint_S \varphi d\mathbf{S}, \quad (\text{A.19})$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.20})$$

9. Teorema de Stokes: El circuito cerrado  $L$  limita la superficie  $S$ . El vector  $d\mathbf{l}$  del elemento de contorno  $L$  coincide con la dirección del rodeo positivo que está relacionado con la dirección de la normal positiva respecto a la superficie  $S$  mediante la ley de Ampère:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (\text{A.21})$$

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi d\mathbf{l}, \quad (\text{A.22})$$

$$\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A} = \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.23})$$

## 10. Teoremas de Green:

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot dS, \quad (\text{A.24})$$

$$\int_V (\nabla \varphi \times \nabla \psi) dV = \frac{1}{2} \oint_S dS \times (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi), \quad (\text{A.25})$$

$$\int_S (\nabla \varphi \times \nabla \psi) \cdot dS = \frac{1}{2} \oint_L (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot dl. \quad (\text{A.26})$$

## Índice alfabético

- Acumuladores 211
- Ampère 61
- Ángulo Hall 233
- Anisotropía 305
- Átomos 22
- Átomos no polares 139
- Átomos polares 139
- Autoinducción 339
- Autotransformador 368
  
- Betatrón 386
- Blindaje magnético 281
  
- Campo casiestacionario 338
  - de la corriente elemental 262
  - crítico 235
  - eléctrico 50, 416
  - de fuerzas de potencial 88, 92, 93
  - Hall 232
  - local 181
  - magnético 56, 59, 61, 66, 257, 416, 446
  - giratorio 357, 374
  - de potencial 205
  - de saturación 188
  - simétrico central 258
  - de un solenoide 329
- Capacidad 118
  - del condensador 125
  - conductor 135
- Carga 16, 29, 30, 31, 32, 46, 83, 85
  - inmóvil 81
  - ligada 149
  - superficial 144
  - de prueba 55
  - superficial 203
  - volumétrica 203
- Ciclo de histéresis 192, 300, 301
- Circuito cerrado 217
  - oscilante 362
- Circuitos derivados 218
  
- Concepción de la acción a corta distancia 50
  - — — a larga distancia 50
- Concentración de cargas 34
- Condensador 124, 125
- Condición de betatrón 386-390
  - de calibración del potencial 280
  - de frontera 148, 149
  - de Lorentz 411
- Conductancia 346
- Conductividad eléctrica 107
- Corriente alterna 343
  - automantenida 240, 242
  - casiestacionaria 338
  - de desplazamiento 393-395
  - monofásica 370
  - no automantenida 240
  - superficial 235
  - trifásica 370
- Corrientes de Foucault 359
- Cristales iónicos 192
- Cuadripolos 380
  
- Diamagnetismo 293
- Dieléctricos 25, 26, 141
  - anisótropos 141
  - isotropos 142
  - lineales 141
  - neutros 184
  - no lineales 141
  - polares 187
- Diferencia de potencial 94
  - — — de contacto 25, 26, 27
- Disociación 237
- Dipolo 129
  - hertziano 415
- Distribución de Boltzmann 21
- Divergencia 39
- Decremento logarítmico de amortiguamiento 363
- Densidad de corriente 35, 36, 201, 241
  - — — de desplazamiento 394
  - — — de saturación 242, 247

Densidad del dipolo 130  
 — de la energía del campo eléctrico 159  
 — — — — magnético 328  
 — del flujo de energía 402, 428  
 — — — superficial 272  
 — de la fuerza de Ampère 231  
 — superficial de la carga 34, 112, 114, 142, 203,  
 — — de la fuerza 171, 173  
 — volumétrica de la carga 33, 142, 142, 165  
 — — de la corriente 338  
 — — de los flujos 268, 269  
 Dominios dieléctricos 195

Ecuación de d'Alembert 411, 412  
 — de continuidad 44  
 — del cuádrupolo 380  
 — de Laplace 102  
 — de la línea de transporte 407  
 — para el potencial vectorial 260  
 — Poisson 97, 102  
 — Barnett 311  
 Efecto Hall 231  
 — Meissner 235  
 — pelicular 374, 430  
 — — anómalo 377  
 — piezoeléctrico 198, 199  
 Electrización 27, 28  
 Electroconductibilidad 216, 237, 238, 239  
 Electrodo coaxial 222  
 Electrolitos 239  
 Electrón 17, 19  
 Emisión termoiónica 244  
 Energía del campo las de cargas superficiales 160  
 — — — magnético 323, 324, 327  
 — — — total 328  
 — de carga 166, 157  
 — de conductores con carga 160  
 — de cuerpo dieléctrico 161  
 — de dipolo 161  
 — electromagnética 403  
 — de Fermi 23  
 — de interacción de campo 303  
 — magnética 330, 331  
 — de momento magnético 335  
 — propia 157, 158, 163  
 Ensayos Tolman y Stewart 229  
 Estabilidad radial 389  
 — vertical 389  
 Espectro energético de los electrones 21, 22, 23  
 Éter 50

Experimento de Einstein-Haas 310  
 Experimentos de Millikan 28, 29  
 Factor Q 363  
 Fem exterior 206, 208  
 Ferrimagnetismo 307  
 Filtros 383  
 Fluctuaciones 450  
 Flujo del vector 39  
 — molecular superficial 270  
 Fórmula de Clausius-Mossotti 186  
 — de Gauss-Ostrogradski 43, 44  
 — de Nyquist 453  
 — de Richardson-Dushman 248  
 — de Stokes 91, 92  
 — de Thomson 382  
 Frecuencia de Larmor 291  
 — límite 442  
 Fuerza de Ampère 65  
 — — interacción de las corrientes rectilíneas 70, 71  
 — — Lorentz 64, 65, 74  
 — superficial 169  
 — volumétrica 165, 169, 173, 285, 334  
 Función de Fermi-Dirac 24  
 — — Langevin 188  
 Casos densos 185, 190  
 — rarificados 185, 189  
 Generador de corriente alterna 319  
 — equivalente de ruido 453  
 Gradiente 93  
 Grosor de la capa superficial de corriente 377  
 Guías de ondas 441, 447  
 Imanación 268  
 — espontánea 304  
 Imanes 274  
 Impedancia 344  
 Impulso del fotón 436  
 — del tren de ondas electromagnéticas 435  
 Inducción del campo de cambio 303  
 — — — magnético 277, 303  
 — electromagnética 313  
 — — del campo 313  
 — mutua 364  
 Inductancia 324, 329  
 — mutua 325, 326  
 Intensidad del campo del dipolo 131  
 — — — eléctrico 51, 110, 111, 112,

Intensidad del campo local 181  
 — — — magnético 273, 278, 279  
 — — — de saturación 189  
 — de corriente 36  
 — — — de saturación 246  
 — de retardo 301  
 Interacción spin-orbital 296  
  
 Ley de Ampère 65  
 — — Biot y Savart 67, 70, 262  
 — — — y Laplace 68  
 — — corriente total 252, 253, 254  
 — — Coulomb 45, 48, 49, 50, 85, 100, 148  
 — — Curie 297  
 — — Curie-Weiss 194, 296, 304  
 — — Child-Laungmuir 248  
 — — inducción electromagnética 318, 320  
 — — Joule-Lenz 213, 215  
 — — Ohm 106, 107, 214  
 Leyes de Kirchhoff 217, 345  
 Líneas de fuerza 86, 87  
 Líquidos polares 191  
  
 Magnéticos 267  
 Magnetorresistencias 233  
 Medio heterogéneo 221, 222  
 — homogéneo 221  
 Método de Cavendish 46  
 — — corrientes de contorno 346  
 — — medidas de la carga por resistencia 29  
 — — representaciones 131, 134, 151  
 Momento dipolar 130, 138  
 — de fuerzas 165  
 — magnético 19, 263, 285, 296, 297  
 Motores eléctricos 353  
 — — asincrónicos 355, 357  
 — — sincrónicos 355  
 Movilidad de las cargas 243  
 — — los electrones 234  
  
 Neutrón 18  
 Normalización del potencial 94  
 Nube electrónica 139, 246, 247  
 Número de onda 426  
  
 Operador de Laplace 103  
 Oscilaciones de betatrón 389  
  
 Pantalla metálica 215  
 Pila de Daniell 211  
 — — Volta 208

Pilas eléctricas (elementos galvánicos) 207  
 Piroeléctricos 199  
 Polarización 139  
 — dieléctrica 139  
 — espontánea 194  
 — iónica de red 140  
 — de la pila 210  
 Potencia de la corriente 212  
 — — — alterna 349  
 — del ruido del generador 453  
 Potencial 93, 94, 95, 96, 97, 102  
 — de avance 413, 414  
 — del campo 412  
 — — — del conductor 118  
 — escalar 93, 94, 321, 412  
 — retardado 413, 414  
 — vectorial 260, 268, 321, 410, 411, 416  
 Precesión de Larmor 293  
 — magnética 290  
 Presión de ondas electromagnéticas 434  
 Principio de conservación de la carga 37, 38, 43  
 — — — de la energía 210, 317  
 — — — superposición 53, 54, 55  
 Profundidad de penetración 429  
 Protón 17  
 Punto de Curie 194  
  
 Quarks 19  
  
 Regla de Lenz 339  
 Relación giromagnética 309  
 Remagnetización 306  
 Resonadores 447  
 Resonancia en paralelo 360, 361, 362  
 — — serie 359, 360  
 — ferromagnética 308  
 — paramagnética 298  
 Rotor 89  
 Ruido de agitación 457  
 — — corriente 459  
 — — resistencia 452  
  
 Sensibilidad máxima 454  
 Spin 19  
 Subred 307  
 Sustancias antiferroeléctricas 196  
 — antiferromagnéticas 306  
 — diamagnéticas 267, 286, 287, 290  
 — ferroeléctricas 192  
 — ferromagnéticas 300,

Substancias paramagnéticas 267, 286,  
 287, 295  
 — piezoeléctricas 197, 198  
 Superconductividad 234, 235  
 Superconductores 235

Tensión 350  
 — de paso 226  
 Temperatura crítica 235  
 — de Curie 194  
 — — Curie-Weiss 194, 205, 307  
 — — Néel 307  
 Teorema de Earnshaw 96  
 — — Gauss 82, 84, 85, 87, 101, 110

— — reciprocidad 120  
 Teoría de bandas 230  
 Tiempo de relajación 108  
 Trabajo de la corriente 212  
 — de salida termoiónico 24  
 Transformador 365  
 — real 369

Vector del desplazamiento 147  
 — Poynting 402  
 Velocidad de deriva 241  
 — — fase 426, 430, 442, 445, 446  
 — — grupo 445, 446

## A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, 1-110, GSP, URSS.

## La editorial Mir publica:

**Matvéev A.**

### **FISICA MOLECULAR**

En el trabajo que ofrecemos el autor al utilizar todo el aparato matemático accesible para los estudiantes de los primeros cursos de los centros de enseñanza superior, expone las nociones fundamentales y regularidades de la física estadística en el ejemplo de los sistemas moleculares. En el capítulo dedicado al gas fotónico y electrónico se analiza el contenido físico de diferentes estadísticas. Examinando las propiedades de los gases, líquidos y sólidos, el autor utiliza los métodos estadístico y termodinámico. Se dan nociones básicas acerca de la termodinámica de los procesos irreversibles.

El autor brinda muchos ejemplos que permiten al lector obtener hábitos de aplicación de la teoría para solucionar problemas concretos. Cada capítulo se acompaña con problemas a resolver, se dan las respuestas que permiten comprobar lo correcto de la resolución.

Además del texto básico se brindan breves formulaciones de algunas teorías fundamentales, así como problemas de control para elevar la eficacia del estudio y asimilación del material.

Esta obra está destinada para los estudiantes de las facultades de física de las universidades y otros centros de enseñanza superior.

**Pávlov P., Joflov A.**

## **FÍSICA DEL CUERPO SÓLIDO**

Este libro reúne aspectos fundamentales de la física del cuerpo sólido.

Los autores examinan todos los elementos imprescindibles de la cristalografía estructural y los procedimientos de definición de estructuras cristalinas. Se analizan las reacciones interatómicas, los diferentes tipos de enlace en los cuerpos sólidos, los defectos estructurales, y se interpretan las propiedades mecánicas, térmicas, eléctricas, ópticas y magnéticas del cuerpo sólido, así como las propiedades físicas de los dieléctricos.

Se presta una atención especial a los problemas de la física de los sólidos amorfos que en la actualidad ha logrado un impetuoso desarrollo.

Recomendamos este trabajo a los estudiantes de las universidades y centros de enseñanza técnica superior. También puede ser interesante y útil para ingenieros y técnicos.

